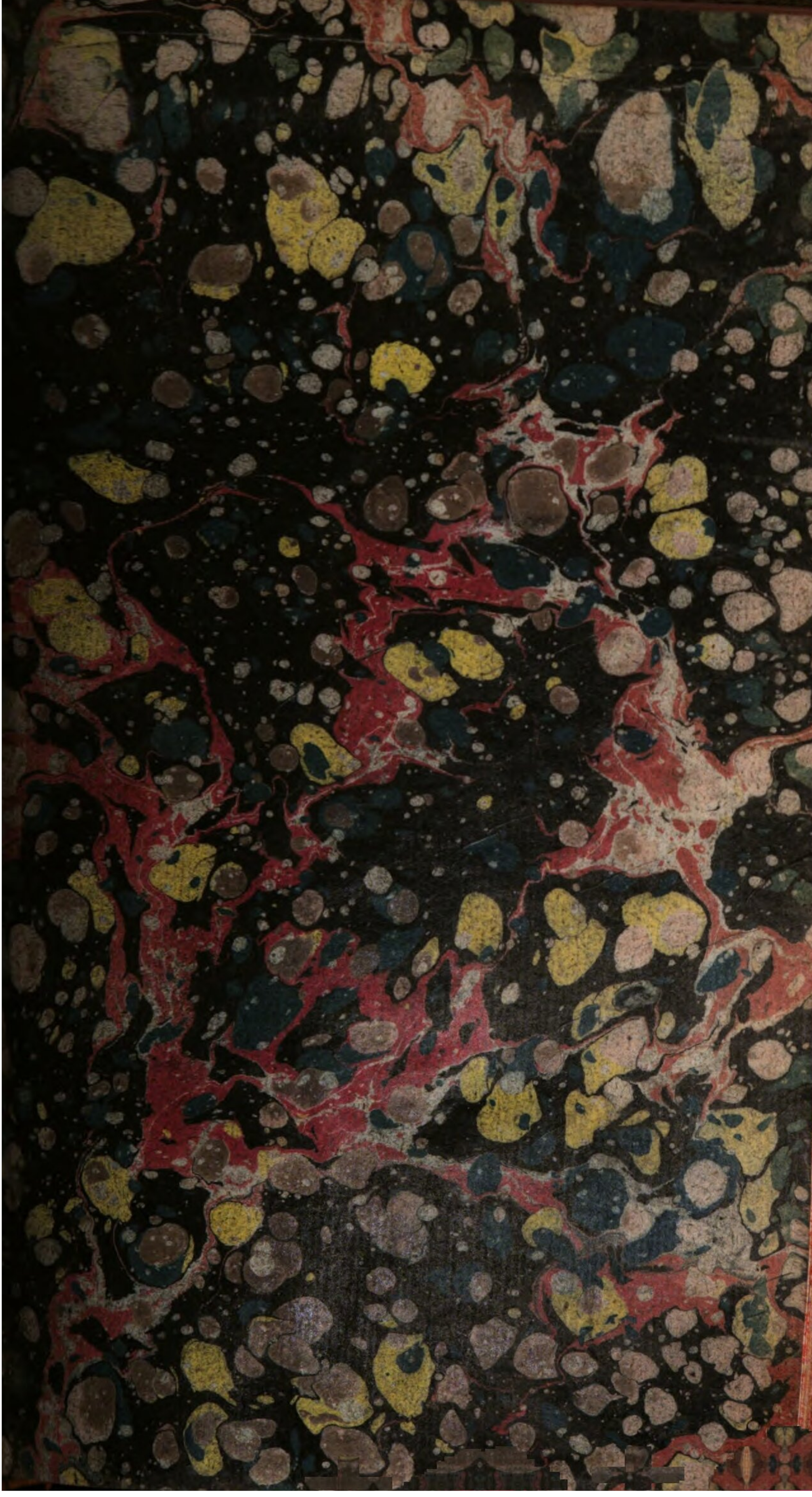


Math. S. 60 K-2

Büry'a

Mathesis. Geometria generalis

270.

R

Der

selbstlernende

Geometer,

oder

deutliche Anweisung

zur

Meßkunst,

worin

sowohl die euklidische Geometrie, als auch die geradlinichte und sphärische Trigonometrie, nebst einer Anleitung zum Nivelliren und Landmessen enthalten ist:

von

Abel Bürja,

Prediger bey der französischen Friedrichstädtschen Gemeine in Berlin, und Professor der Mathemathik bey der Königlichen Ritter-Akademie daselbst.

Zweyter Theil.

Berlin und Libau,

bey Lagarde und Friedrich.

1787.

Inhalt
des ersten Theiles.

I. Hauptstück. Vorläufige Kenntnisse. Seite 1

II. Hauptstück. Von der geraden Linie. Seite 27

III. Hauptstück. Von den Verhältnissen der geraden Linien. Seite 77

IV. Hauptstück. Von Dreyecken und Parallelogrammen. Seite 125

V. Hauptstück. Von vieleckigten Figuren. Seite 207

VI. Hauptstück. Vom Kreise oder Zirkel. Seite 265

VII. Hauptstück. Von der Neigung der Ebnen. Seite 338

Inhalt
des zweyten Theiles.

VIII. Hauptstück. Von geometrischen Körpern, die mit ebnen Flächen begränzet sind. Seite 3

IX. Hauptstück. Von runden Körpern. Seite 57

X. Hauptstück. Von den fünf regulären Körpern. Seite 91

XI. Hauptstück. Von den Linien, wodurch die Größe der Winkel bestimmet wird. Seite 131

XII. Hauptstück. Von der geradlinichten Trigonometrie. Seite 237

XIII. Hauptstück. Von der sphärischen Trigonometrie. Seite 281

XIV. Hauptstück. Vom Nivelliren und Landmessen. Seite 356

Achtes Hauptstück.

Von geometrischen Körpern, die mit ebnen Flächen begränzet sind.

§. 1.

Nachdem wir in vorigen Hauptstücken den Raum erstlich bloß in der Länge, hernach aber in der Länge und Breite zugleich betrachtet haben, so fügen wir jetzt noch die dritte Ausmessung hinzu, nemlich die Tiefe, und handeln von geometrischen Körpern, das ist, von solchen begränzten Räumen, wobey zugleich auf Länge, Breite und Tiefe gesehen wird. In der wirklichen Natur findet man diese drey Ausmessungen zwar nie von einander abgesondert, sondern jedesmal alle drey zusammen. Jedoch haben es die Geometer von je her für bequemer gehalten, anfänglich nur eine derselben, hernach zwey zugleich, zuletzt aber alle drey zusammen zu betrachten, weil der menschliche Verstand so eingeschränkt ist, daß die Gedanken sich leicht verwirren und verwickeln, wenn man zu viel auf einmal fassen will. Wenn es höhere Geister giebt, die sich mit der Ausmessung des Raumes beschäftigen, so gehen sie vermuthlich nicht einen so langsamen Weg, sondern sie bemerken beym ersten Blicke ihres Verstandes die Verhältnisse der Körper, ihrer Flächen und ihrer Linien; da wir armseelige Menschen erst durch eine lange Reihe von Definizionen, Axiomen, Theoremen, kriechen, und uns mit Sinnbildern, Figuren, Zeichen, Ziffern, unterstützen müssen, um nur mit Gewißheit zu erkennen, wie vielmal ein Körper größer ist als ein anderer. Wir müssen die Wahrheit in lauter kleine Theile zerstücken, um ihrer mächtig zu wer-

den. Jedoch laßt uns nicht kleinmüthig werden; es ist Ehre genug für uns Erdensöhne, wenn wir durch anhaltende Mühe und Arbeit so weit kommen, daß wir uns an Kenntnissen unter unseren Nebenmenschen auszeichnen, und uns einigermaßen den höheren Geistern nähern können.

Diese wenige Gedanken mögen zur Einleitung des gegenwärtigen Hauptstücks dienen. Noch eine Erinnerung wird den Anfängern dienlich seyn. So lange wir bloß von einzelnen Ebnen gehandelt haben, ließen sich dieselben ganz bequem durch sinnliche Zeichen oder Figuren auf dem Papiere vorstellen. Aber schon im vorigen Hauptstücke, bey der Lehre von der Neigung der Ebnen, fieng dieses Hülfsmittel an etwas unbequemer zu werden. Bey der Körperlehre ist es noch unzulänglicher.

Die Körper lassen sich auf dem Papiere nicht anders als perspektivisch vorstellen, das ist, so wie sie erscheinen, wenn man sie aus einem Punkte durch eine durchsichtige Fläche ansieht, und die Linien derselben auf solcher Fläche nachmalet. Man kann sich aber deutlichere Vorstellungen davon machen, wenn man sie aus Pappe oder Holz verfertiget. Jedoch ist es nicht undienlich, daß man sich übe, körperliche Figuren auch aus perspektivischen Rissen zu verstehen, oder auch wohl sich dieselben bloß in Gedanken vorzustellen.

§. 2.

Der Inhalt oder die Größe eines Körpers ist der Raum, den er in der Länge, Breite und Tiefe einnimmt, und gleiche Körper sind diejenigen, wovon einer so viel Raum einnimmt als der andere, die Gestalt mag übrigens die nemliche oder verschieden seyn.

§. 3.

Aehnliche Körper sind diejenigen, die von gleich vielen und ähnlichen Flächen begränzet sind, oder die überhaupt

haupt auf gleiche Art gebildet, und nur an Größe unterschieden sind.

§. 4.

Aehnlichgleiche Körper oder identische Körper, sind diejenigen, die von gleich viel ähnlichgleichen Flächen begränzet sind.

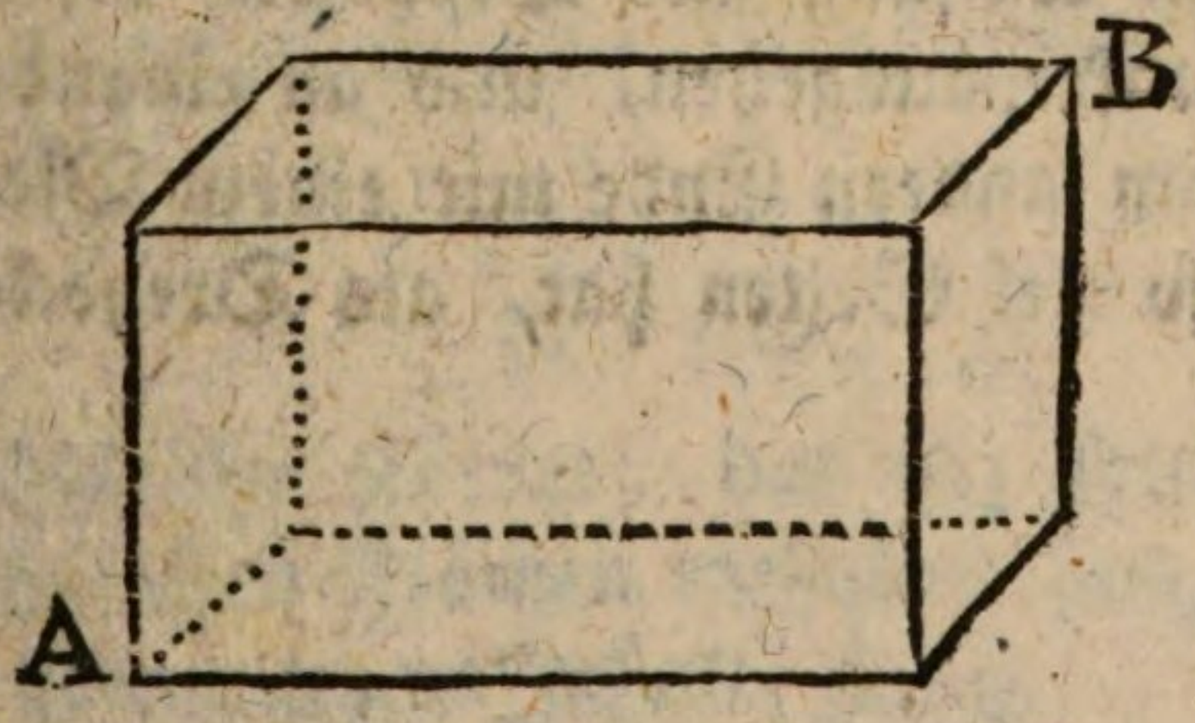
§. 5.

Die Grundfläche eines Körpers ist diejenige Fläche, worauf man sich vorstellet, daß der Körper stehet; und die Höhe des Körpers ist die senkrechte Linie, die von dem Punkte des Körpers, der von der Grundfläche am weitesten entfernt ist, auf die Grundfläche selbst oder auf deren Verlängerung fällt.

Anmerkung. Die Höhe eines Körpers kann auf eine mechanische Weise gefunden werden, wenn man ihn zwischen zwey parallelen Ebnen leget, so daß die Grundfläche auf der einen ruhe, und daß die andere die äußerste Spitze oder Fläche des Körpers berühre. So ist jede senkrechte Linie, die von der einen parallelen Fläche zur andern gehet, der Höhe des Körpers gleich.

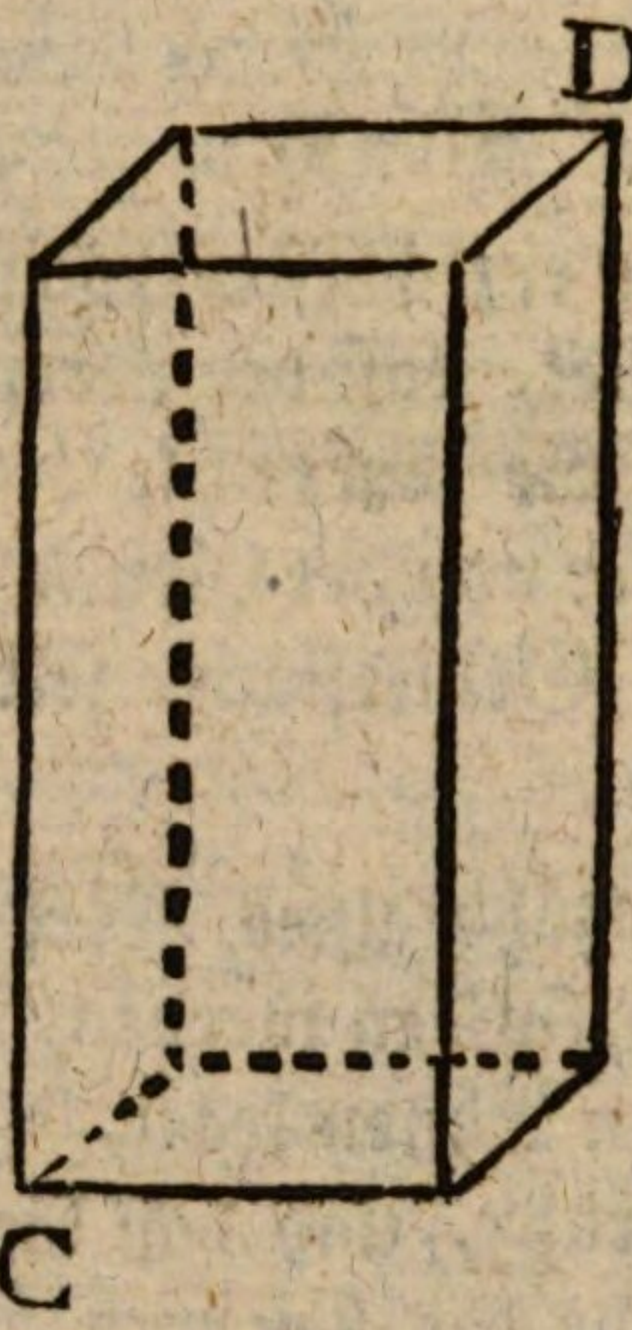
§. 6.

Ein **Parallelepipedon**, als AB, ist ein Körper, der von sechs Ebnen begränzet ist, so daß zwey und zwey gegenüberstehende parallel sind.



§. 7.

Ein Prisma oder eine Eckſäule, als CD, iſt ein Körper, deſſen Umfang aus Parallelogrammen beſtehet, die an einander ſchließen, und der an beyden Enden mit zwey gleichen und parallelen Vielecken bedeckt iſt, welche ſo viel Seiten oder Winkel haben, als der Umfang Parallelogramme hat.

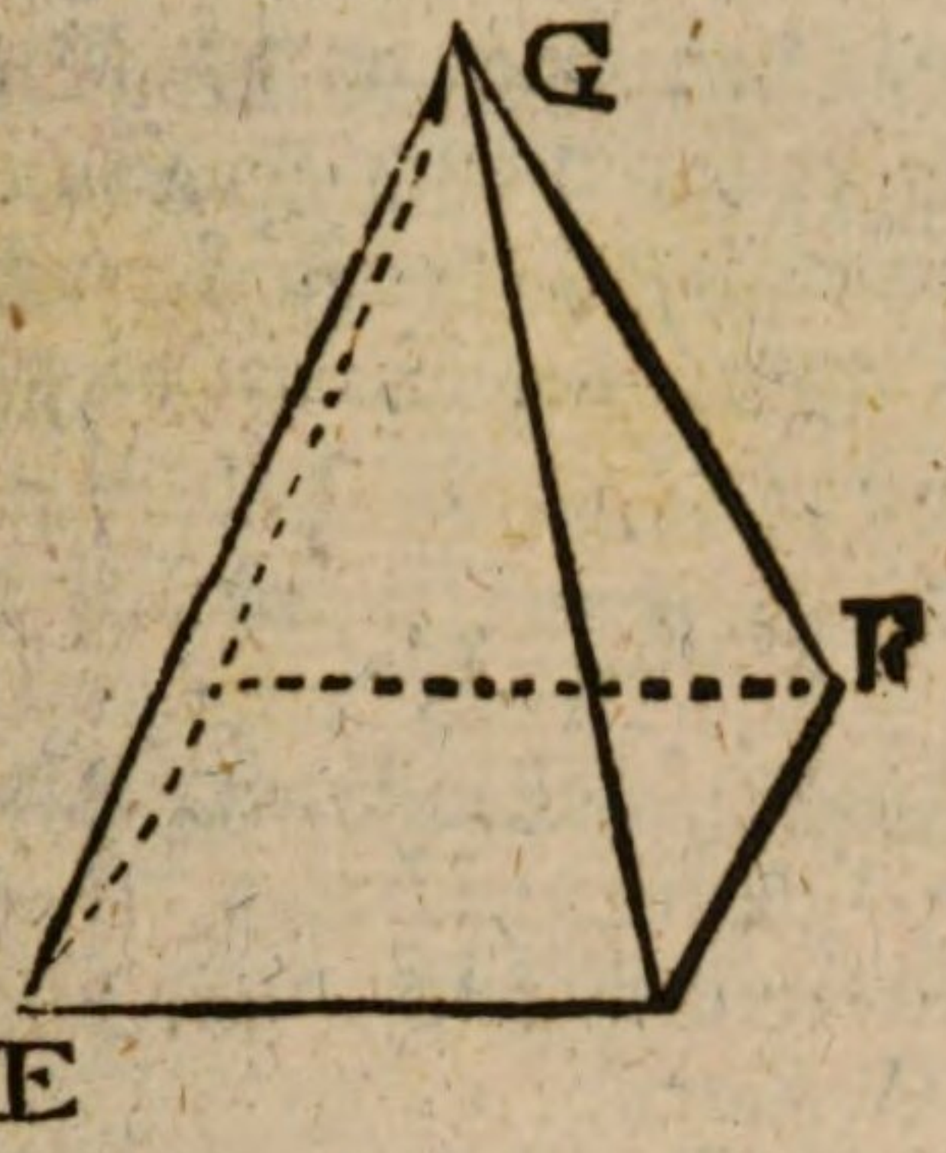


Die beyden Endflächen werden als die Grundflächen eines ſolchen Körpers betrachtet.

Man merke, daß das Parallelepipedon im Grunde nichts anders iſt, als eine Art von viereckigter Eckſäule.

§. 8.

Eine Pyramide oder Spitzſäule, als EFG, iſt ein Körper, deſſen Umfang aus Dreyecken beſteht, die alle aus einem Punkte ausgehen, und an einander ſchließen, und welcher am andern Ende mit einem Vielecke bedeckt iſt, welches ſo viel Seiten hat, als Dreyecke vorhanden ſind.



Diese Endfläche wird meistens als die Grundfläche des Körpers betrachtet.

§. 9.

Ein körperlicher Winkel ist die Gegend in einem Körper, wo drey oder mehrere Flächen desselben in einem Punkte zusammen laufen.

§. 10.

Zwey körperliche Winkel sind gleich, wenn man sich vorstellen kann, daß die ebnen Winkel, woraus sie entstehen, genau auf einander passen, sobald man den einen körperlichen Winkel in den andern hineinfüget. Und wenn nur bewiesen werden kann, daß alle ebne Winkel jeder auf jedem passet, außer einem einzigen, so muß auch dieser einzige auf dem homologen Winkel des andern körperlichen Winkels passen, weil sonst zwischen zwey Linien, die einander schneiden, mehr als eine Ebne liegen müßte, welches unmöglich ist.

§. 11.

Aehnlichgleiche Körper, das ist, solche die in gleichen und ähnlichen Flächen enthalten sind, sind auch an Größe oder körperlichem Inhalte gleich.

Denn wenn man den einen an der Stelle des andern seßet, so nimmt er dessen Raum genau ein. Man kann überhaupt ähnlichgleiche Körper so betrachten, als wäre es der nemliche Körper, der nur an verschiedenen Orten aufgestellt worden.

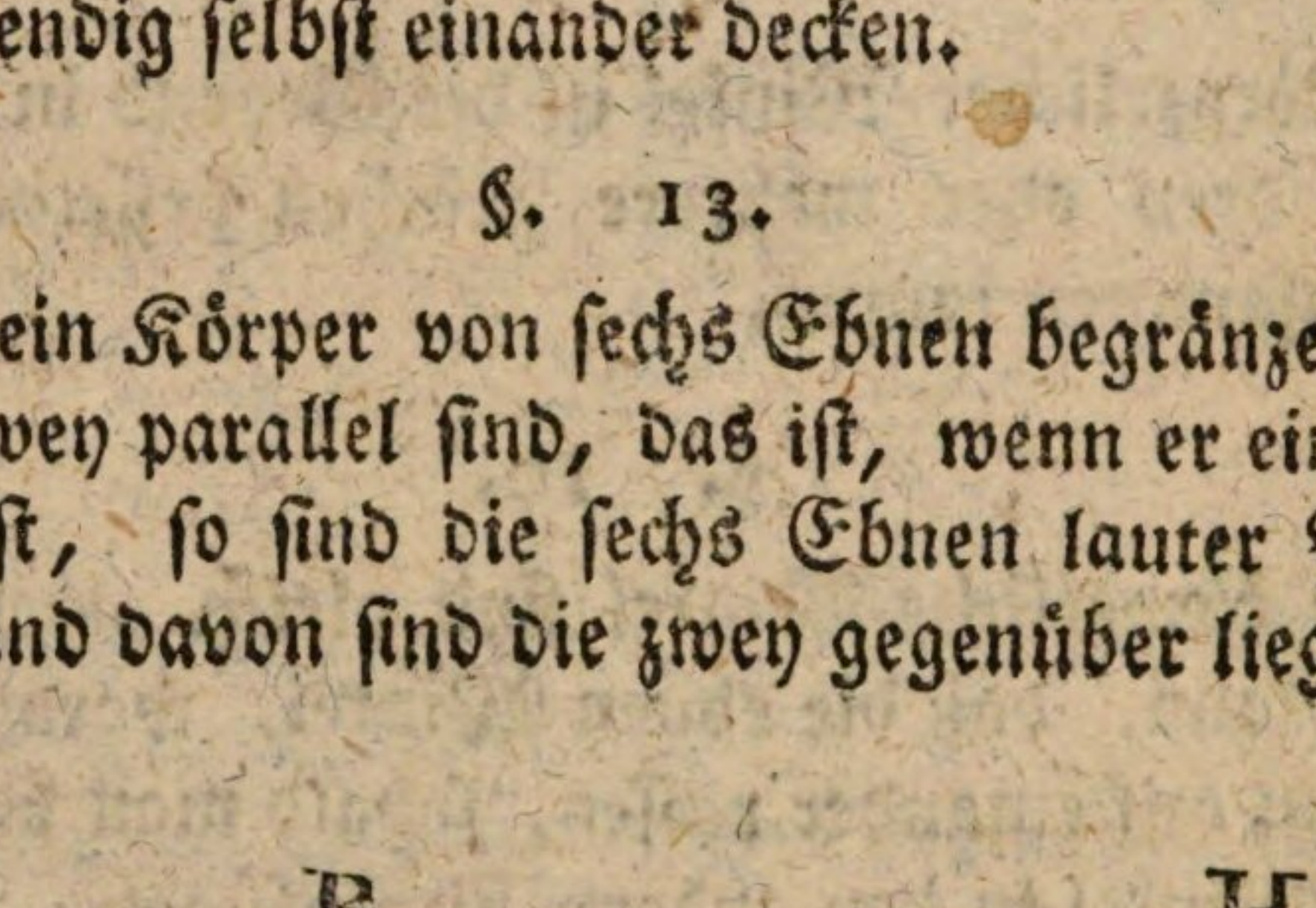
§. 12.

Wenn zwey Körper in allen ihren Flächen, ausgenommen einer einzigen, ähnlichgleich sind, so ist auch die leßte in beyden Körpern ähnlichgleich, und folglich sind beyde Körper vollkommen gleich.

Denn wenn man den einen Körper an der Stelle des andern seßet, so fallen die Gränzen aller Flächen, folglich auch der leßten, auf einander; folglich auch die leßten Flächen selbst, weil Ebnen, deren Gränzen einander decken, auch nothwendig selbst einander decken.

§. 13.

Wenn ein Körper von sechs Ebnen begränzet ist, die zwey und zwey parallel sind, das ist, wenn er ein Parallelepipedon ist, so sind die sechs Ebnen lauter Parallelogramme, und davon sind die zwey gegenüber liegende allemal gleich.



Weil

Weil die Ebne AC von den parallelen Ebnen BG und CE geschnitten wird, so sind die Durchschnitte AB und DC parallel (VII §. 26). Weil die Ebne AC auch von den parallelen Ebnen BF und AE geschnitten wird, so sind auch die Durchschnitte BC und AD parallel (VII §. 26). Da also AB mit DC und BC mit AD parallel sind, so ist die Ebne AC ein Parallelogramm (I §. 29). Der nemliche Beweis läßt sich auf alle übrige Ebnen anwenden.

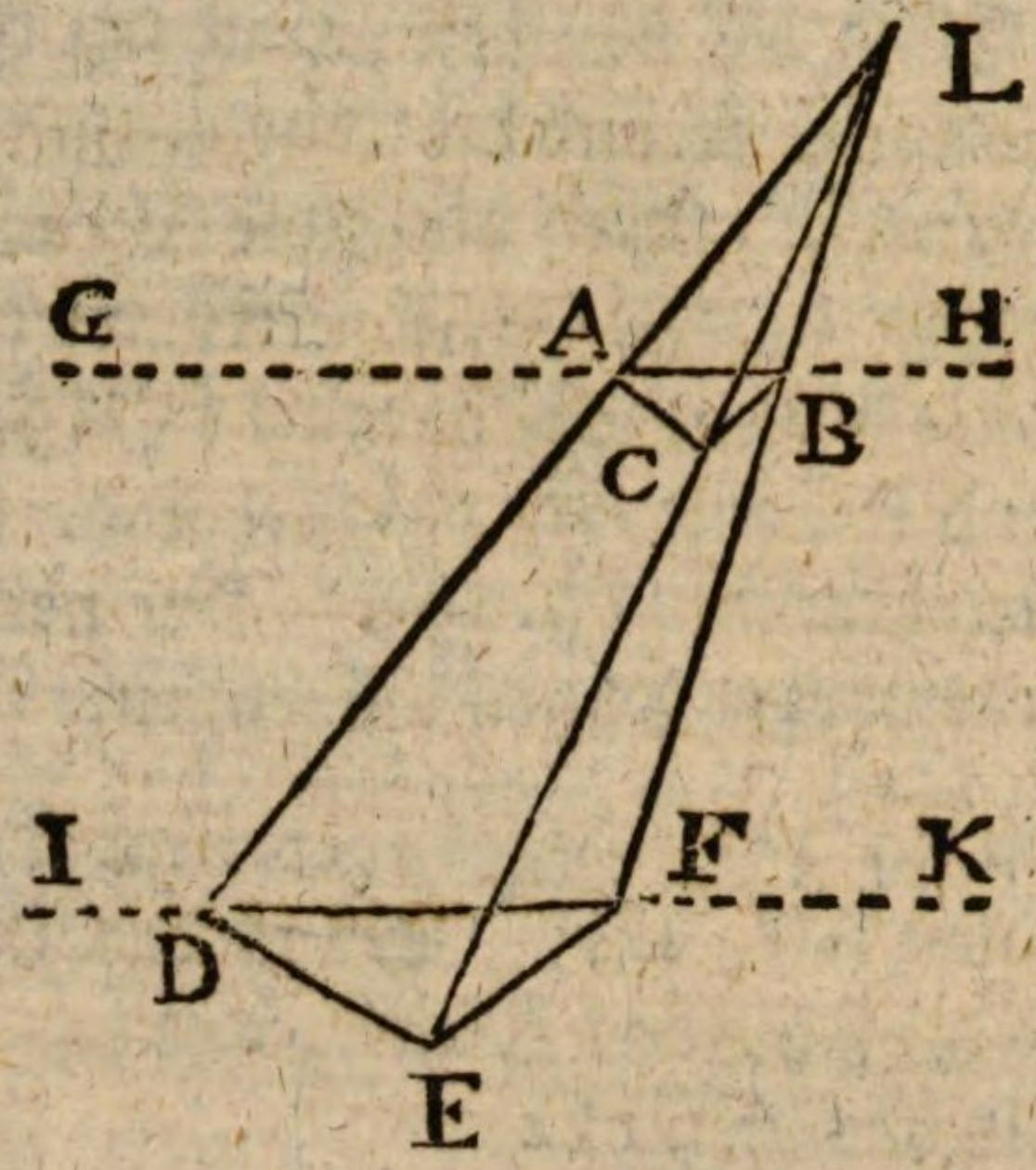
Ziehe nun in zwey gegenüber liegenden Ebnen die Diagonal-Linien AH, DF. So ist das Parallelogramm BG doppelt so groß als das △ABH, und das □ CE ist doppelt so groß als das △DFC.

Nun sind AB und DC, desgleichen BH und CF parallel, folglich ist ∠ABH = ∠DCF (VII §. 19). Es ist auch AB = DC, BH = CF, weil AC und BF Parallelogramme sind. Deswegen sind die Dreyecke AHB und DFC einander gleich (IV §. 2), folglich auch ihr Doppeltes, das heißt □BG = □CE. Und dieses gilt von allen andern gegenüberstehenden Flächen.

§. 14.

Wenn eine dreyeckigte Pyramide von einer Ebne geschnitten wird, die mit der Grundfläche parallel ist, so ist der Durchschnitt eine Ebne, welche mit der Grundfläche ähnlich ist.

(Siehe die folgende Figur.)



Es stehe die dreyeckige Pyramide DEFL auf einer Ebne, die hier durch die gerade Linie IK vorgestellet wird, und sie werde geschnitten durch eine andere Ebne GH, welche mit IK parallel ist.

Die Flächen der Pyramide, nemlich die Dreyecke DLF, ELD, ELF sind demnach von 2 parallelen Ebnen IK und GH geschnitten, und also sind die Durchschnittslinien parallel, nemlich AB mit DF, AC mit DE, BC mit EF (VII §. 26).

Da also im Dreyeck DLF die Linie AB mit der Grundlinie DF parallel ist, so ist $\triangle ALB \sim \triangle DLF$, und es ist

AB, DF :: AL, DL.

Ebenfalls in den Dreyecken ALC und DLE ist

AC, DE :: AL, DL :: CL, EL (VII §. 27)

und in den Dreyecken CLB und ELF ist

CB, EF :: CL, EL :: AL, DL.

Also ist

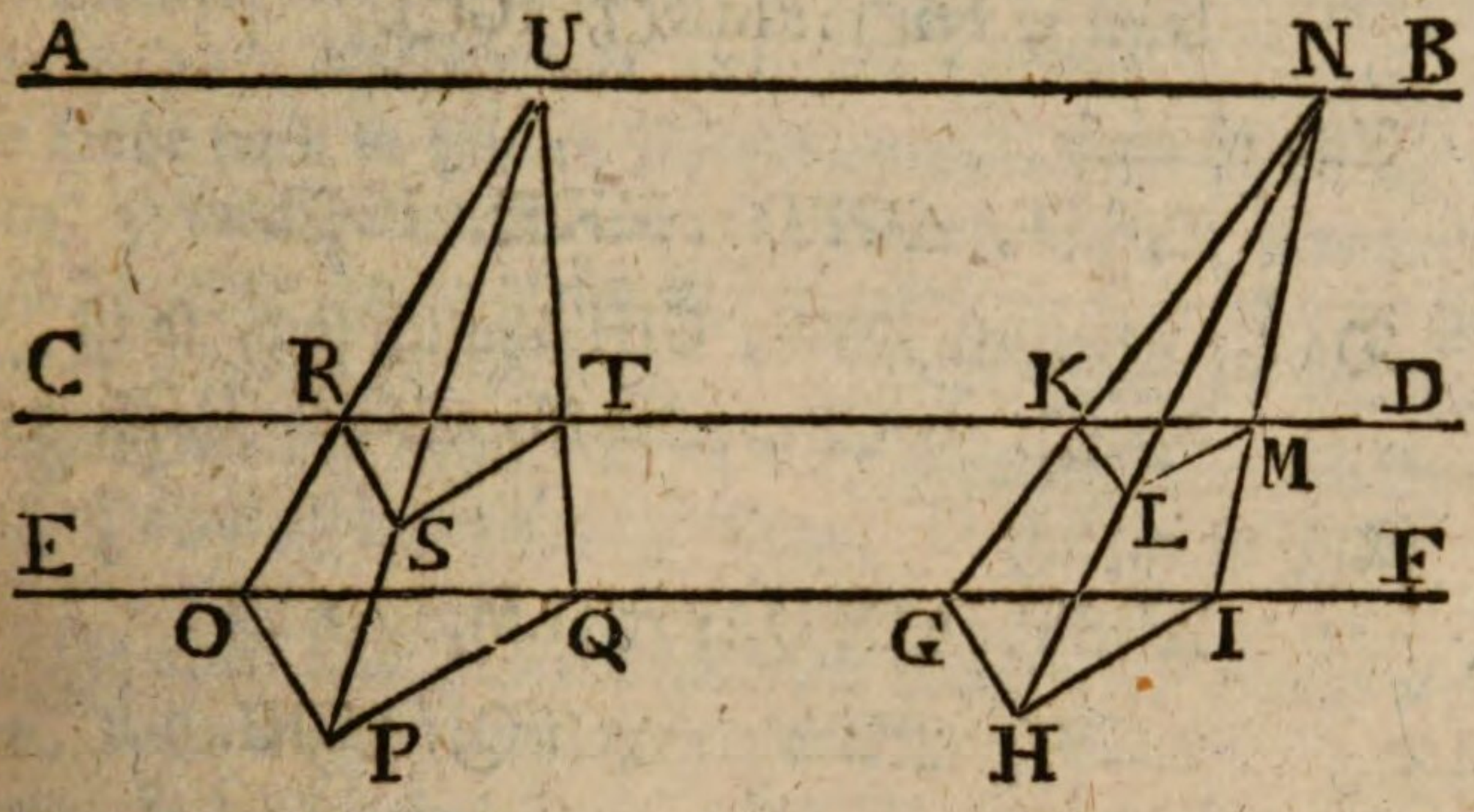
AB, DF :: AC, DE :: CB, EF

und die Dreyecke ABC und DFE sind ähnlich.

§. 15.

§. 15.

Wenn zwey dreyeckigte Pyramiden zwischen den nemlichen Parallelflächen stehen, und von einer dritten Fläche geschnitten werden, die mit beyden parallel ist, so verhalten sich die Durchschnitts-Flächen, wie die Grundflächen.



Es seyen die Pyramiden OPQU und GHIN zwischen zwey parallelen Flächen EF und AB; sie seyen geschnitten von einer dritten parallelen Fläche CD.

So ist △RST ∽ △OPQ, (§. 14).

Folglich ist

△RST, △OPQ :: RT□, OQ□ (IV §. 35).

Es ist aber in den ähnlichen Dreyecken URT und UOQ

RT, OQ :: UT, UQ

folglich RT□, OQ□ :: UT□, UQ□

Also ist auch

△RST, △OPQ :: UT□, UQ□

Es ist ferner

UT, UQ :: NM, NI (VII §. 27)

folglich UT□, UQ□ :: NM□, NI□

Also ist auch

△RST, △OPQ :: NM□, NI□.

In den ähnlichen Dreyecken NMK und NIG ist

NM, NI :: MK, IG

NM□, NI□ :: MK□, IG□.

Also ist auch

△RST, △OPQ :: MK□, IG□.

Da die Dreyecke KML, GIH ähnlich sind, so ist

MK□, IG□ :: △KLM, △GHI (IV §. 35).

Also ist endlich

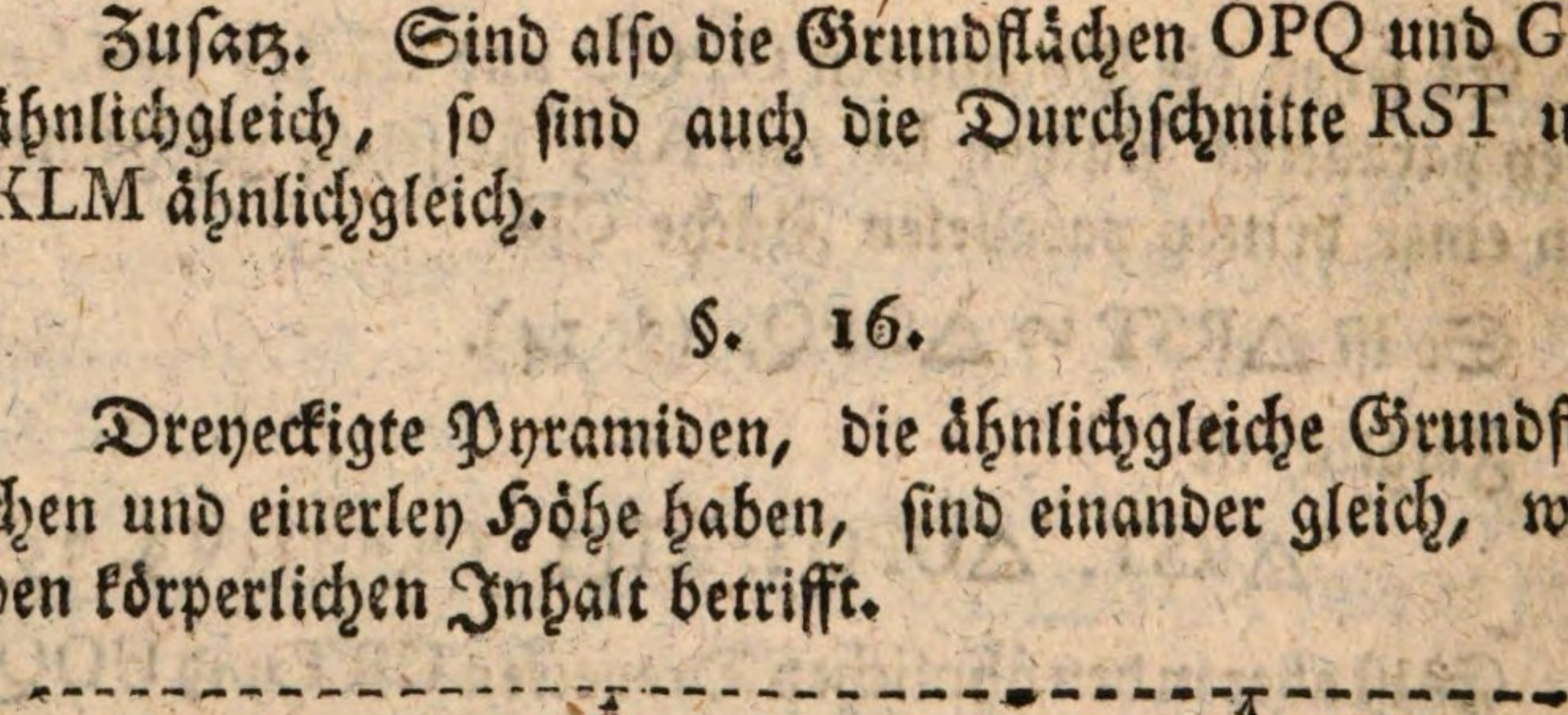
△RST, △OPQ :: △KLM, △GHI

oder △RST, △KLM :: △OPQ, △GHI.

Zusatz. Sind also die Grundflächen OPQ und GHI ähnlichgleich, so sind auch die Durchschnitte RST und KLM ähnlichgleich.

§. 16.

Dreyeckigte Pyramiden, die ähnlichgleiche Grundflächen und einerley Höhe haben, sind einander gleich, was den körperlichen Inhalt betrifft.



Man

Man stelle sich vor, beyde Pyramiden seyen durch sehr viel gleich entfernten Parallelflächen geschnitten, als AB und CD, so wird $\triangle EFG \cong \triangle HIK$ (§. 15). Ziehe EL, FM, GN, HO, IP, KQ perpendikular auf der folgenden parallelen Fläche CD, so entstehen zwey identische dreyeckigte Prismen EFGNML und HIKQPO, die folglich gleich groß sind (§. 11). Beschreibet man nun auf diese Art der ganzen Höhe nach in beyden Pyramiden solche identische Prismen, so werden in dem einen so viel seyn, als in dem andern, und da jeder jedem gleich ist, so wird die Summe derselben beyderseits gleich seyn. Oder die Körper, die aus solchen Prismen bestehen, sind beständig gleich, soviel man auch Parallelflächen ziehen mag.

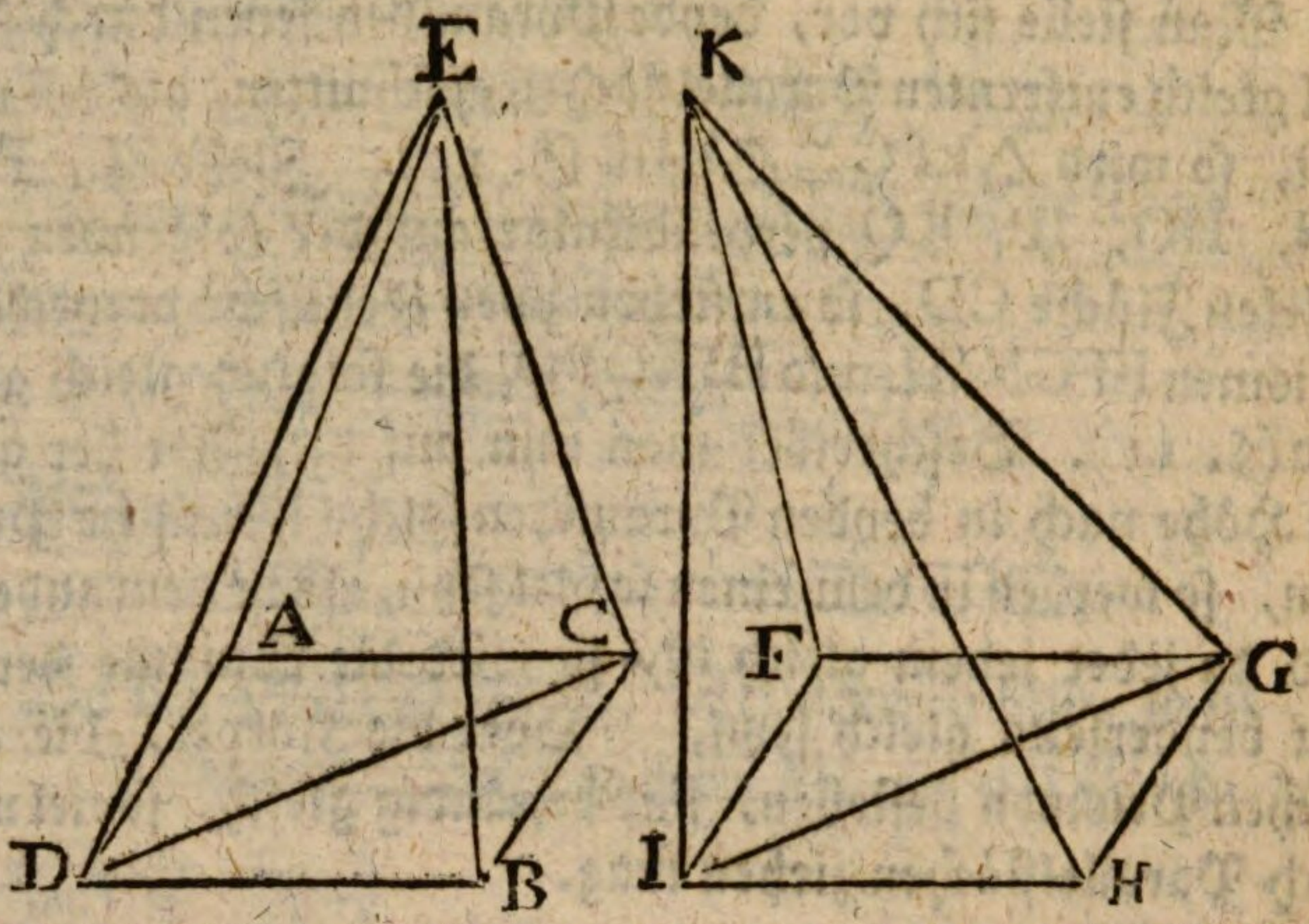
Je mehr aber in jedem Körper Prismen gemacht werden, desto mehr nähern sich beyde Körper den Pyramiden worin sie beschrieben sind. Die Pyramiden sind also die Gränzen derselben.

Und da die wachsenden Größen beständig gleich bleiben, so sind auch ihre Gränzen, nemlich die Pyramiden gleich (III §. 24).

§. 17.

Viereckigte Pyramiden von gleicher Höhe, welche ähnlichgleiche Grundflächen haben, sind gleich.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sey das reguläre oder irreguläre Viereck AB $\frac{\sim}{=}$ FH. Und die Pyramiden ABE und FHK seyen von gleicher Höhe.

Ziehe DC, IG. Weil die Vierecke AB und FH ähnlichgleich sind, so ist $\angle A = \angle F$, $AC = FG$, $AD = FI$. Folglich $\triangle ACD \frac{\sim}{=} \triangle FGI$. Eben so wird bewiesen, daß $\triangle DCB \frac{\sim}{=} \triangle IGH$.

Stelle dir vor die Pyramide ABE sey vermittelst einer Ebne, die durch DC und durch E gehet in zwey dreyeckigte Pyramiden zerschnitten, nnd die Pyramide FHH sey auch vermittelst einer Ebne die durch IG und durch K gehet, in zwey dreyeckigte Pyramiden zerschnitten.

So ist (§. 16)

Pyr. ACDE = Pyr. FGIK

Pyr. DCBE = Pyr. IGHK

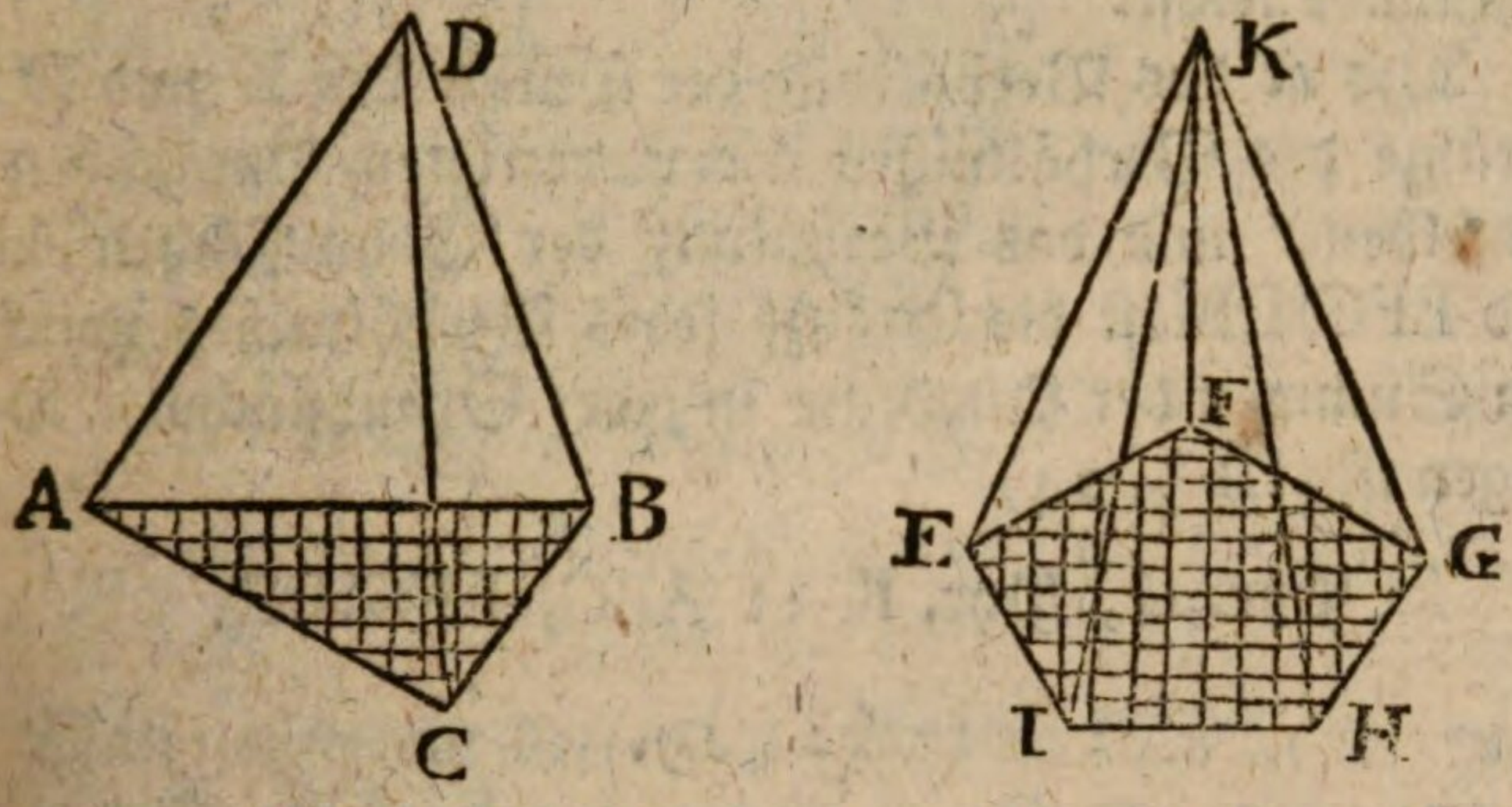
folglich Pyr. ACDE + Pyr. DCBE = Pyr. FGIK + Pyr. IGHK

oder Pyr. ABE = Pyr. FHK.

§. 18.

§. 18.

Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, es mögen übrigens die Grundflächen ähnlich seyn oder nicht.



Es seyen zwey Pyramiden von gleicher Höhe, ABCD, EFGHIK.

Beschreibe auf beyden Grundflächen ABC und EFGHI kleine Quadrate, alle einander gleich, und so viel deren hineingehen können. Laß das Uebrige an den Ränden, was keine Quadrate ausmachet, aus der Acht. Ueber jedem Quadrate stelle dir eine viereckigte Pyramide vor, die ihre Spitze in D oder in K hat. So sind alle diese viereckigte Pyramiden gleich, weil sie ähnlichgleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben (§. 17). So viel Quadrate in jeder Grundfläche sind, so viel stehen auch gleiche Pyramiden über denselben.

Also, so vielmal mehr Quadrate in der einen Grundfläche sind als in der andern, so vielmal mehr stehen auch auf der einen Grundfläche viereckigte Pyramiden als auf der anderen. Oder die Summe der viereckigten Pyramiden in der Pyramide D, verhält sich zur Summe der viereckigten Pyramiden in der Pyramide K, wie die Summe der Quadrate in ABC zur Summe der Quadrate in EFGHI.

Je kleiner nun die Quadrate und folglich die viereckigten Pyramiden angenommen werden, desto mehr nähert sich die Summe der Quadrate in jeder Grundfläche der Grundfläche selbst, und desto mehr nähert sich zugleich die Summe der viereckigten Pyramiden in jeder Pyramide, der Pyramide selbst.

Also ist das Verhältniß der Pyramiden K und D die Gränze des Verhältnisses der viereckigten Pyramiden in denselben, und das Verhältniß der Grundflächen ABC und EFGHIK ist die Gränze jedes Verhältnisses zwischen den Summen der Quadrate in jeder Grundfläche. Deswegen ist (III §. 24)

Pyr. D, Pyr. K :: ABC, EFGHIK.

§. 19.

Dreyeckigte, viereckigte und überhaupt vieleckigte Pyramiden von gleicher Höhe und gleicher oder ähnlichgleicher Grundfläche sind einander gleich.

Denn sie verhalten sich wie die Grundflächen. (§. 18) Da also die Grundflächen gleich sind, so müsseu auch die Pyramiden gleich seyn.

§. 20.

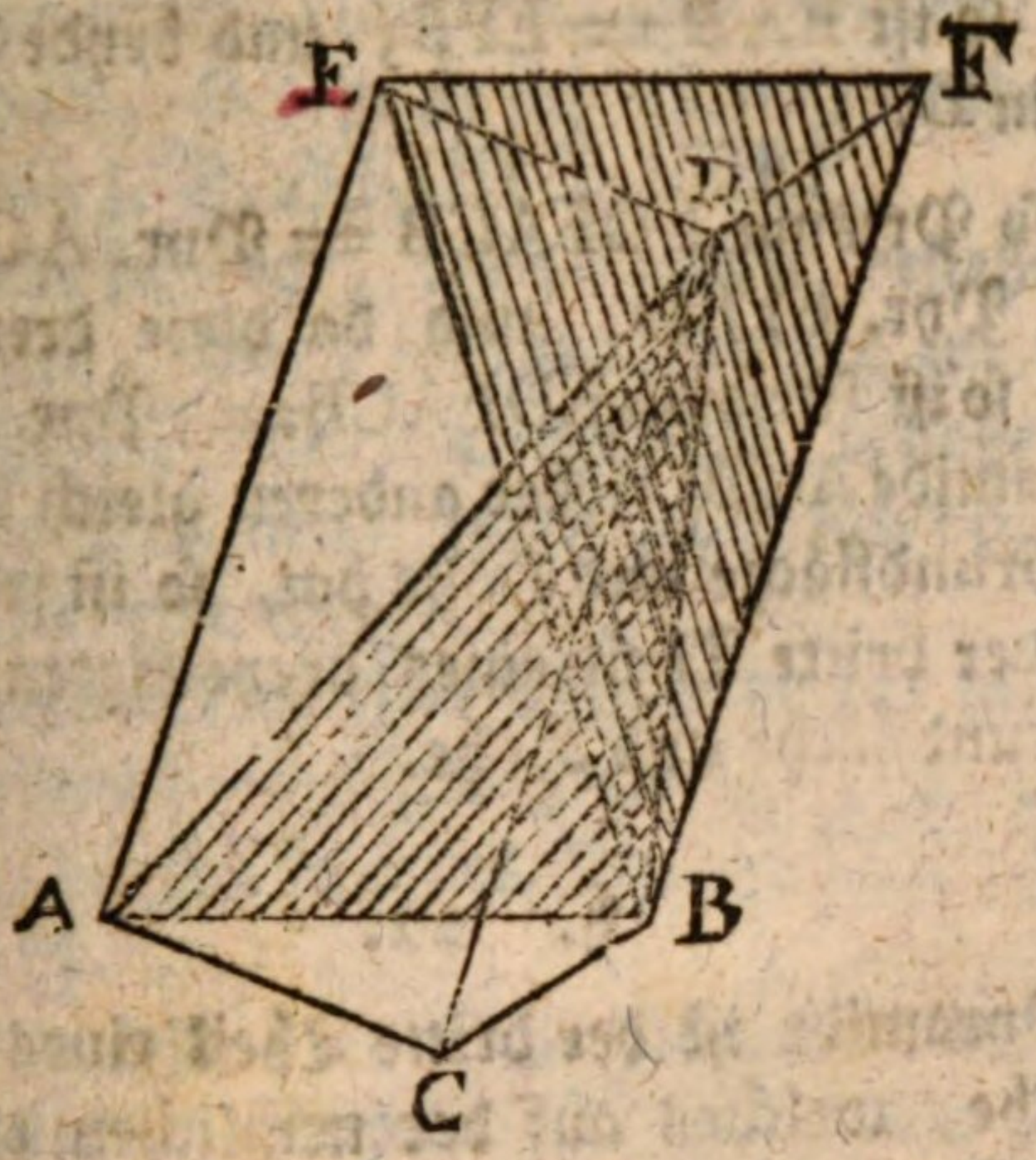
Pyramiden von gleicher Höhe und von ähnlicher Grundfläche verhalten sich wie die Quadrate der homologen Seiten der Grundflächen.

Denn sie verhalten sich wie die Grundflächen, und diese, wenn sie ähnlich sind, verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

§. 21.

Eine dreyeckigte Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, welches die nemliche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Man



Man nehme ein dreyeckiges Prisma EDFACB. Auf den drey Parallelogrammen ziehe man die Queerlinien DB, DA und BE.

Man schneide das Prisma längst dem Dreyeck ADB, so entstehet eine Pyramide welche das Dreyeck ABC zur Grundfläche hat, und deren Spitze in D ist, welche also die nemliche Grundfläche und Höhe hat als das Prisma.

Diese Pyramide ABCD ist der dritte Theil des Prisma. Denn man schneide wiederum das Prisma längst dem Dreyeck DEB, so entstehet wiederum eine Pyramide: deren eine Fläche, die man als Grundfläche annehmen kann, ist AED, und die Spitze ist in B. Nimmt man in der Pyramide ACBD die Fläche ADC zur Grundfläche, so ist die Pyramide AEDB gleich der Pyramide ABCD, weil die Grundflächen ADC und ADE gleich sind, und die Spitzen in B zusammentreffen, folglich auch die Höhe gleich ist.

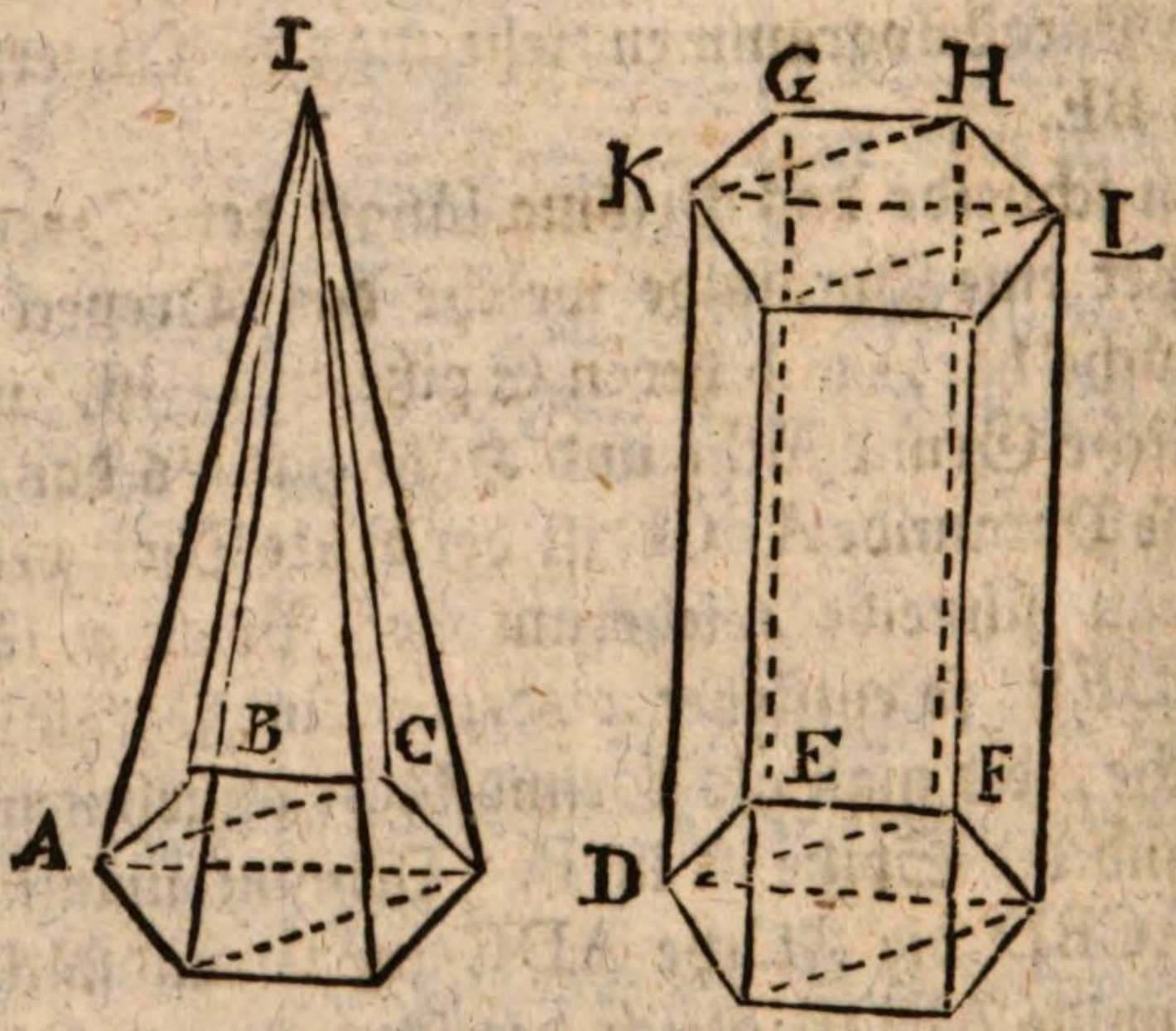
Nun bleibet noch im Prisma eine dritte Pyrmide übrig, nemlich diejenige, deren eine Fläche, die wir zur Grundfläche annehmen wollen, EFB ist, und deren Spitze in D ist. Diese ist gleich mit der vorigen Pyramide: denn wenn man in derselben die Fläche EAB als Grundfläche

annimmt, so ist EA*B* = EFB, und beyde Spitzen fallen zusammen in D.

Da also Prisma EDFACB = Pyr. ACBD + Pyr. AEDB + Pyr. EFBD, und da diese drey Pyramiden gleich sind, so ist Prisma EDFACB = 3 Pyr. ACBD. Und da die Pyramide ACBD jeder anderen gleich ist, welche die nemliche Grundfläche und Höhe hat, so ist jede dreyeckigte Pyramide der dritte Theil eines dreyeckigten Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

§. 22.

Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe, welches auf der nemlichen oder auf ähnlichgleicher Grundfläche stehet.



Es sey I eine Pyramide und K ein Prisma von gleicher Höhe und ähnlichgleicher Grundfläche.

Weil die Grundflächen ähnlich sind, so lassen sie sich in ähnliche Dreyecke eintheilen; (V. §. 8.) und weil die Grundflächen nicht nur ähnlich sondern auch gleich sind, so werden die Dreyecke auch ähnlichgleich. Zum Exempel △ABC ≅ △DEF.

Weil

Weil die obere Fläche KL des Prisma der untern ähnlichgleich ist, so läßt sie sich eben so eintheilen wie die untere, so daß z. E. $\triangle KGH \overset{\sim}{=} \triangle DEF$.

Man stelle sich vor, die Pyramide bestehe aus kleineren Pyramiden, deren jede ein Dreyeck zur Grundfläche und die Spitze in I habe. Desgleicheu bestehe das Prisma aus kleineren Prismen, deren jedes sich oben und unten mit einem Dreyecke endige.

So ist jede Dreyeckigte Pyramide der dritte Theil des ähnlichstehenden dreyeckigten Prisma, z. E. die Pyramide ABCI ist der dritte Theil des Prisma DEFKGH, und so die übrigen (§. 21.)

Weil nun jede dreyeckigte Pyramide der dritte Theil jedes dreyeckigten Prisma ist, so ist die Summe aller dreyeckigten Pyramiden der dritte Theil der Summen aller dreyeckigten Prismen. Das ist die ganze Pyramide ist der dritte Theil des ganzen Prisma.

§. 23.

Prismen von ähnlichgleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Denn da sie dreymal so groß sind als die Pyramiden die mit ihnen die nemliche Basen und gleiche Höhen haben, und da diese Pyramiden gleich sind (§. 19), so müssen auch die Prismen gleich seyn.

§. 24.

Parallelepipeden von gleicher Höhe und ähnlichgleicher Grundfläche, sind gleich.

Denn Parallelepipeden sind viereckigte Prismen. (§. 7.) Was also von Prismen überhaupt bewiesen ist, gilt auch von Parallelepipeden.

§. 25.

Parallelepipeden und Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, es mögen nun diese Grundflächen ähnlich seyn oder nicht.

Parallelepipeden oder Prismen von gleicher Höhe sind jedes dreymal so groß als Pyramiden welche die nemliche Höhe und mit den Parallelepipeden oder Prismen ähnlichgleiche Grundflächen haben. (§. 21.) Da sich nun solche Pyramiden verhalten wie die Grundflächen (§. 18), so verhalten sich auch die dreyfachen Pyramiden, das ist, die Prismen oder die Parallelepipeden, wie die nemlichen Grundflächen.

§. 26.

Prismen oder Parallelepipeden von gleicher Höhe, und mit gleichen Grundflächen, sind gleich, wenn auch die Grundflächen nicht ähnlich sind.

Dieses ist eine Folge des vorhergehenden Lehrsatzes.

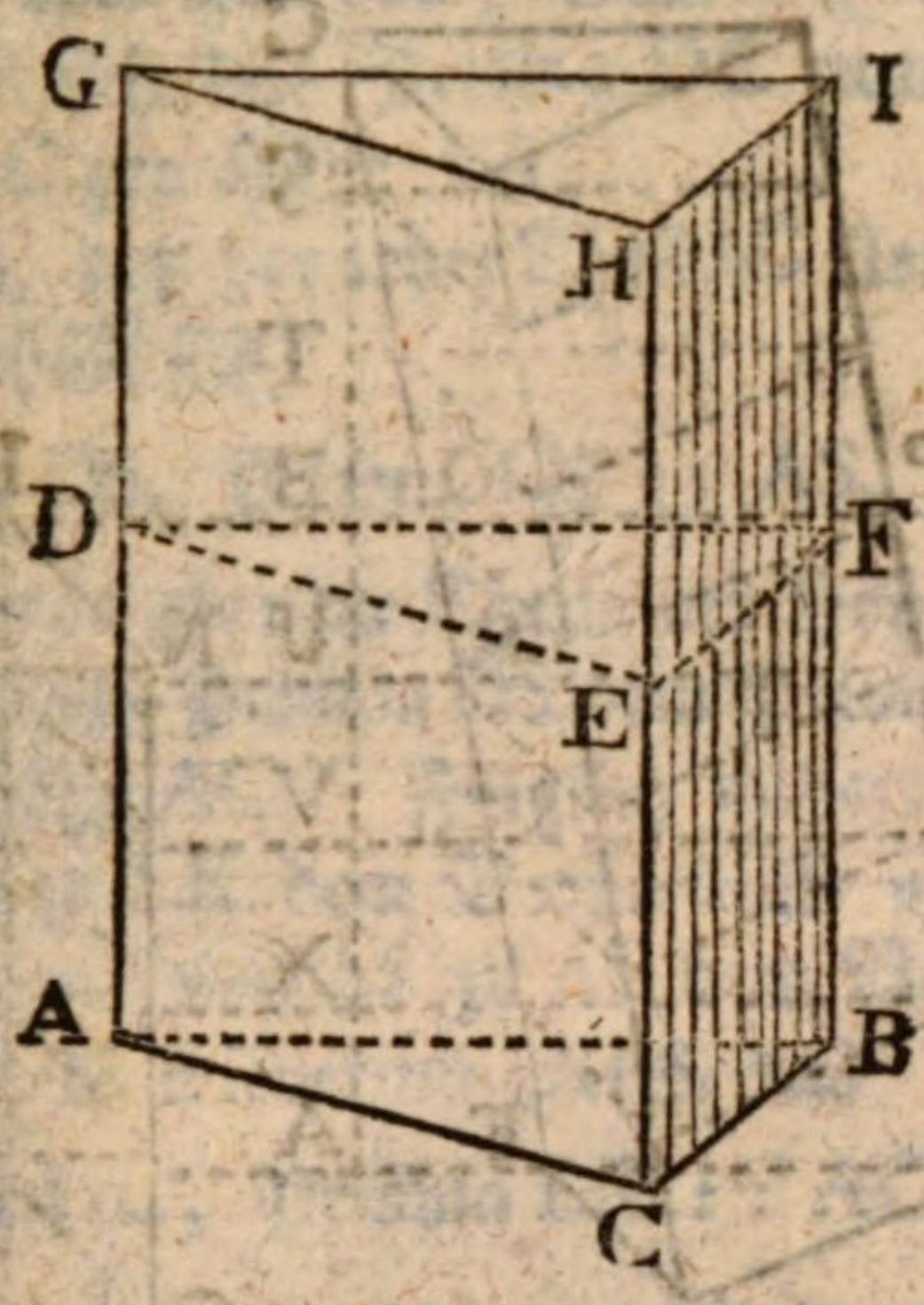
§. 27.

Prismen oder Parallelepipeden von gleicher Höhe mit ähnlichen Grundflächen, verhalten sich wie die Quadrate der homologen Seiten der Grundflächen.

Denn sie verhalten sich wie die Grundflächen (§. 25.) und diese, wenn sie ähnlich sind, wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

§. 28.

Wenn ein Prisma vermittelst einer Ebne geschnitten wird, die mit den Grundflächen parallel ist, so ist der Durchschnitt mit den Grundflächen ähnlichgleich.



Es sey ein dreyeckiges Prisma vermittelst der Ebne DEF geschnitten die mit den Grundflächen ACB und GHI parallel ist.

Weil die Parallel-Ebnen ACB und DEF von der Ebne CI geschnitten werden, so sind die Durchschnitte EF und CB parallel. (VII. §. 26.) Es sind aber auch CE und BF parallel. (§. 7.) Also ist EB ein Parallelogramm, und EF = CB.

Eben so wird bewiesen, daß DF = AB.

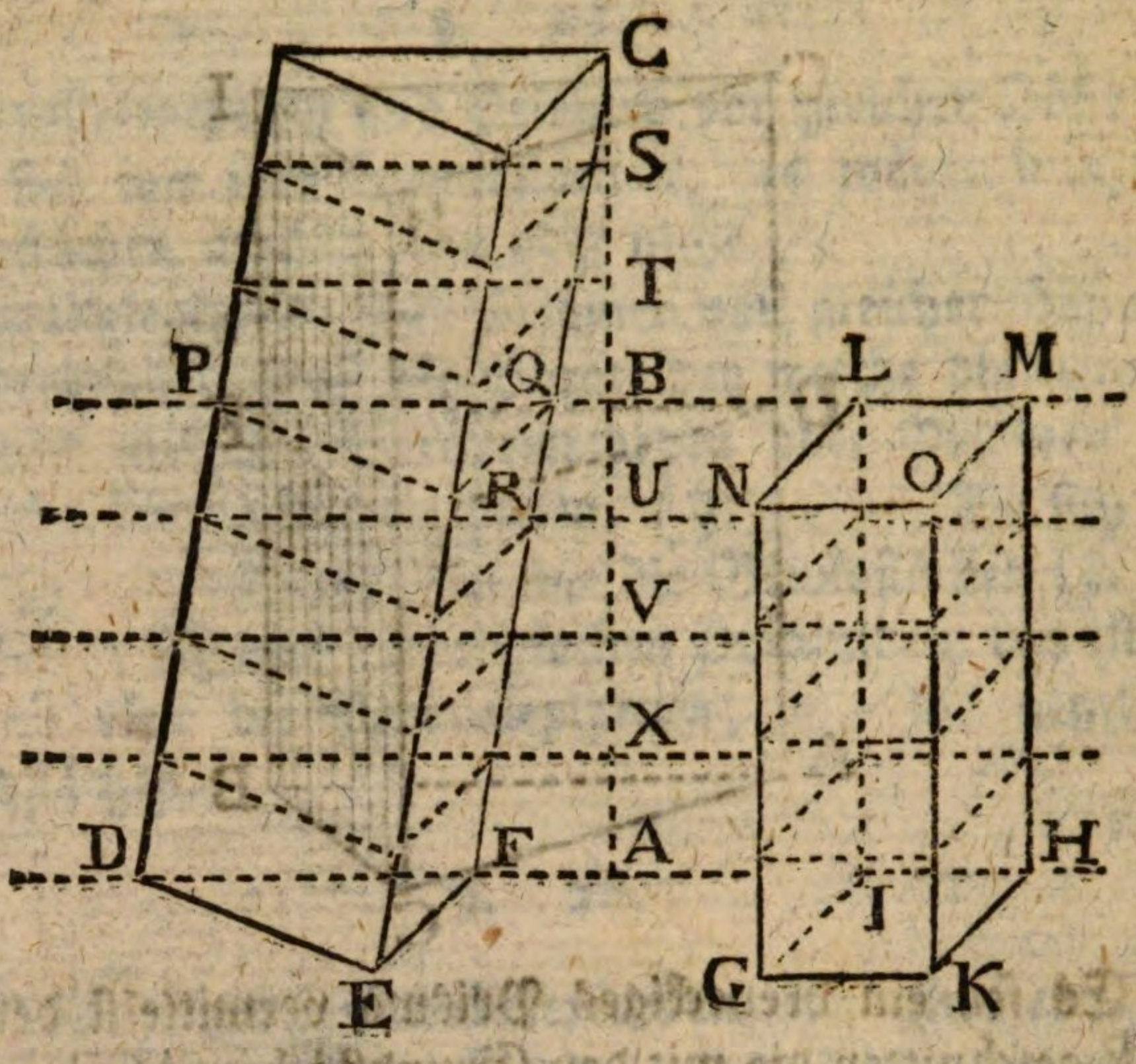
Ferner, weil CB mit EF und AB mit DF parallel sind, so ist ∠CBA = ∠EFD. (VII. §. 19.) Folglich △ACB ≅ △DEF.

Ist die Grundfläche ein Viereck oder ein anderes Polygon, so wird allemal auf die nemliche Art bewiesen, daß jede Seite jeder Seite, und jeder Winkel jedem Winkel gleich sey, und daß also beyde Figuren ähnlichgleich sind.

§. 29.

Prismen, Parallelepipeden und Pyramiden von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sey die Grundfläche *DEF* gleich am Flächen-Inhalte der Grundfläche GIHK.

Die Höhe des größeren Prisma sey AC, und des kleineren AB. Theile AB in einige gleiche Theile, als AX, XV, VU, UB. Durch X, V, U, B stelle dir Flächen vor, die mit den Grundflächen parallel sind, und beyde Prismen schneiden; so sind die abgeschnittenen Stücke sowohl des einen als des anderen Körpers alle untereinander gleich, weil sie alle gleiche Grundflächen (§. 28.) und gleiche Höhe haben (§. 26). Und es ist auch der Theil DEFPQR, aus demselben Grunde, dem Körper LOHG gleich.

Auf BC trage gleiche Theile BT, TS, SC, die auch den vorigen Theilen BU, UV etc. gleich seyn, und ziehe durch T, S, C parallele Ebnen mit den vorigen, so wird das Prisma CD in lauter gleiche Stücke geschnitten: deren sind so viel als die Höhe AC gleiche Theile hat, und der Theil QD enthält so viel als AB gleiche Theile hat. Also entstehet AC aus AB wie der Körper DC aus dem Körper DQ, oder das Prisma DC verhält sich zum Prisma DQ

wie

wie AC zu AB, oder weil das Prisma DQ = dem Prisma LK, so verhält sich das Prisma DC zum Prisma LK, wie die Höhe AC zur Höhe A*B*.

Trift es sich, daß der letzte Theil SC kleiner ist als die übrigen, so verhält sich

Prisma DS, Prisma LK :: AS, A*B*.

Je kleiner man aber die Theile der Höhe macht, desto mehr nähert sich das Prisma DS dem Prisma DC und die Höhe AS der Höhe AC. Folglich nähert sich das Verhältniß von DS zu LK dem Verhältuisse von DC zu LK, und das Verhältniß von AS zu AB dem Verhältnisse von AC zu AB, also ist wiederum (III §. 24)

Prisma DC, Prisma LK :: AC, AB.

Obgleich in der Figur das eine Prisma nur dreyeckigt und das andere viereckigt ist, so kann man leicht einsehen, daß der Beweis auf alle mögliche vieleckigte Prismen anwendbar ist, wenn nur die Grundflächen gleich groß sind.

Parallelepipeden sind viereckigte Prismen, folglich gilt der Satz auch vou Parallelepipeden.

Pyramiden sind die dritten Theile der Prismen die mit ihnen gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben. Wie sich also die Prismen verhalten, so verhalten sich auch ihre dritten Theile, das ist, die Prismen von gleicher Grnndfläche.

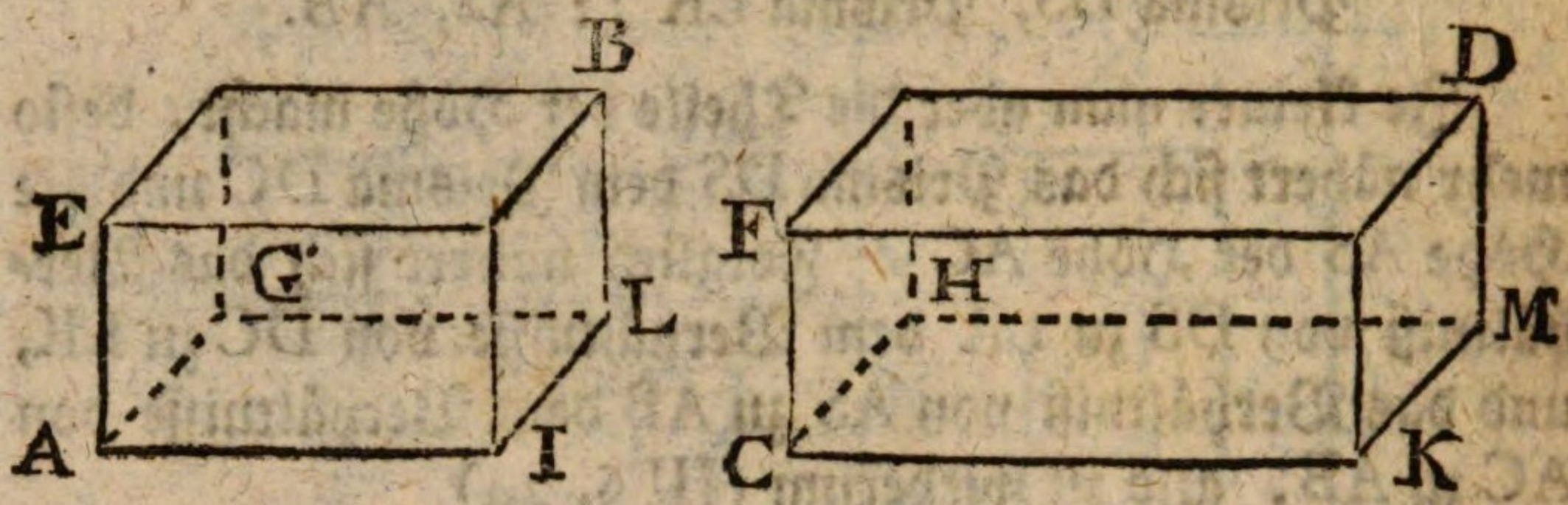
§. 30.

Die Länge eines Parallelepipedons ist die eine Seite seiner Grundfläche. Die Breite ist die gerade Linie welche auf der Länge in der Grundfläche senkrecht gezogen wird, und bis zur gegenüberstehenden Seite der Grundfläche gehet; es ist die nemliche Linie, welche im I. Hauptstücke die Höhe des Parallelogramms genannt worden. Die Höhe des Parallelepipedons ist eine gerade Linie welche

der Grundfläche senkrecht stehet uud bis zur obern Fläche gehet.

§. 31.

Zwey Parallelepipeden von gleicher Höhe und Breite verhalten sich wie ihre Längen.



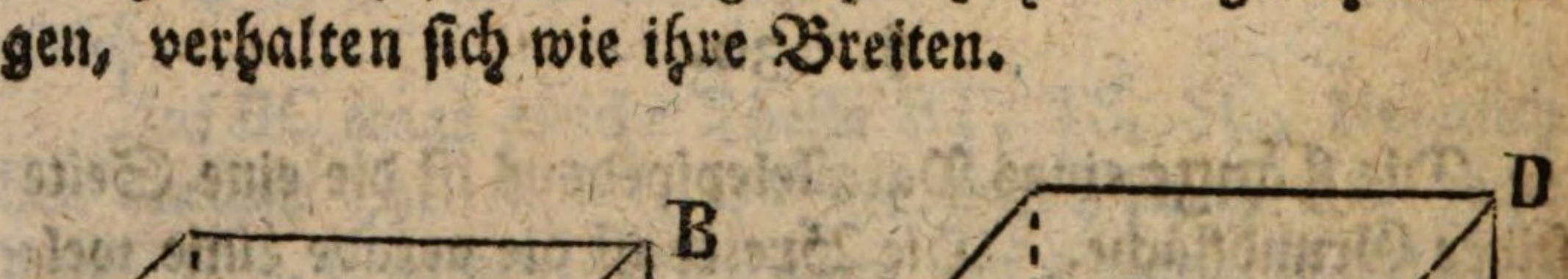
Es seyen zwey Parallelepipeden AB und CD. Wir wollen der Kürze halben annehmen, daß die Ebnen senkrecht auf einander stehen.

Es sey die Höhe AE gleich der Höhe CF, die Breite AG gleich der Breite CH. Hingegen die Längen AI und CK seyen ungleich.

Weil beyde Körper gleiche Höhe haben, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen AL und CM (§. 25.), und da diese Grundflächen Parallelogramme von gleicher Breite AG = CH sind, so verhalten sie sich wie ihre Längen AI und CK.

§. 32.

Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleichen Längen, verhalten sich wie ihre Breiten.



Wenn

Wenn die Höhen AE und CF gleich sind, so verhalten sich die Parallelepipeden AB und CD wie ihre Grundflächen AL und CM. (§. 25.) Haben nun diese gleiche Längen AI und CK, so verhalten sie sich wie ihre Breiten AG und CH.

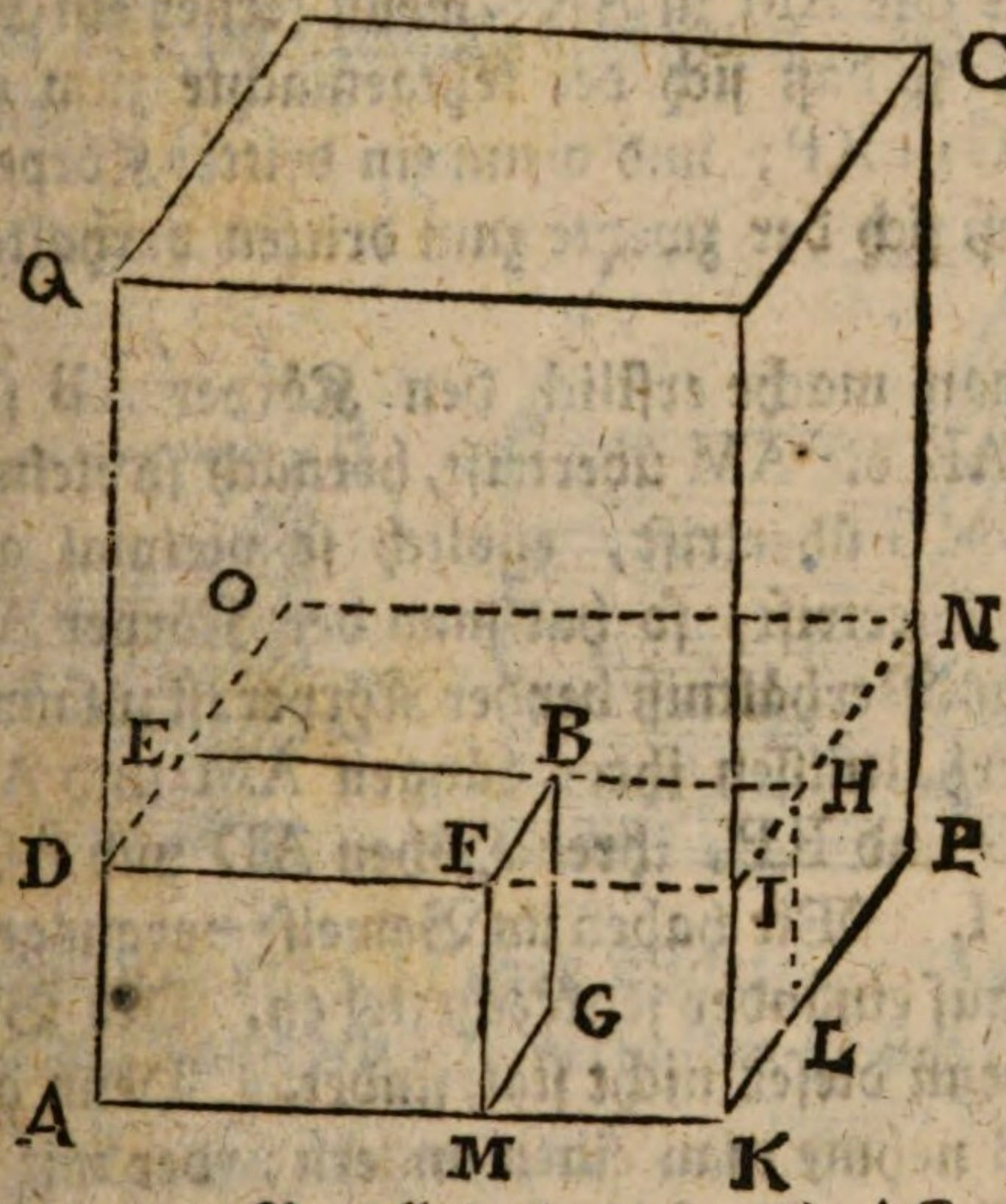
§. 33.

Parallelepipeden von gleicher Länge und Breite verhalten sich wie ihre Höhen.

Denn da sie gleiche Breite und Länge haben, so sind die Grundflächen gleich. (IV §. 25) Also verhalten sich die Körper wie die Höhen (§. 29).

§. 34.

Zwey Parallelepipeden stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Längen, Breiten und Höhen, oder ihrer drey Ausmessungen.



Es seyen zwey Parallelepipeden AB, AC. Wir stellen uns vor, das größere sey hohl und das kleinere sey darin gestellet, so daß die Winkel in A an einander passen. Wir setzen hierbey voraus, daß die Flächen auf einander senkrecht stehen.

Verlängere EB und DF bis sie die Ebne KC in H und I treffen, und vollende das Parallelepipedon AH oder DL.

So verhält sich der Körper AB zum Körper AH wie AM zu AK, weil die Höhe AD und Breite KL in beyden gleich ist (§. 31).

Verlängere IH bis in N, und vollende das Parallelepipedon AN oder OK.

So verhält sich der Körper AN zum vorigen Körper AH wie KL (= MG) zu KP, weil die Länge AK und die Höhe AD gemein sind. (§. 32.)

Endlich verhält sich der Körper AN zum gegebenen Körper AC, wie AD zu AQ, weil die Länge AK und die Breite KP beyden gemein sind (§. 33).

Also entstehet der Körper AC aus dem Körper AB, wenn erstlich ein Körper gemacht wird, so daß sich *AB* zu ihm verhalte wie AM zu AK; wenn ferner ein Körper gemacht wird, so daß sich der letztgemachte zum neuen verhalte wie MG zu KP; und wenn ein dritter Körper gemacht wird, so daß sich der zweyte zum dritten verhalte wie AD zu AQ.

Oder man mache erstlich den Körper AB so vielmal größer, als AK die AM übertrift, hernach so vielmal größer als KP die MG übertrift, endlich so vielmal größer als AQ die AD übertrift, so hat man den Körper AC.

Kurz, das Verhältniß beyder Körper ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen ihrer Längen AM und AK, ihrer Breiten MG und KP, ihrer Höhen AD und AQ.

Zusatz I. Wir haben im Beweise vorausgesetzt, daß die Flächen auf einander senkrecht stehen. Der Beweis gilt aber auch wenn dieses nicht statt findet. Denn anstatt des Körpers AB nehme man einen andern, der mit ihm gleiche Länge, Breite und Höhe hat, aber worinn die Neigung der Flächen anders ist. Da dieser neue Körper mit dem AB gleiche Höhe hat, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen, und da diese gleiche Länge nnd Breite haben, so sind sie gleich, also ist der neue Körper dem *AB*

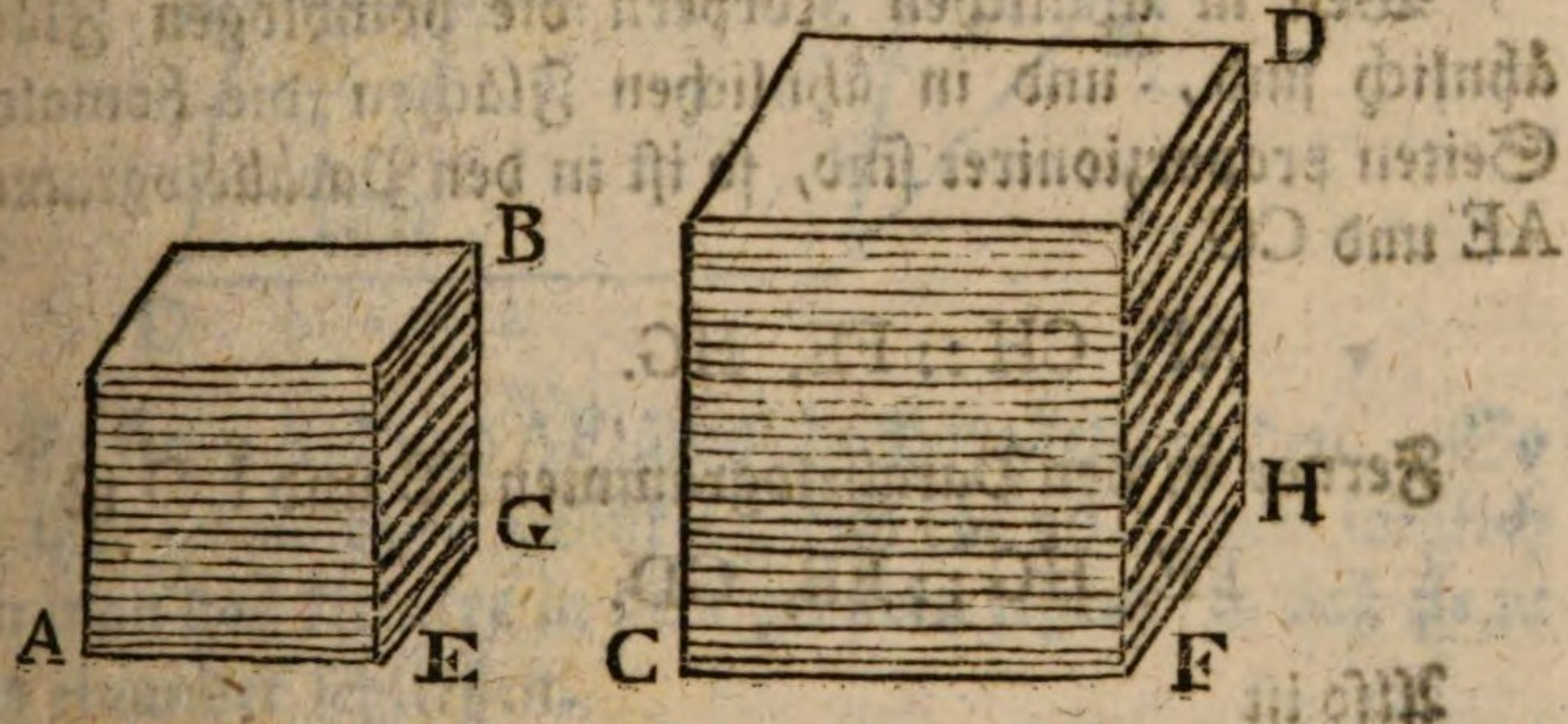
gleich, und stehet folglich im nemlichen Verhältnisse mit AC.

Zusatz II. Wenn in zwey Parallelepipeden die eine Dimension gleich ist, so verhalten sie sich noch wie die beyden übrigen. Z. E. wenn die Längen gleich sind, so ist das Verhältniß nur noch aus den Breiten und Höhen zusammengesetzt.

Zusatz III. Sind zwey Dimensionen gleich, so folget wiederum, was schon vorher bewiesen ist, daß die Körper sich wie die dritten Dimensionen verhalten. (§. 31. 32. 33.) Und ist auch diese dritte Dimension gleich, so folgt endlich was schon im ersten Zusatze bewiesen worden, nemlich daß beyde Körper gleich sind.

§. 35.

Würfel sind im dreyfach erhöheten Verhältnisse ihrer Flächenseiten.



Es seyen AB und CD zwey Würfel. Betrachtet man sie als Parallelepipeden, so verhalten sie sich (§. 34)

wie die Längen AE und CF
wie die Breiten EG und FH
wie die Höhen BG und HD.

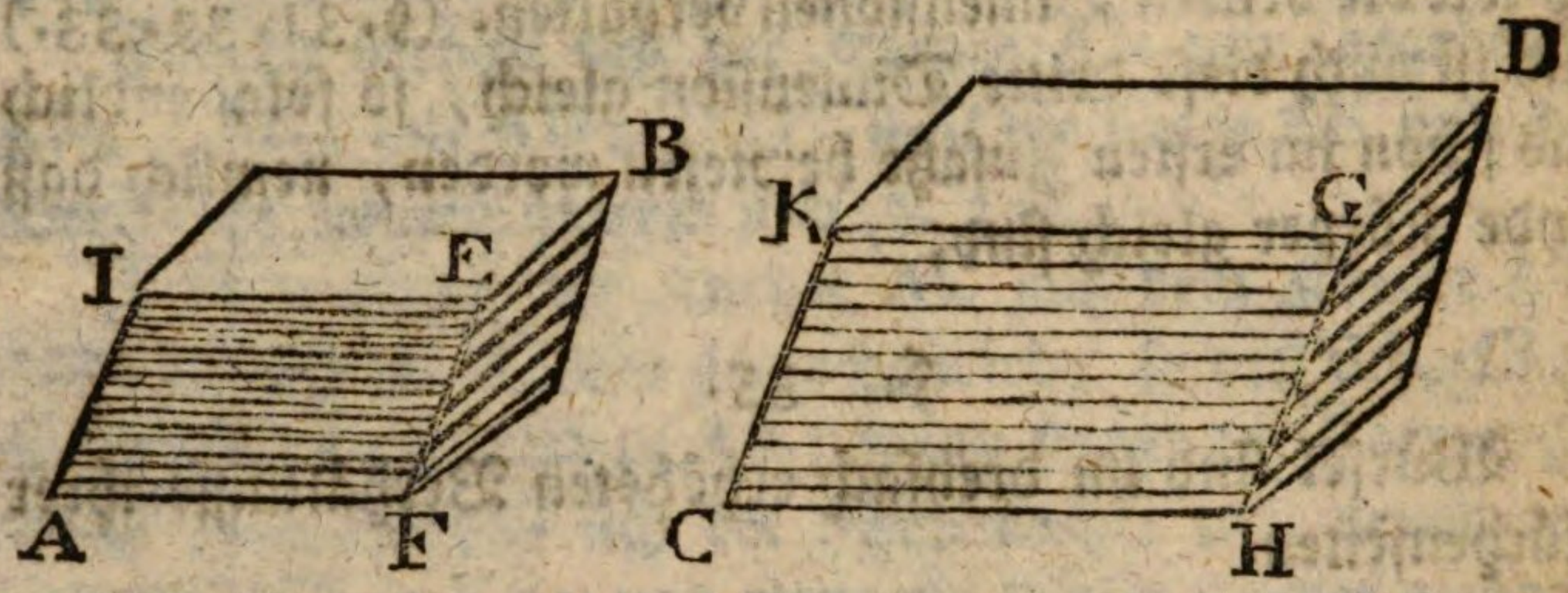
Weil aber im Würfel Länge, Breite und Höhe gleich sind, so verhalten sich beyde Würfel dreymal wie AE zu CF,

oder

oder ihr Verhältniß ist aus drey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt, deren jedes dem Verhältnisse zwischen AE und CF gleich ist, oder sie sind in dreyfach erhöhetem Verhältnisse ihre Flächenseiten AE und CF.

§. 36.

Wenn zwey Parallelepipeden ähnlich sind, so haben ihre homologe Flächenseiten alle einerley Verhältniß, auch sind die homologen körperlichen Winkel gleich.



Weil in ähnlichen Körpern die homologen Flächen ähnlich sind, und in ähnlichen Flächen die homologen Seiten proporzioniret sind, so ist in den Parallelogrammen AE und CG

AF, CH :: FE, HG.

Ferner in den Parallelogrammen FB und HD ist

FE, HG :: EB, GD.

Also ist

AF, CH :: FE, HG :: EB, GD.

Weil in ähnlichen Ebnen die homologen Winkel gleich sind, so ist

$\angle IEB = \angle KGD$

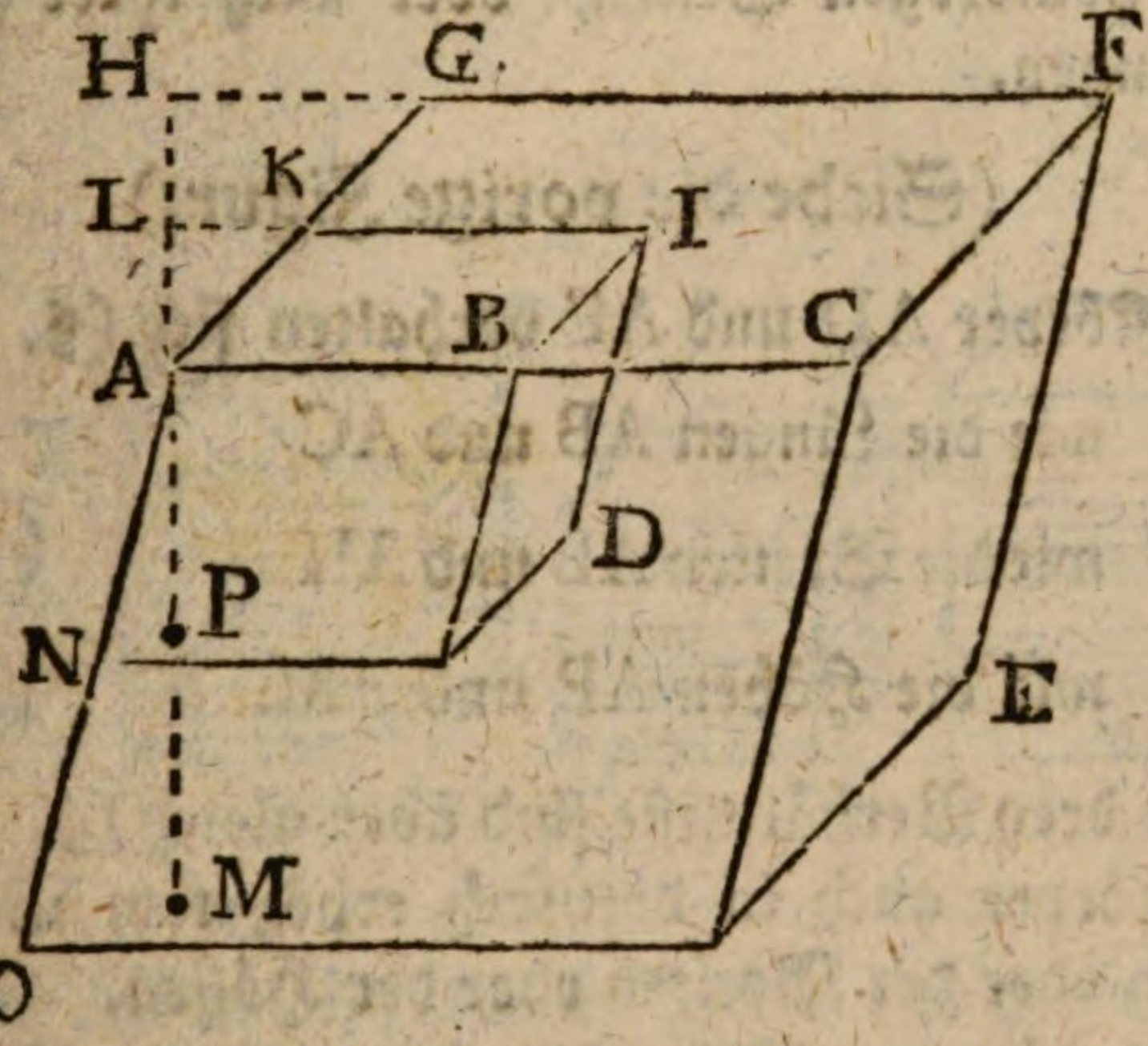
$\angle IEF = \angle KGH$

$\angle BEF = \angle DGH.$

Da nun die Seiten der körperlichen Winkel in E und in G aus drey beyderseits gleichen ebnen Winkeln bestehen, so lassen sich solche Winkel nicht auf mehr als einer Art zusammenfügen, und beyde körperliche Winkel sind gleich. Eben so läßt sich beweisen, daß die übrigen Winkel gleich sind.

§. 37.

In ähnlichen Parallelepipeden verhalten sich die Längen, die Breiten, die Höhen, eben so wie die homologen Flächenseiten.



Es seyen AD und AE ähnliche Parallelepipeden. So sind ihre homologen Winkel gleich (§. 36.) und folglich kann man das kleinere in dem größern legen, so daß sie in A an einander schließen.

Die Längen AB und AC verhalten sich wie alle homologen Flächenseiten beyder Körper (§. 36).

Verlängere FG und IK. Ziehe AH senkrecht auf FH, so sind FH, IL parallel, weil beyde mit AC parallel sind. Also ist im Dreyeck AHG (III §. 27)

AL, AH :: AK, AG

das ist, die Breiten beyder Körper verhalten sich wie ihre homologen Seiten AK und AG.

Ziehe

Ziehe AM senkrecht auf die Grundfläche des größeren Körpers, und bilde dir eine Ebne ein, die durch die Grundfläche ND des kleinern Körpers gehet, so werden die Linien AO und AM von drey parallelen Ebnen AI, ND und OE geschnitten, also ist (VII §. 27) AP, AM :: AN, AO, das ist die Höhen AP und AM verhalten sich wiederum wie die homologen Seiten AN und AO.

§. 38.

Aehnliche Parallelepipeden verhalten sich wie die Würfel ihrer homologen Seiten, oder auch ihrer homologen Ausmessungen.

(Siehe die vorige Figur.)

Die Körper AD und AE verhalten sich (§. 34)
wie die Längen AB und AC
wie die Breiten AL und AH
wie die Höhen AP und AM.

Diese drey Verhältnisse sind aber gleich (§. 37). Also sind die Körper auch in dreyfach erhöhetem Verhältnisse der Längen oder der Breiten oder der Höhen.

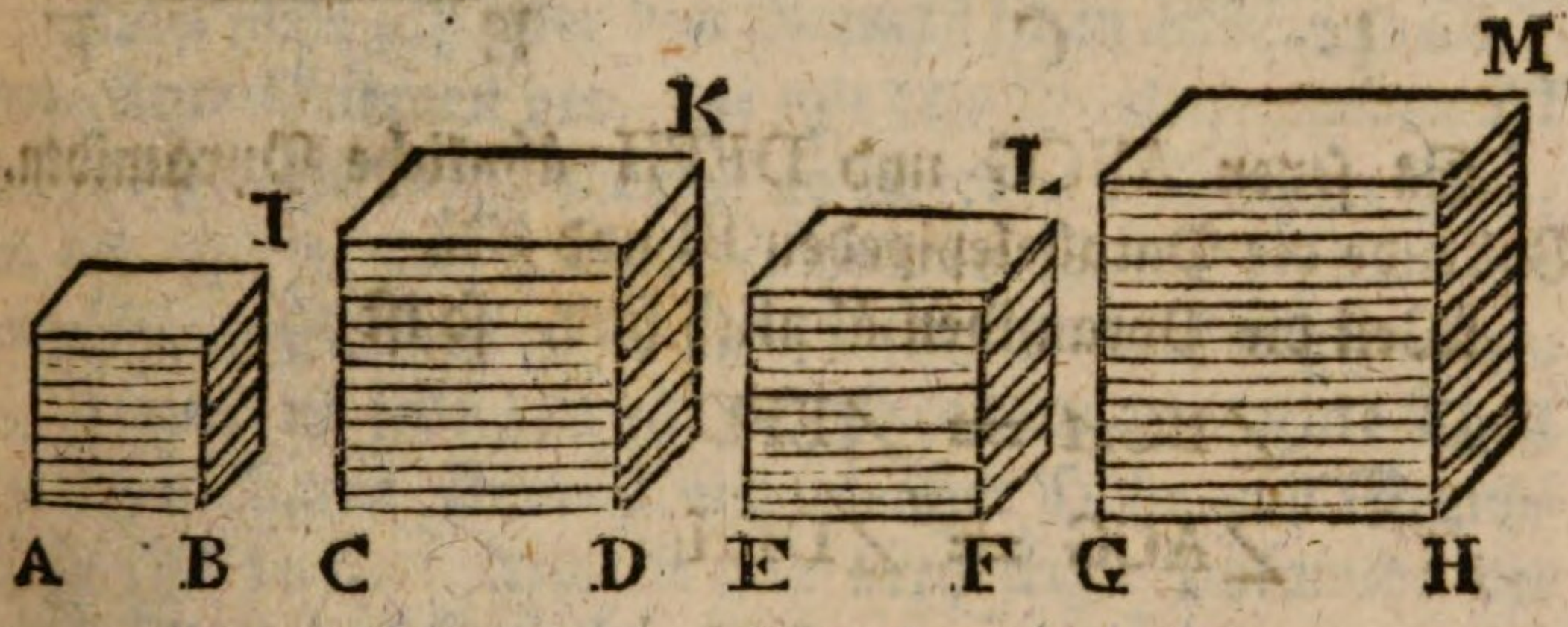
Mache ich zwey Würfel, einen mit der Flächenseite AB, nnd den andern mit der Flächenseite AC, so sind beyde Würfel in dreyfach erhöhtem Verhältnisse der AB nnd AC, also verhalten sich solche Würfel eben so wie beyde Parallelepipeden. Eben so werden sich die Würfel von AL und AH oder von AP und AM, wie beyde Parallelepipeden verhalten.

Ferner weil sich die Längen, Breiten und Höhen beyder Körper eben so verhalten, als die homologen Seiten, so verhalten sich auch beyde Körper
wie AB zu AC
wie AK zu AG
wie AN zu AO

oder, weil diese Verhältnisse gleich sind, so verhalten sich beyde Körper dreymal wie AB zu AC, oder dreymal wie AK zu AG, oder dreymal wie AN zu AO, das ist, wie die Würfel von AB und AC, oder von AK und AG, oder von AN zu AO.

§. 39.

Wenn vier gerade Linien proporzionirt sind, so sind auch die Würfel proporzioniret, deren Flächenseiten sie sind.



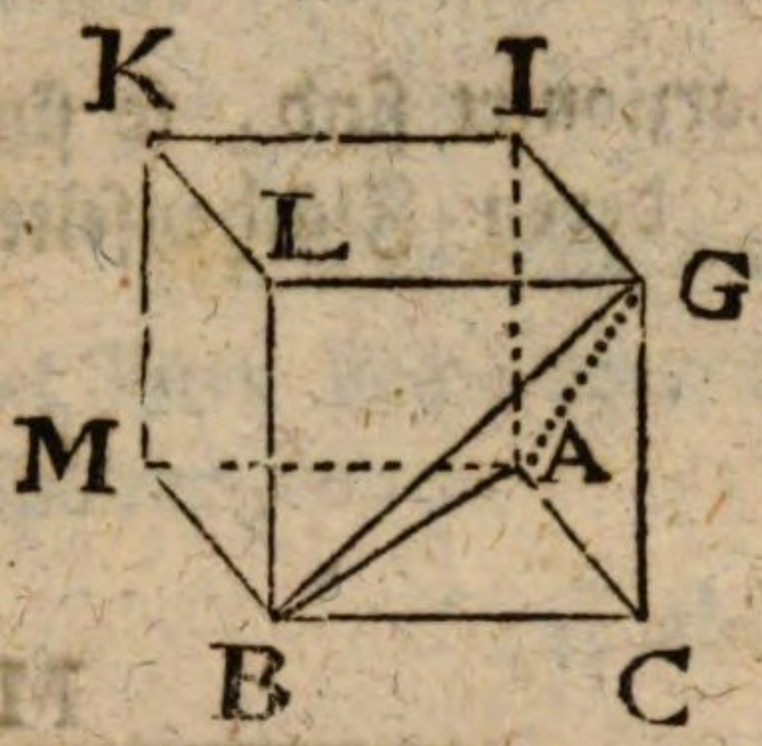
Es sey AB zu CD, wie EF zu GH: so heißt dieses, das Verhältniß zwischen AB und CD ist gleich dem Verhältnisse zwischen EF und GH. Gleiche Verhältnisse können als das nemliche angesehen werden. Wird nun das nemliche Verhältniß dreymal erhöhet, so kann dieses nur auf einerley Art geschehen. Wenn also zwey gleiche Verhältnisse dreymal erhöhet werden, so entstehen wiederum gleiche Verhältnisse. Die dreymal erhöheten Verhältnisse der Linien sind aber die Verhältnisse ihrer Würfel. (§. 35.) Also ist das Verhältniß der Würfel AI und CK gleich dem Verhältnisse der Würfel EL und GM, oder es ist

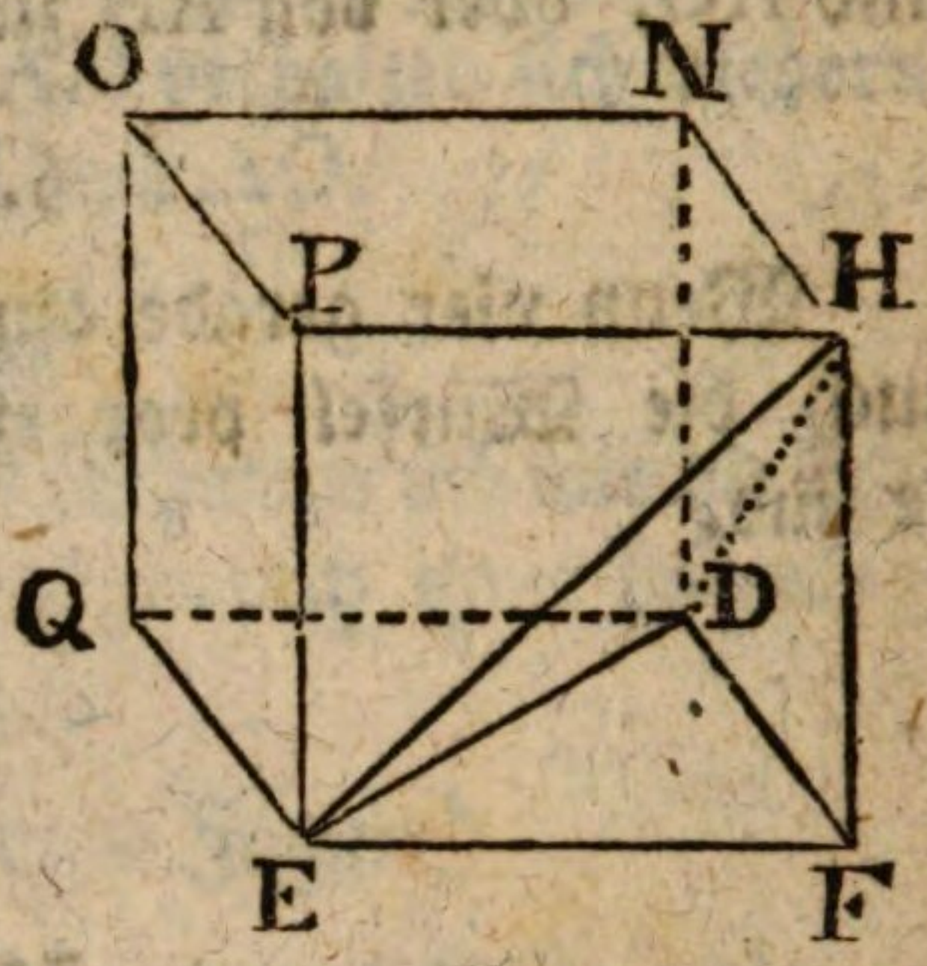
AI, CK :: EL, GM.

§. 40.

§. 40.

Aehnliche dreyeckigte Pyramiden verhalten sich wie die Würfel ihrer gleichliegenden Flächenseiten.





Es seyen ABCG und DEFH ähnliche Pyramiden.
Vollende die Parallelepipeden BI und EN.
Weil die Pyramiden ähnlich sind, so ist

$$\angle BCA = \angle EFD$$

$$\angle ACG = \angle DFH$$

$$\angle BCG = \angle EFH$$

ferner ist

$$BC, EF :: AC, DF :: CG, HF.$$

Da also in den Parallelogrammen CM und FQ

$$BC, EF :: AC, DF$$

und $\angle BCA = \angle EFD$,

so ist $\square CM \backsim \square FQ$.

Da in den Parallelogrammen CI und FN,

$$AC, DF :: CG, FH$$

und $\angle ACG = \angle DFH$,

so ist $\square CI \backsim \square FN$.

Da

Da in den Parallelogrammen CL und FP

BC, EF :: CG, FH

und da $\angle BCG = \angle EFH$,

so ist $\square CL \sim \square FP$.

Da also in beyden Parallelepipeden drey Ebnen ähnlich sind, so sind auch die gegenüberstehenden ähnlich, weil sie mit ihnen identisch sind. Also sind beyde Parallelepipeden ähnlich (§. 3).

Folglich verhält sich das Parallelepipedon *B*I zum Parallelepipedon EN, wie der Würfel von BC zum Würfel von EF (§. 38).

Man stelle sich über den Grundflächen *A*BC und DEF dreyeckigte Prismen vor, die mit den Parallelepipeden *B*I und EN gleiche Höhe haben, so ist jedes dreyeckigte Prisma die Hälfte des Parallelepipedons (§. 25), weil die dreyeckigten Grundflächen die Hälften der viereckigten sind.

Ferner ist jede dreyeckigte Pyramide der dritte Theil des dreyeckigten Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche (§. 22). Also ist jede dreyeckigte Pyramide der sechste Theil des Parallelepipedons.

So wie sich also die Parallelepipeden verhalten, so verhalten sich auch ihre Sechstheile, das ist die Prismen.

Da sich nun die Parallelepipeden verhalten wie die Würfel von BC und EF (§. 38), so verhalten sich auch die Prismen, wie die Würfel von BC und EF.

Anstatt der BC und EF könnte man auch die Flächenseiten AC und DF, oder GC und HF nehmen.

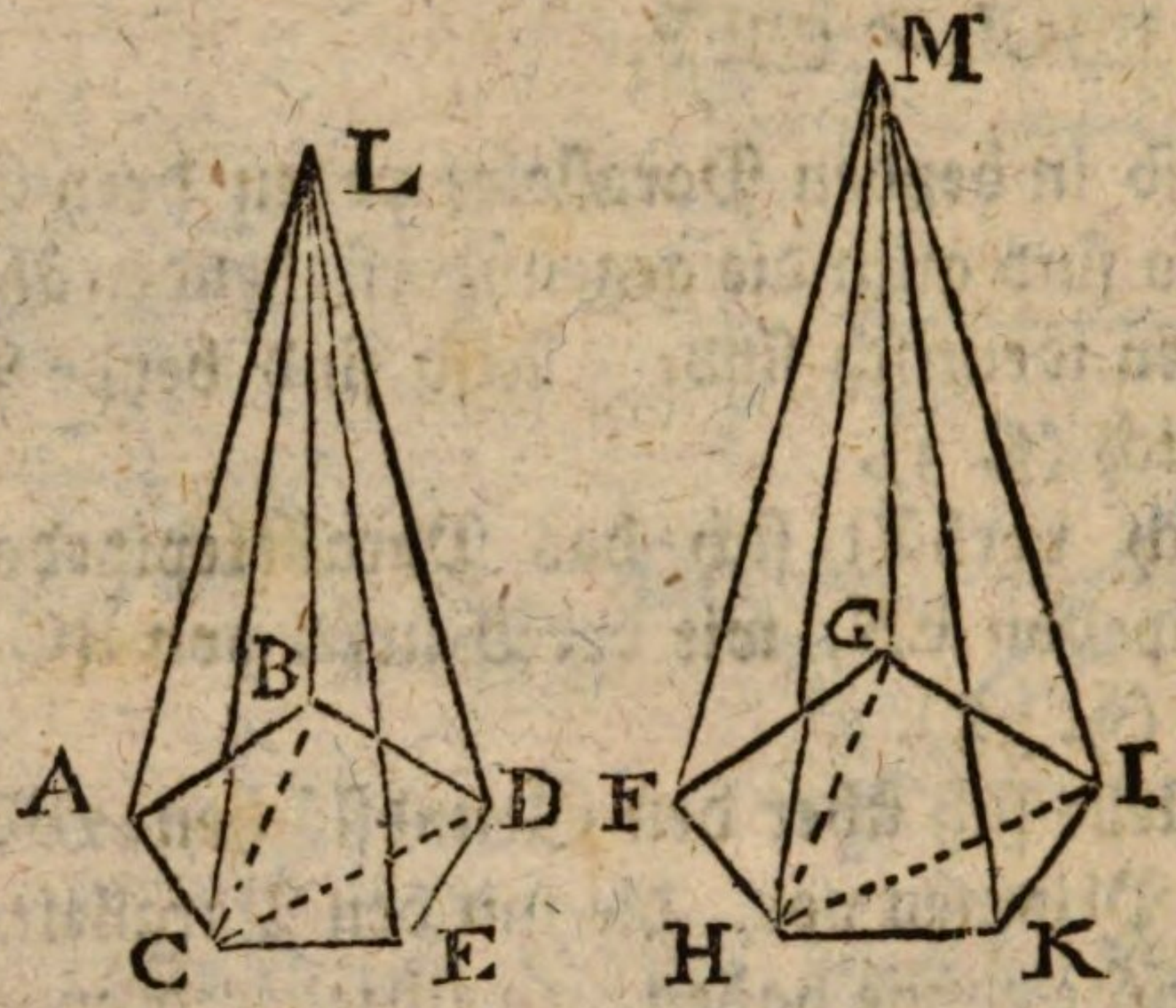
Ferner auch die Flächenseiten BG und EH, oder BA und ED, oder AG und DH, die den Pyramiden allein zugehören. Denn (§. 3) weil

BG, GH :: BC, EF

so ist Würf. BG, Würf. GH :: Würf. BC, Würf. EF, und so mit den übrigen Flächenseiten.

§. 41.

Aehnliche vieleckigte Pyramiden verhalten sich wie die Würfel ihrer ähnlichliegenden Flächenseiten.



Es seyen L und M zwey ähnliche fünfeckigte Pyramiden. Theile jede Grundfläche in 3 ähnliche Dreyecke so daß

$$\triangle ABC \sim \triangle FGH$$

$$\triangle CBD \sim \triangle HGI$$

$$\triangle CDE \sim \triangle HIK$$

und über jedem Dreyecke stelle dir eine Pyramide vor, die ihre Spitze in L oder in M habe, so sind die homologen dreyeckigten Pyramiden beyderseits ähnlich. Es ist z. E. die Pyramide *A*BCL der Pyramide FGHM ähnlich. Denn es ist $\triangle ABC \sim \triangle FGH$. Es ist auch, wegen Aehnlichkeit der ganzen Pyramiden $\triangle ALC \sim \triangle FMH$, $\triangle ALB \sim \triangle AMG$.

Folglich ist CL, HM :: AL, FM

BL, GM :: AL, FM

daher CL, HM :: BL, GM

es ist auch CB, HG :: AC, FH :: CL, HM

also CL, HM :: BL, GM :: *CB*, HG

es ist also auch △CLB ∽ △HMG. Folglich sind die Pyramiden ABCL und FGHM ähnlich.

Eben so wird bewiesen, daß die übrigen dreyeckigten Pyramiden beyderseits ähnlich sind.

Also ist (§. 40)

Pyr. ABCL, Pyr. FGHM :: Würf. AB, Würf. FG.

Pyr. CBDL, Pyr. HGIM :: Würf. BD, Würf. GI

Pyr. CDEL, Pyr. HIKM :: Würf. DE, Würf. IK.

Es ist aber

AB, FG :: BD, GI :: DE, IK

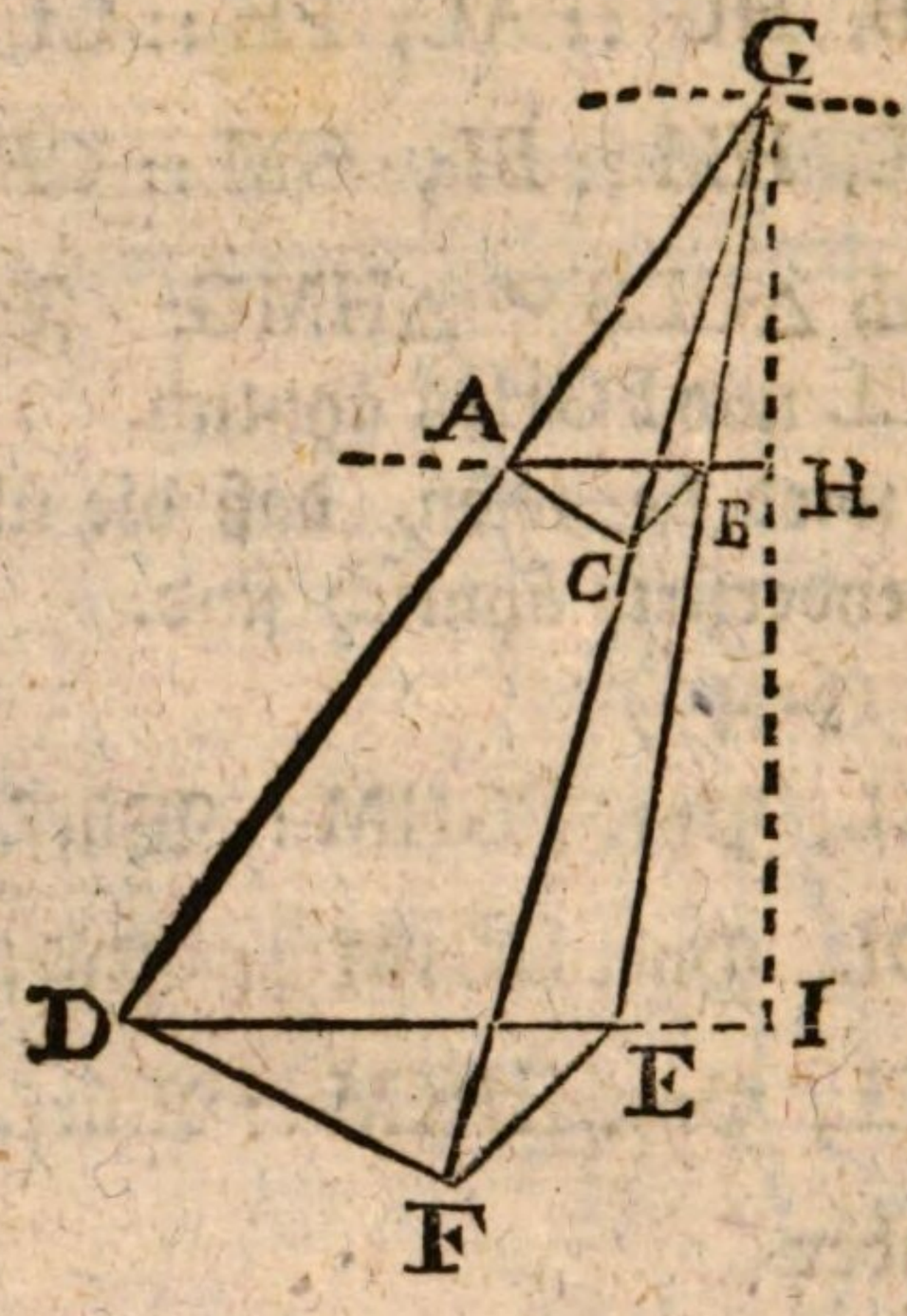
also W. *AB*, W. FG :: W. BD, W. GI :: W. DE, W. IK.

Also verhalten sich alle dreyeckigte Pyramiden, wie z. E. der Würfel von *AB* zum Würfel von FG. Folglich verhalten sich eben so ihre Summen oder die ganzen Pyramiden.

§. 42.

Die Höhen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie ihre homologe Flächenseiten.

(Siehe die folgende Figur.)



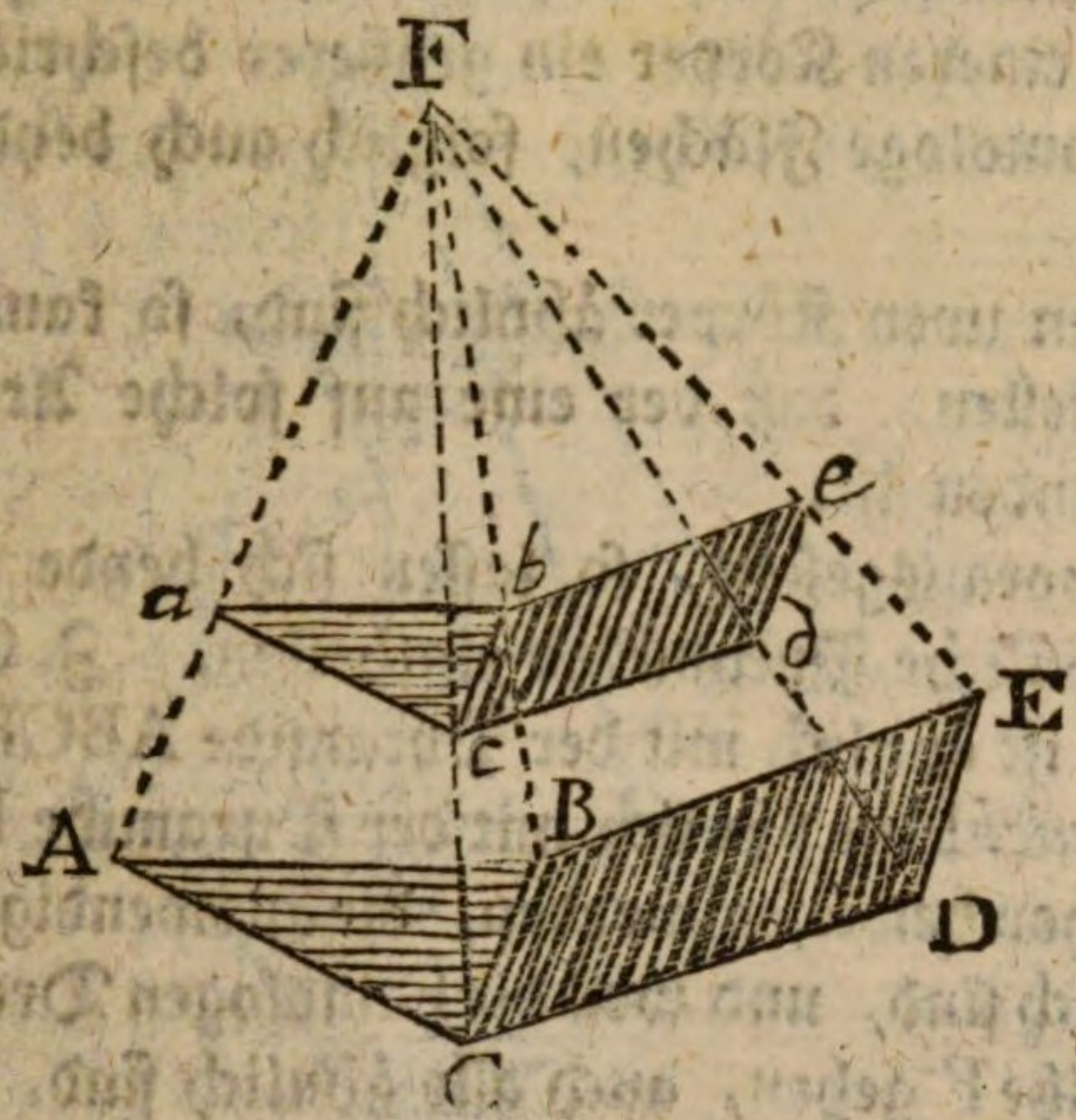
Es sey die dreyeckigte Pyramide DEFG in ABC durch eine Ebne geschnitten, die mit der Grundfiache parallel sey, so ist △ABC ∽ DFE (§. 14). Es ist auch CB parallel mit FE (VII §. 26), folglich △CG*B* ∽ △FGE. Eben so wird bewiesen, daß △AGC ∽ △DGF, △AGB ∽ △DGE.

Also ist die Pyramide ABCG der Pyramide DEFG ähnlich, und man kann sich allemal vorstellen, wenn zwey Pyramiden ähnlich sind, daß die kleinern aus der größeren, vermittelst eines solchen Schnittes, entstanden ist.

Man stelle sich ferner durch G eine dritte Ebne vor, die mit den Ebnen DI und AH parallel sey. So werden die Linien GI, GE u. s. f. von drey parallelen Ebnen geschnitten. Also ist GH, GI :: GB :: GE : : GC, GF :: GA, GD :: BC, EF :: FD, CA :: ED, BA. Hier sind GH und GI die Höhen beyder Pyramiden.

§. 43.

Aehnliche vielwinkliche Körper verhalten sich wie die Würfel ihrer homologen Flächenseiten.



Es seyen *abc* und *bedcb* zwey Flächen eines Körpers. Nimm in dem Körper einen willkürlichen Punkt F. Ziehe durch F und durch die Punkte *a*, *b*, *c*, *d*, *e* unbestimmte Linien. Bestimme willkürlich die Länge der einen, als FA.

Mache F*a*, FA :: F*c*, FC :: F*b*, FB :: F*d*, FD :: F*e*, FE.

Weil in den Dreyecken F*ab* und FAB, der Winkel in F gemein ist, und F*a*, FA :: F*b*, FB, so ist auch (IV §. 7)

ab, AB :: F*a*, FA.

Aus der nemlichen Ursache ist

cb, CB :: F*b*, FB :: F*a*, FA

ac, AC :: F*a*, FA.

Also ist *ab*, AB :: *cb*, CB :: *ac*, AC

das heißt, die Flächen *abc* und ABC sind ähnlich.

Theile die Flächen *bedcb* und BEDCB in Dreyecke *bdc*, *bde*, BDC, BDE, so wird wie vorher bewiesen, daß solche Dreyecke, und folglich die Flächen selbst, ähnlich sind.

Stellet man sich vor, daß auf die nemliche Art um den ganzen kleineren Körper ein größerer beschrieben wird, so sind alle homologe Flächen, folglich auch beyde Körper, ähnlich.

Und wenn zwey Körper ähnlich sind, so kann man sich allemal vorstellen, daß der eine auf solche Art aus dem andern entstanden ist.

Dieses vorausgesetzt, so lassen sich beyde Körper in gleich viel ähnliche Pyramiden eintheilen. Z. E. die Pyramide *abc*F ist ähnlich mit der Pyramide ABCF, und die Pyramide *bedcb*F ist ähnlich mit der Pyramide BEDCBF, weil, wie schon bewiesen worden, die auswendigen Grundflächen ähnlich sind, und weil die homologen Dreyecke, die nach die Spitze F gehen, auch alle ähnlich sind.

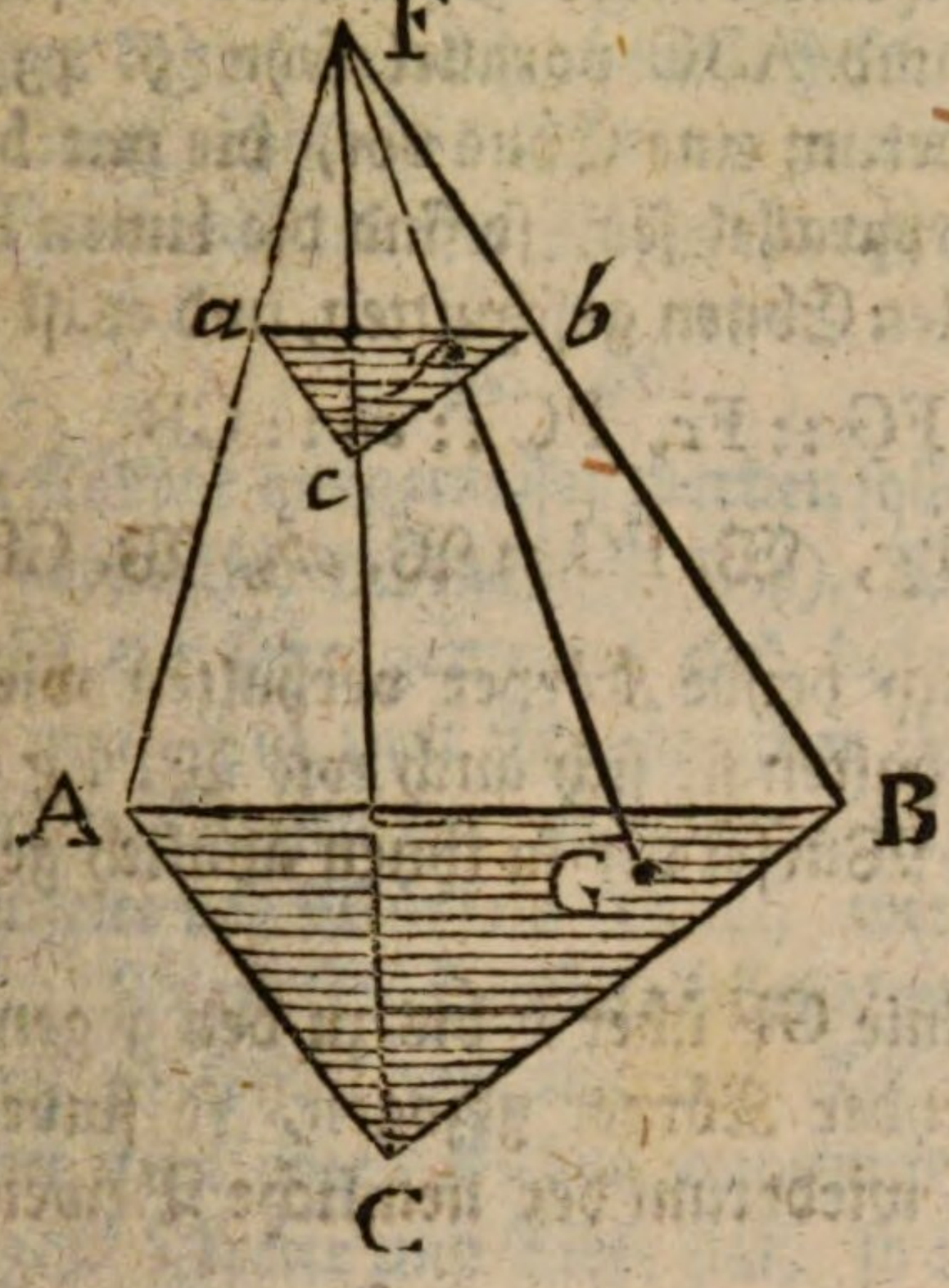
Die Pyramide *abc*F verhält sich zur Pyramide ABCF wie der Würfel von *ac* zum Würfel von AC. Die Pyramide *bedcb*F verhält sich zur Pyramide BEDCBF wie der Würfel von *cd* zum Würfel von CD. Und weil *cd*, CD::*ac*, AC, folglich W. *cd*, W. CD::W. *ac*, W. AC, so verhalten sich auch beyde letztgedachte Pyramiden, wie die Würfel von *ac* zu AC.

Und so läßt sich beweisen, daß alle homologe Pyramiden, woraus beyde Körper bestehen, sich verhalten, wie die Würfel der homologen Flächenseiten *ac* und AC, folglich ist dieses das Verhältniß der ganzen Körper.

§. 44.

Aehnliche vielwinkliche Körper verhalten sich wie die Würfel gerader Linien, die in beyden auf eine ähnliche Art gezogen werden.

(Siehe die folgende Figur.)



Es seyen *abc*F und *A*BCF zwey der ähnlichen Pyramiden, woraus zwey ähnliche Körper entstehen (§. 43).

Aus der gemeinschaftlichen Spitze F sey bis zur Oberfläche der größeren Pyramide die gerade Linie FG gezogen, so kann man sagen, die Linien FG und F*g* sind in beyden Pyramiden, und folglich in beyden Körpern auf eine ähnliche Art gezogen.

Trift es sich, daß die Linie FG auf eine Kante der Pyramiden fällt, als auf FC, so ist

F*c*, FC :: *cb*, CB

folglich auch

Würf. F*c*, W. FC :: W. *cb*, W. CB,

da sich nun beyde Körper verhalten wie W. *cb* zu W. CB, so verhalten sie sich auch wie W. F*c* zu W. FC.

Trifft die Linie FG keine Flächenseite der Pyramiden, so schneidet sie zwey Flächen der Körper, irgendwo in *g* und in G.

Die Aehnlichkeit beyder Pyramiden erfordert, daß die Ebnen *abc* und ABC parallel seyn (§. 43). Stelle dir durch F wiederum eine Ebne vor, die mit beyden vorigen Ebnen auch parallel sey, so sind die Linien FG und FC von drey parallelen Ebnen geschnitten, und es ist (VII §. 27)

$$Fg, FG :: Fc, FC :: cb :: CB$$

daher ist $\mathfrak{W}. Fg, \mathfrak{W}. FG :: \mathfrak{W}. cb, \mathfrak{W}. CB.$

Und weil sich beyde Körper verhalten wie $\mathfrak{W}. cb$ zu $\mathfrak{W}. CB$, so verhalten sie sich auch wie $\mathfrak{W}. Fg$ zu $\mathfrak{W}. FG$, das ist, wie die Würfel der in ihnen ähnlich gezogenen geraden Linien.

Wird die Linie GF über F bis zu den gegenüberstehenden Flächen beyder Körper gezogen, so findet für beyde Enden jenseit F wiederum der nemliche Beweis Statt.

§. 45.

Die ganzen Oberflächen ähnlicher vielwinklicher Körper verhalten sich wie die Quadrate der homologen Flächenseiten, oder wie die Quadrate der in den Körpern ähnlich gezogenen Linien.

Die Flächen ähnlicher Körper sind ähnliche Ebnen (§. 3). Diese verhalten sich also wie die Quadrate ihrer homologen Seiten. Da nun in ähnlichen Körpern alle Flächenseiten das nemliche Verhältniß haben, so haben auch die Quadrate derselben alle das nemliche Verhältniß, und die Summen aller Flächen haben auch beyderseits das nemliche Verhältniß, das ist, sie verhalten sich wie die Quadrate von zwey willkürlich gewählten homologen Flächenseiten.

Die in beyden Körpern ähnlich gezogene geraden Linien verhalten sich auch wie die homologen Flächenseiten (§. 44), also verhalten sich ihre Quadrate wie die Quadrate der homologen Flächenseiten, das ist, wie die ganzen Oberflächen der Körper.

Zusatz. Das Verhältniß der Oberfläche zweyer ähnlicher Körper kann demnach eben so gefunden werden, als das Verhältniß ähnlicher Ebnen, wenn man nur zwey homologe Flächenseiten der Körper vergleichet.

§. 46.

Wenn Körper ausgemessen werden sollen, so gehöret dazu auch ein körperliches Maaß (III §. 4). Da nun der Kubus oder Würfel ein sehr gemeiner und bekannter Körper ist, so nimmt man ihm zum Maaße aller Körper an. Es wird vor allen Dingen vorausgesetzet, daß man die Größe der Flächenseite des Würfels kennet, welcher zum Maaße dienen soll. Diese Flächenseite pfleget nun ein bekanntes Längenmaaß zu seyn, woraus das Kubikmaaß entstehet. Z. E. wenn man einen Kubus annimmt, der einen Fuß in der Länge, Breite und Tiefe hat, so ist dieses ein Kubikfuß.

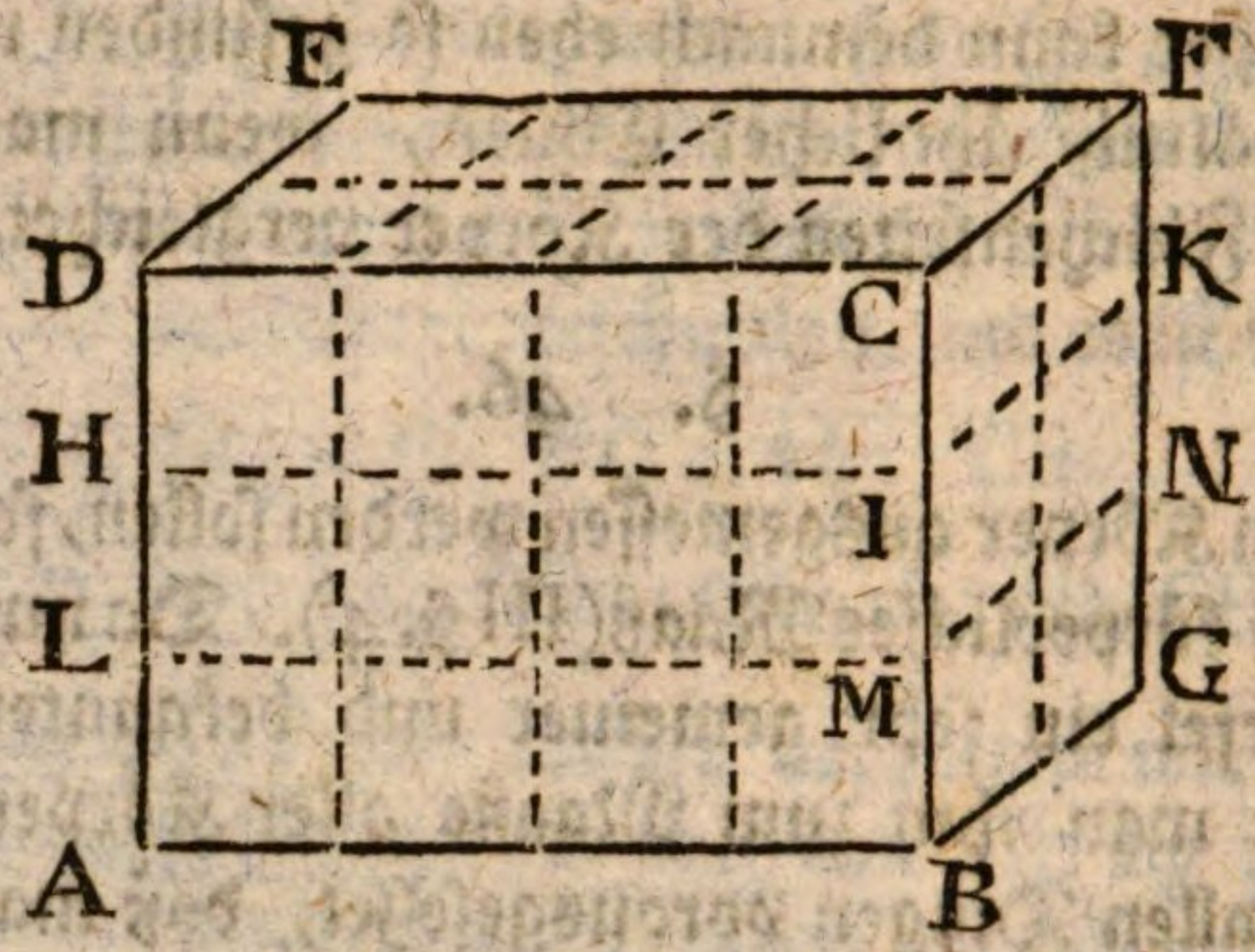
§. 47.

Weil man in das innere der Körper nicht eindringen kann, um sie mit dem Kubikmaaße auszumessen, so muß man zur Rechnung seine Zuflucht nehmen, und vermittelst der bekannten Länge, Breite und Tiefe der Körper zu erfahren suchen, wie oft sie das Kubikmaaß enthalten.

§. 48.

Es enthalte ein rechtwinkliches Parallelepipedon in der Länge DC 4 Zoll, in der Breite CF 2, in der Höhe CB 3. So enthält die Grundfläche DCFE, welche ein rechteckiges Parallelogramm ist, 4×2 Quadratzoll.

(Siehe die folgende Figur.)



Man stelle sich vor, es liege oder hänge an jedem Quadratzolle ein Kubikzoll, so hat man eine Schichte oder Lage von Kubikzollen DEFCKIH, die so viel Kubikzolle enthält, als die Grundfläche DEFC Quadratzolle, das ist 4×2 Kubikzolle. Da nun die Höhe CB drey Zoll ausmachet, so giebt es drey solche Lagen über einander, nemlich DEFKIH, LIKNML und LMNGBA, also so viel Lagen von 4×2 Kubikzollen, als Zolle in der Höhe sind, folglich im gegenwärtigen Falle 3 Lagen. Und da jede Lage 4×2 Kubikzolle ausmachet, so machen alle drey Lagen dreymal so viel, das ist $4 \times 2 \times 3 = 24$ Kubikzoll, als den ganzen Inhalt des Körpers.

Daraus siehet man, daß man den Körperlichen Inhalt im Kubikmaaß erhält, wenn man die Länge, Breite und Tiefe mit einander multiplizirt, oder, weil die Grundfläche schon die Länge und Breite enthält, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt.

Wenn auch die drey Dimensionen oder Ausmessungen nicht genau in Zahlen ausgedrücket werden können, so kann man sie doch so genau haben als man will, und je genauer man die Länge, Breite und Tiefe ausdrücket, desto näher bekömmt man den Inhalt des Körpers.

Gesetzt also, x, y und z seyen die drey Dimensionen, die man in Zahlen so genau ausdrücken kann als man will,

und es sey Y das Parallelepipedon, welches jedesmal aus der Multiplikazion dieser drey Dimensionen entstehet. Es seyen die wahren Dimensionen oder die Gränzen von x, y, z, ausgedrücket durch a, b, c, und das wahre Parallelepipedon durch D, so hat man estlich

$$xyz = Y$$

und wenn man anstatt jeder Größe ihre Gränze setzet (III §. 18)

$$abc = D$$

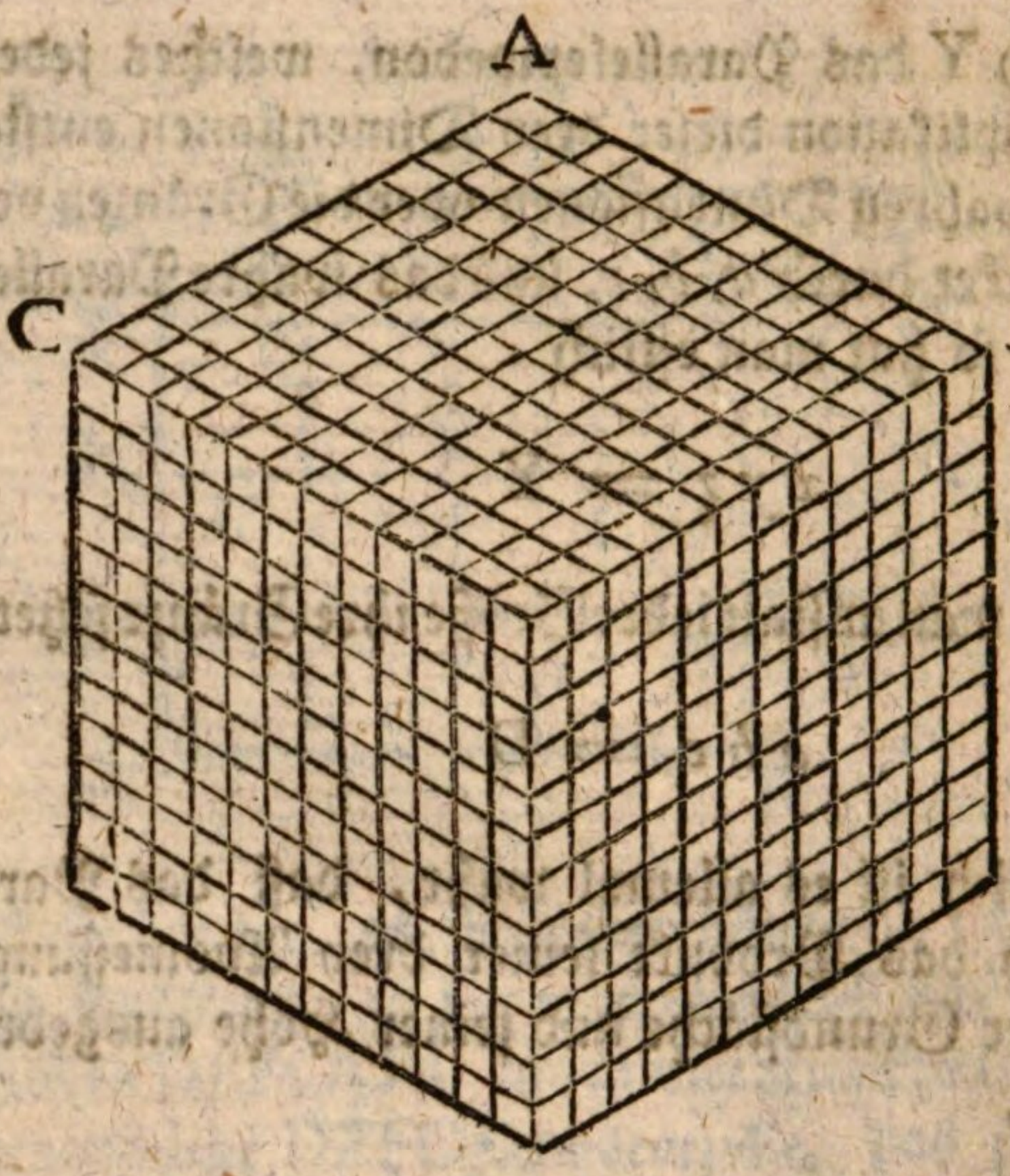
Folglich ist es allemal wahr, daß das Parallelepipeden durch das Produkt seiner drey Ausmessungen, oder auch seiner Grundfläche und seiner Höhe ausgedrücket werden kann.

§. 49.

Wenn das auszumessende Parallelepipedon selbst ein Kubus ist, so sind Länge, Breite und Tiefe einander gleich. Folglich brauchet man nur die eine Dimension mit sich selbst und noch mit sich selbst zu multipliziren, um den Inhalt des gegebenen Kubus zu bekommen.

Hieraus siehet man zugleich, daß, wenn das Längenmaaß 12 Theile hat, das Kubikmaaß alsdann $12 \times 12 \times 12$ oder 1782 kubische Theile bekomme.

(Siehe die folgende Figur.)



Denn wenn man einen Fuß AB in seine zwölf Zolle eintheilet, so ist es klar, daß erstlich dessen Quadrat BC 144 Quadratzolle enthält, worauf 144 Kubikzolle liegen. Da nun der Höhe nach 12 solche Lagen sind, so enthält der Kubikfuß $144 \times 12 = 1728$ Kubikzolle.

Aus diesem Grunde läßt sich auch leicht erklären, wie die Zahl des körperlichen Inhalts kleiner werden kann als die Dimensionen des Parallelepipedons. Es sey die Länge $\frac{1}{2}$ Fuß, die Breite $\frac{1}{3}$, die Höhe $\frac{1}{4}$, so ist der körperliche Inhalt $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$ Kubikfuß. Man rechne in Zollen, so ist $\frac{1}{2}$ Fuß $= 6$ Zoll, $\frac{1}{3}$ Fuß $= 4$ Zoll, $\frac{1}{4}$ Fuß $= 3$ Zoll. Folglich der körperliche Inhalt $6 \times 4 \times 3$ Kubikzoll, oder 72 Kubikzoll. Und da ein Kubikzoll $= \frac{1}{1728}$ Kubikfuß, so ist der Inhalt $\frac{72}{1728} = \frac{1}{24}$ Kubikfuß.

Gebrauchet man Dezimal-Theile, so wird die Rechnung sehr bequem, und wenn man nach den gewöhnlichen Regeln der Dezimal-Rechnung verfährt, so bekömmt man, ohne weitere Redukzion, den körperlichen Inhalt.

Es sey die Länge 0;12, die Breite 0;56, die Höhe 0;79

```
   0;12 Länge
   0;56 Breite
   ----
     72
     60
   ------
  0;0672
     0;79 Höhe
   ------
    6048
   4704
  -------
  0;053088 körperlicher Inhalt.
```

Hier bekömmt man zum körperlichen Inhalte einen Bruch, der weit kleiner ist als jede der gegebenen Ausmessungen.

§. 50.

Ein schiefwinkliches Parallelepipedon, es mag übrigens beschaffen seyn, wie es will, ist allemal einem rechtwinklichen gleich, was mit ihm gleiche Länge, Breite und Höhe hat, und also ist dessen Inhalt das Produkt der Länge, Breite und Tiefe.

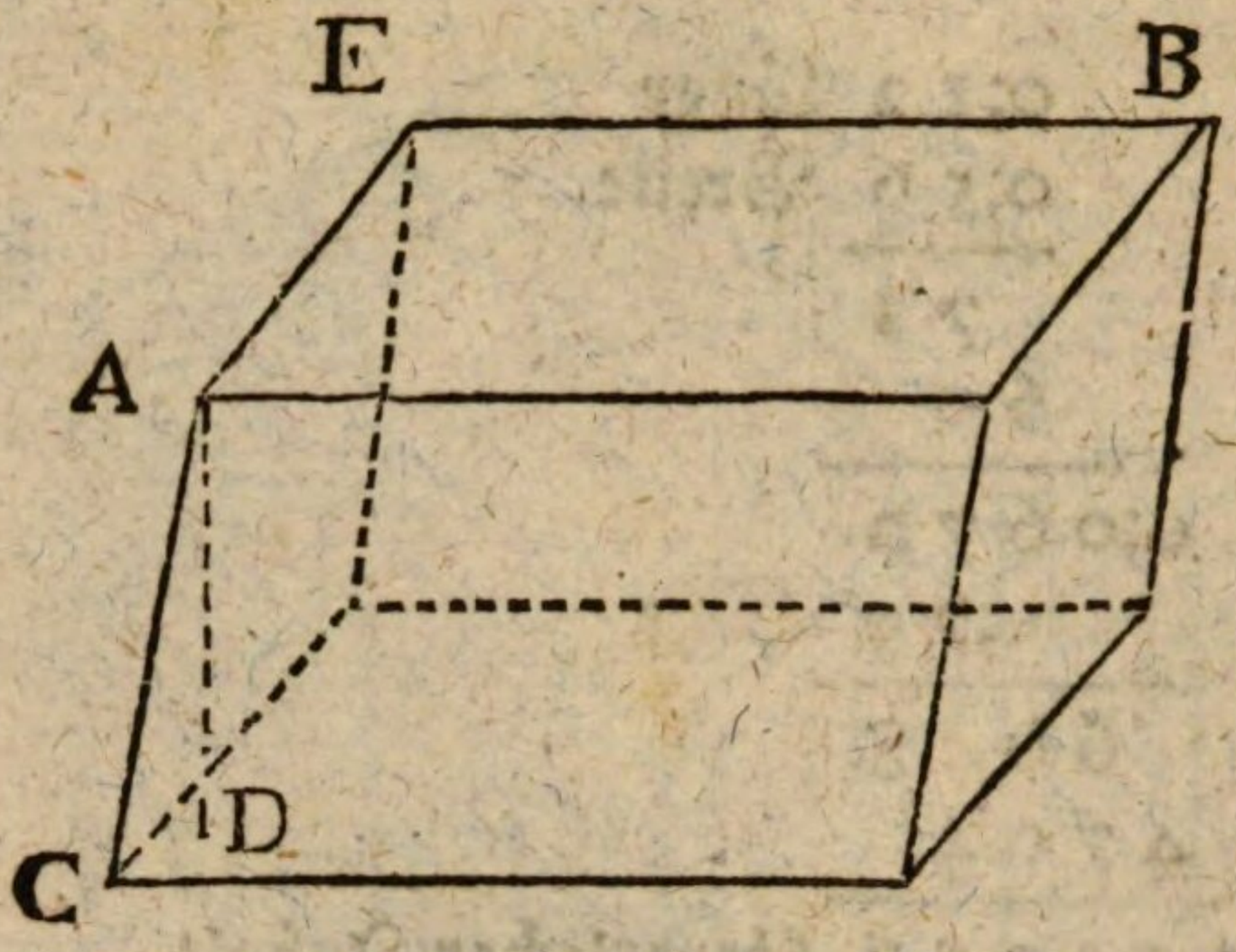
Denn da die Länge und Breite beyderseits die nemliche ist, so sind die Grundflächen gleich. (IV §. 25) Da nun auch die Höhen gleich sind, so sind beyde Parallelepipeden gleich (§. 26).

§. 51.

Aufgabe.

Wenn die Grundfläche und die Höhe eines Parallelepipedons gegeben sind, den körperlichen Inhalt desselben finden.

(Siehe die folgende Figur.)



Auflösung. Multiplizire die Grundfläche mit der Höhe, so kömmt der körperliche Inhalt im Kubikmaaß.

Exempel. Es sey im Körper CB die Länge EB = 7;5 Fuß, die Breite derselben 2;57, die Höhe AD 4;33.

```
      7;5   Länge
    2;57    Breite
    ----
     525
    375
   150
   ----
  19;275    Grundfläche
     4;33   Höhe
   ----
    57825
   57825
  77100
  -----
 83;46075   körperlicher Inhalt.
```

Zusatz I. Ist das Parallelepipedon rechtwinklich, so geben die Flächenseiten selbst die Länge, Breite und Höhe. Sonst muß man, wenn man eine der äußeren Linien zur Länge angenommen hat, die Breite auf derselben senkrecht, und die Höhe auf beyden senkrecht nehmen (§. 30).

Zusatz II. Ist das Parallelepipedon ein Kubus, so sind die drey Ausmessungen mit einander gleich, und es brauchet nur eine gegebene zu seyn. Die dritte Potenz derselben giebet den Inhalt des Kubus.

Anmerkung. Hieraus siehet man, daß der Ausdruck abc entweder eine doppelte Proporzion, oder auch ein Parallelepipedon bedeuten kann, dessen drey Ausmessungen durch die drey Faktoren angezeiget werden. Aber auch in diesem Falle findet eine doppelte Proporzion statt. Denn wenn a die Länge und b die Breite ist, so ist

$$1, a :: b, ab \text{ (Grundfläche.)}$$

Bildet man sich ein, daß die Grundfläche mit lauter Würfeln beleget ist, so ist eine solche Lage im ganzen Körper so vielmal enthalten als die Einheit in der Höhe, also hat man

$$1, ab :: c, abc \text{ (dem Körper.)}$$

Da nun abc das Parallelepipedon aus abc vorstellet, so stellet aaa oder a^3 das Parallelepipedon aus a, a und a, das ist, den Kubus von a vor. Und dieses ist die Ursach warum die dritte Potenz eine Zahl auch der Kubus derselben genannt wird.

§. 52.

Aufgabe.

Wenn der körperliche Inhalt und die Grundfläche eines Parallelepipedons gegeben sind, die Höhe desselben finden.

Auflösung. Man dividire den Inhalt durch die Grundfläche, so bekömmt man die Höhe. Denn es sey $Ax = c$, wo A die Grundfläche, x die Höhe, c aber den körperlichen Inhalt bedeuten soll, so ist

$x =$

$x = \frac{c}{A}$. Die Sache ist klar genug und wir brauchen kein Exempel beyzufügen.

§. 53.

Aufgabe.

Wenn der körperliche Inhalt und die Höhe eines Parallelepipedons gegeben sind, die Grundfläche finden.

Auflösung. Dividire den Inhalt durch die Höhe, so kömmt die Grundfläche. Denn es sey wie in voriger Aufgabe $Ax = c$, so ist $A = \frac{c}{x}$

§. 54.

Aufgabe.

Wenn der körperliche Inhalt eines Würfels gegeben ist, seine Flächenseite finden.

Auflösung. Man ziehe aus der Zahl der gegebenen Solidität die Kubikwurzel, so bekömmt man die verlangte Seite. Denn wenn die Seite $\sqrt[3]{S}$ ist, so wird der Kubus $(\sqrt[3]{S})^3 = S$.

Exempel. Es wird ein Kubus verlanget dessen Inhalt 57 Kubikfuß betragen soll.

$\sqrt[3]{}$ 57,|000|000|000 = 3;848 . . .
27

30000
2.7.8.7.2

2128000
1.7.5 1.1.0.4

376896000
354612.1.9.2

22283808

Es ist also 3;848 . . . . die Flächenseite eines Kubus, dessen Inhalt 57 seyn soll.

Anmerkung. Es kann $\sqrt[3]{a}$ sowohl die erste der zwey mittlern Proporzional-Linien zwischen 1 und a, als auch die Flächen-Seite eines Kubus bedeuten, dessen körperlicher Inhalt a ist; und beyde Bedeutungen stimmen vollkommen überein. Denn weil $\sqrt[3]{a}$ die Länge und auch die Breite bezeichnet, so ist (§. 51. Anm.)

$$1, \sqrt[3]{a} :: \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^2} \text{ (Grundfläche.)}$$

Ferner, weil auch $\sqrt[3]{a}$ die Höhe bestimmt, so ist

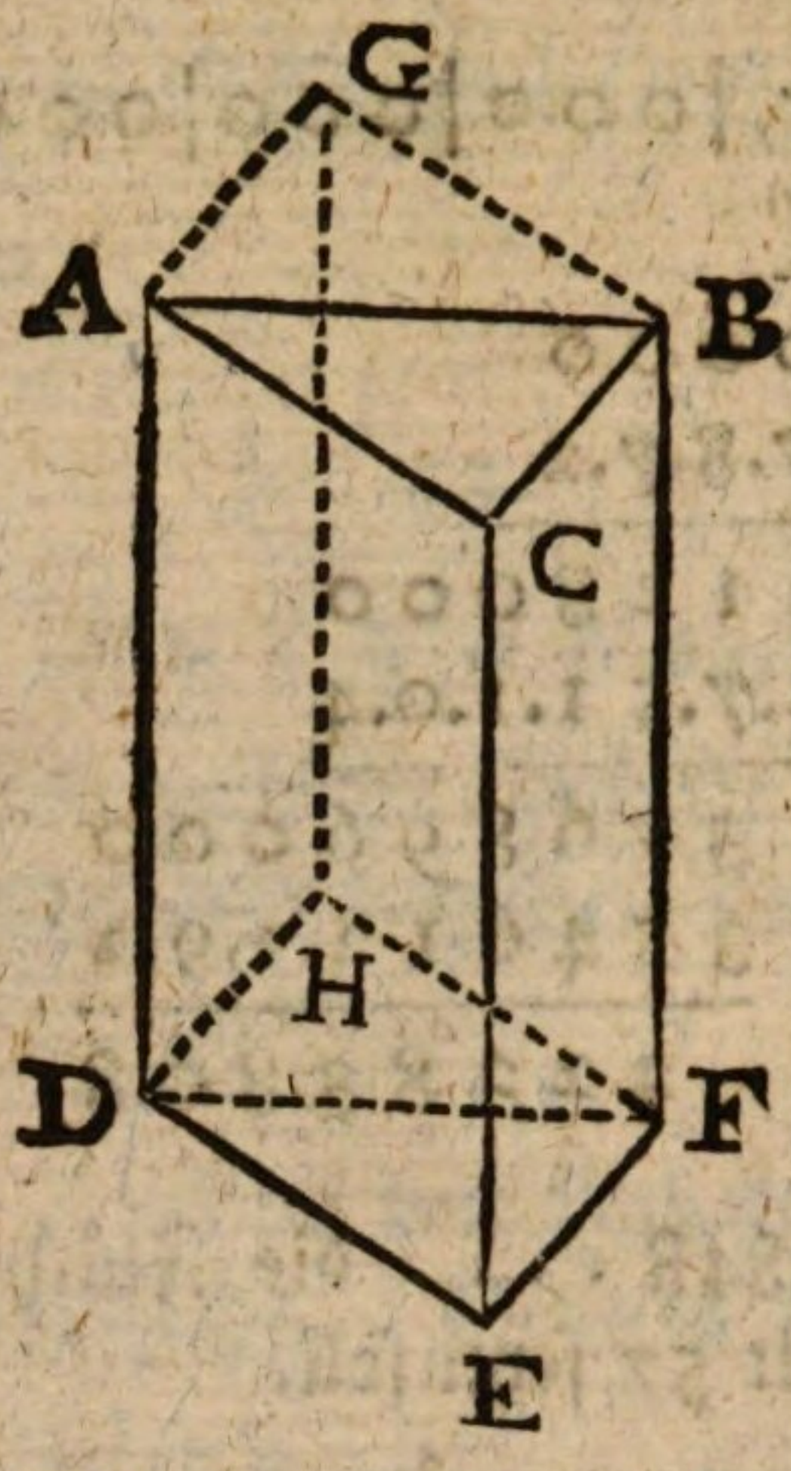
$$1, \sqrt[3]{a^2} :: \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^3} (= a, \text{ Inhalt.})$$

§. 55.

Aufgabe.

Wenn die Grundfläche und Höhe eines Prisma in Zahlen gegeben sind, den körperlichen Inhalt desselben finden.

(Siehe die folgende Figur.)



Auflösung. Es wird, wie beym Parallelepipedon, die Grundfläche mit der Höhe multipliziret.

Denn es sey ABCDEF ein dreyeckigtes Prisma. Lege noch ein gleiches AGBFHD dagegen, so daß die dreyeckigten Grundflächen durch ihre Verdoppelung zu Parallelogrammen werden.

So wird der zusammengesetzte Körper ein viereckigtes Prisma oder ein Parallelepipedon, das doppelt so groß ist als das gegebene dreyeckigte Prisma.

Des Parallelepipedons Inhalt erhält man, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multlpliziret. Es sey also die Grundfläche DHFE $= b$, und die Höhe $= a$, der Flächeninhalt des Parallelepipedons sey S, so ist (§. 51.)

$$S = ab.$$

Halbire beyderseits, so ist

$$\tfrac{1}{2} S = a. \ \tfrac{1}{2} b.$$

Es ist aber $\frac{1}{2}$ S das dreyeckigte Prisma, und $\frac{1}{2} b$ das Dreyeck DFE oder die Grundfläche desselben.

Also entstehet der Inhalt des dreyeckigten Prisma, wenn man seine Grundfläche mit seiner Höhe multipliziret.

Und

Und weil jedes Prisma sich von oben nach unten zu in lauter dreyeckigte Prismen eintheilen läßt, so erhält man den körperlichen Inhalt eines jeden Peisma, wenn man erstlich den Flächen-Inhalt der Grundfläche im Quadratmaaße suchet, und hierauf mit der Höhe multipliziret.

Exempel. Es sey gegenwärtige Figur ein reguläres oder irreguläres fünfeckigtes Prisma. Gesetzt das Fünfeck was die Grundfläche ausmacht sey gefunden = 15;734596 Fuß □, und die Höhe des Prisma sey = 4;983 Fuß.

15;734 596	Grundfläche
4;983	Höhe
47 203 788	
1 258 767 68	
14 161 136 4	
62 938 384	
78;405 491 868	Inhalt des Prisma in Kubikfüßen.

Zusatz I. Hieraus siehet man wiederum, daß Prismen von gleicher Grundfläche sich wie ihre Höhen verhal-

ten. (§. 29.) Es sey die Grundfläche eines Prisma $= b$ und dessen Höhe a, der körperliche Inhalt sey s. Die Grundfläche eines andern Prisma sey auch b, dessen Höhe A, dessen Inhalt S, so ist

$$s = ab$$
$$S = Ab$$

daher ist $s, S :: ab, Ab$

oder $s, S :: a, A$.

Zusatz II. Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. (§. 25.)

Es sey a die Höhe, b die Grundfläche, s die Solidität eines Prisma. Es sey auch a die Höhe, aber B die Grundfläche, und S die Solidität eines andern Prisma, so ist

$$s = ab$$
$$S = aB$$

folglich $s, S :: ab, aB$

oder $s, S :: b, B$.

Zusatz III. Und da Parallelepipeden nichts anders als viereckigte Prismen sind, so verhalten sich auch Parallelepipeden von gleicher (obschon nicht ähnlichgleicher) Grundfläche, wie ihre Höhen; und Parallelepipeden von gleicher Höhe wie ihre Grundflächen, es mögen nun diese ähnlich seyn oder nicht.

Zusatz IV. Wenn man den Inhalt eines Prisma durch die Grundfläche dividiret, so erhält man die Höhe.

Zusatz V. Wenn man den Inhalt eines Prisma durch die Höhe dividiret, so erhält man die Grundfläche.

§. 56.

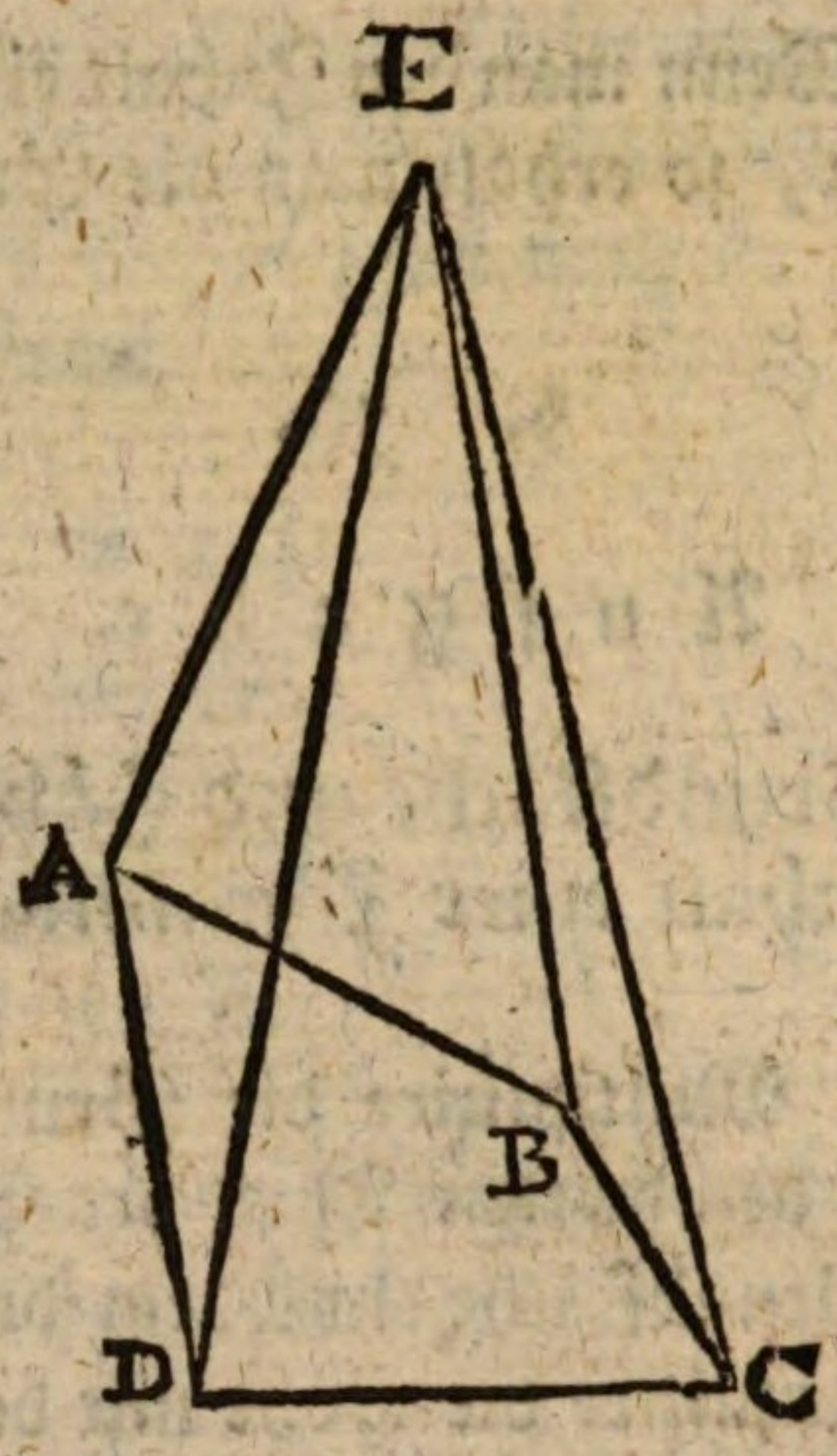
Aufgabe.

Wenn die Grundfläche und Höhe gegeben, den körperlichen Inhalt einer Pyramide finden.

Auflösung. Multiplizire die Grundfläche mit der Höhe, und nimm den dritten Theil des Produktes. Oder multiplizire die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe. Oder multiplizire die Höhe mit dem dritten Theile der Grundfläche.

Denn, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt, so bekömmt man die Soliditat eines Prisma, welcher mit der Pyramide die nemliche Grundfläche und gleiche Höhe hat. (§. 55.) Von diesem Prisma ist die Pyramide der dritte Theil. (§. 22.) Also muß man den dritten Theil des gefundenen Produktes nehmen; welches auch geschiehet, wenn man vor der Multiplikazion den dritten Theil des einen Faktors nimmt.

(Siehe die folgende Figur.)



Exempel. Es sey das Trapezium *ABCD* (welches in zwey Dreyecke getheilet werden kann) gefunden worden = 12;073546 Fuß □. Die Höhe der Pyramide *ABCDE* sey = 4;236 Fuß.

12;073546		Grundfläche
4;236		Höhe
72441276		
36220638		
24147092		
48294184		
51;143540856		
div. 3) 17;047846952		Kubikfuß, Inhalt der Pyramide.

Oder

Oder

1 2;0 7 3 5 4 6 Grundfläche
1;4 1 2 = $\frac{1}{3}$ der Höhe

2 4 1 4 7 0 9 2
1 2 0 7 3 5 4 6
4 8 2 9 4 1 8 4
1 2 0 7 3 5 4 6

1 7;0 4 7 8 4 6 9 5 2 Inhalt der Pyram.

Oder

4;0 2 4 5 1 5 3 3 ... = $\frac{1}{3}$ d. Grundfl.
4;2 3 6 Höhe.

2 4 1 4 7 0 9 1 9 8
1 2 0 7 3 5 4 5 9 9
8 0 4 9 0 3 0 6 6
1 6 0 9 8 0 6 1 3 2

1 7;0 4 7 8 4 6 9 3 7 8 8 Inhalt der Pyramide

Man merke daß dieser letzte Inhalt von beyden vorigen um etwas sehr geringes unterschieden ist; dieses kömmt daher, daß man den dritten Theil der Höhe in Dezimalbrüchen nicht ganz genau hat bekommen können.

Zusatz I. Pyramiden von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen. (§. 29.) Denn es sey die Grundfläche einer Pyramide b, die Höhe a, der Inhalt s. Die Grundfläche einer andern Pyramide sey auch b, die Höhe A, der Inhalt S, so ist

$$s = \frac{1}{3}ab$$

$$S = \frac{1}{3}Ab$$

folglich

$$s, S :: \frac{1}{3}ab, \frac{1}{3}Ab$$

oder $s, S :: a, A.$

Zusatz II. Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen (§. 18.).

Es sey a die Höhe einer Pyramide, b deren Grundfläche und s deren körperlicher Inhalt. Es sey auch a die Höhe einer andern Pyramide, B die Grundfläche, und S der Inhalt, so ist

$$s = \tfrac{1}{3}ab$$

$$S = \tfrac{1}{3}aB$$

$$s, S :: \tfrac{1}{3}ab; \tfrac{1}{3}aB$$

$$s, S :: b, B.$$

Zusatz III. Wenn man den Inhalt einer Pyramide durch den dritten Theil der Grundfläche dividiret, so bekömmt man die Höhe.

Zusatz IV. Wenn man den Inhalt einer Pyramide durch den dritten Theil der Höhe dividiret, so bekömmt man die Grundfläche.

Neuntes Hauptstück.

Von runden Körpern.

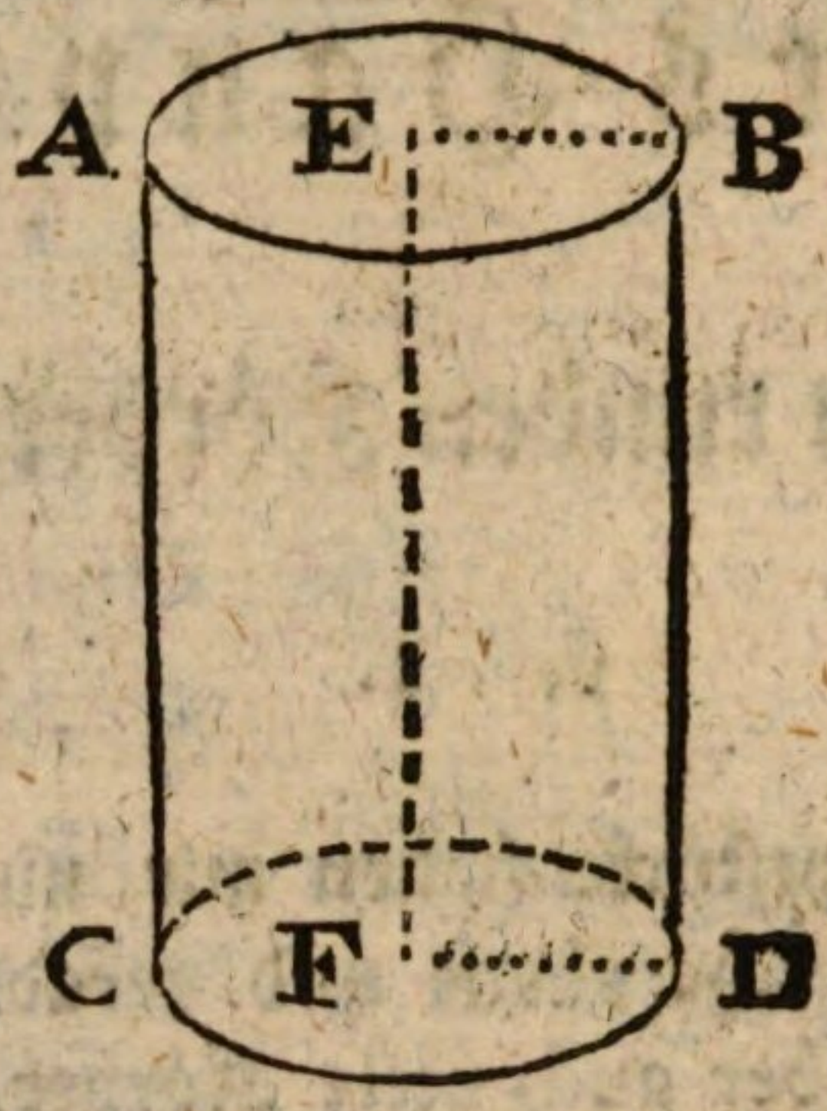
§. 1.

Im vorigen Hauptstücke haben wir nur solche Körper betrachtet, welche ebene und geradlinichte Flächen haben. Es giebt aber auch viele Körper, deren Flächen theils eben und krummlinicht, theils aber auch an sich selbst krumm oder uneben sind. Unter denselben verdienen diejenigen vorzüglich unsere Aufmerksamkeit, welche vollkommen rund sind, und deren Eigenschaften sich aus den Eigenschaften des Zirkels erklären lassen. Dergleichen Körper wollen wir im gegenwärtigen Hauptstücke vornehmen. Wir werden bald sehen, daß sie die Gränzen der geradlinichten Körper sind, und daß folglich ihre Verhältnisse sehr leicht zu entdecken sind, wenn man sich der Lehrsätze erinnert, die im vorigen Hauptstücke vorgetragen worden.

Die gewöhnlichsten runden Körper sind der Zylinder oder die Walze, der Kegel, und die Kugel oder Sphäre.

§. 2.

Der Zylinder oder die Walze ist ein Körper wie ABCD, der zwey parallele zirkelrunde Grundflächen hat, und des-



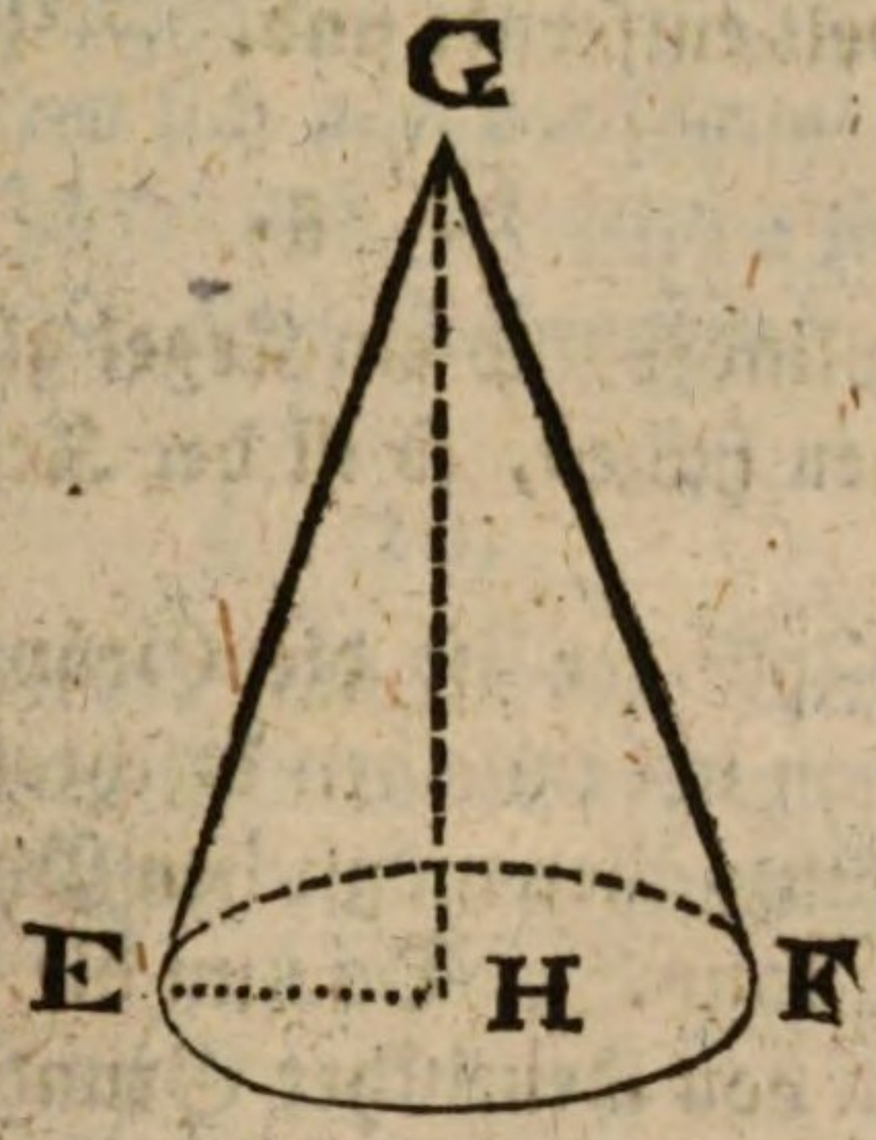
sen übriger Umfang so beschaffen ist, daß man aller Orten eine gerade Linie an demselben anlegen kann, wenn sie nur mit der Linie EF parallel ist, die durch die Mittelpunkte beyder Zirkel gehet. Diese letzte Linie heißt die Axe des Zylinders. Der Zylinder ist gerade, wenn die Axe auf beyden Grundflächen winkelrecht stehet, und schief, wenn dieses nicht ist. Man kann sich auch vorstellen, es entstehe ein gerader Zylinder, wenn ein Rektangel EBDF sich um seine Seite EF umdrehet.

§. 3.

Der Kegel oder Konus ist ein Körper wie EFG, der eine zirkelrunde Grundfläche hat, und dessen übrige Fläche nach einen Punkt spitz zugehet, so daß von der Spitze bis zu jedem Punkte des Umkreises vom Zirkel in der Oberfläche des Körpers lauter gerade Linien gezogen werden können. Die gerade Linie GH, welche von der äußersten Spitze bis zum Mittelpunkte des Zirkels gehet, ist die Axe des Kegels. Der Kegel wird gerade oder schief genannt, nachdem die Axe auf der Grundfläche senk-

recht

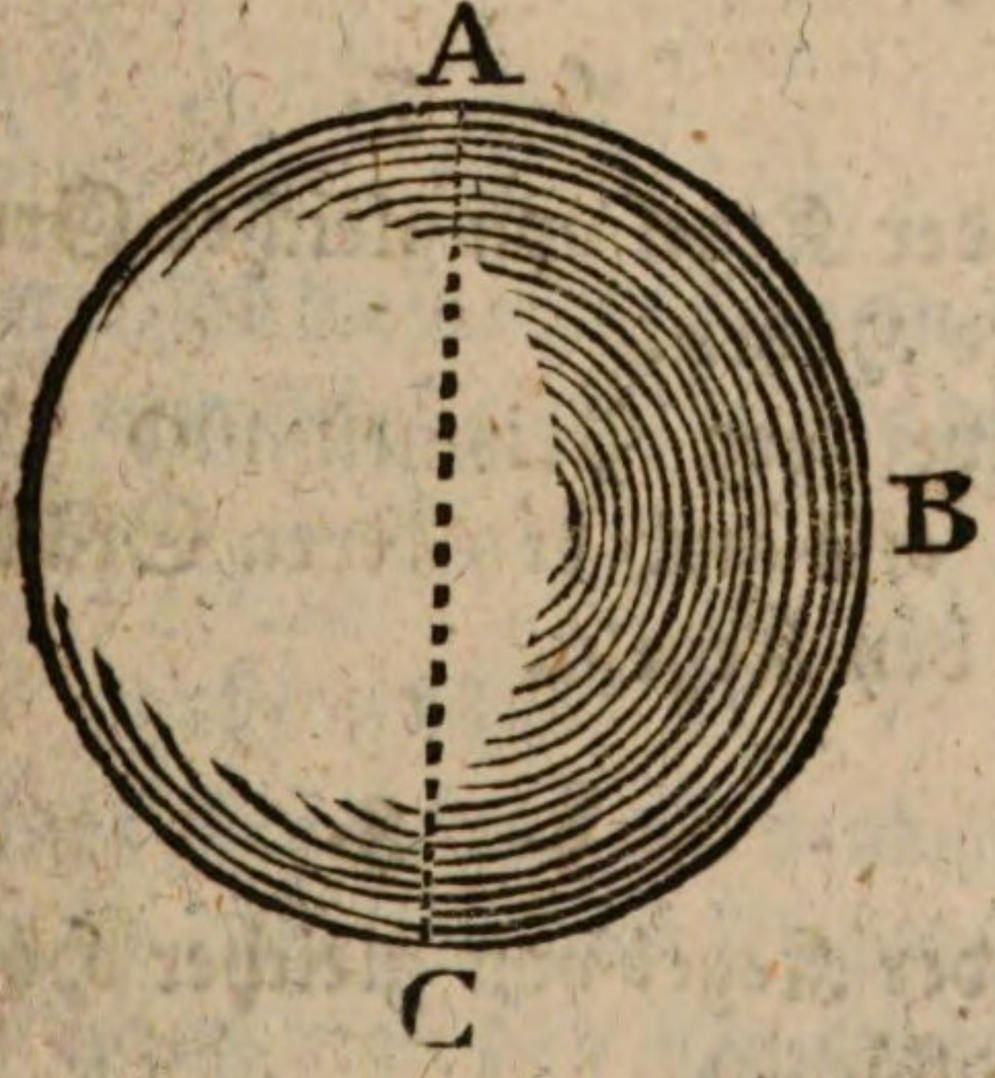
recht oder schief stehet. Auch entstehet ein gerader Kegel, wenn sich das rechtwinkliche Dreyeck GHE um seine Seite GH umdrehet.



Ein Kegel ist abgeköpft, wenn dessen Spitze vermittelst einer Ebne abgeschnitten wird, die mit der Grundfläche parallel ist.

§. 4.

Eine Kugel oder Sphäre ist ein runder Körper, der da beschrieben wird, wenn ein Zirkel oder halber Zirkel



ABC sich um seinen unverrückten Durchmesser *AC* umdrehet. Der Durchmesser, Halbmesser und Mittelpunkt des

Zirkels

Zirkels behalten die nemliche Namen in der Kugel. Auch kann man sagen, eine Kugel sey ein Körper, worin alle Punkte der Oberfläche von einem gewissen inwendigen Punkte gleich weit entfernet sind.

§. 5.

Wenn ein Zylinder und ein Kegel gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, so ist der Kegel der dritte Theil des Zylinders.

Denn der Zylinder ist die Gränze aller möglichen Prismen, die man in demselben beschreiben kann, und der Kegel ist die Gränze aller möglichen Pyramiden, die man darin beschreiben kann. Da nun die Pyramide sich allemal zum Prisma von identischer Grundfläche und gleicher Höhe verhält wie 1 zu 3 (VIII. §. 22.), so verhalten sich auch die Gränzen, nemlich Kegel und Walze, wie 1 zu 3 (III§.20)

§. 6.

Zylinder von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich.

Denn die darin beschriebenen ähnlichen Prismen sind allemal gleich. (VIII. §.23.) Also sind auch deren Gränzen, die Zylinder, gleich.

§. 7.

Zylinder oder Kegel von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Dieses findet bey Prismen und Pyramiden Statt (VIII. §. 29.), also auch bey deren Gränzen, nemlich bey Zylindern und bey Kegeln.

§. 8.

Zylinder oder Kegel von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Denn sie sind die Gränzen aller möglichen in ihnen beschriebenen Prismen oder Pyramiden. (VIII. §. 18. 25.)

§. 9.

§. 9.

Zylinder oder Kegel von gleicher Höhe verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser oder Halbmesser ihrer zirkelrunden Grundflächen.

Denn sie verhalten sich wie die Grundflächen (§. 8.), diese aber, weil sie Zirkel sind, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

§ 10.

Aehnliche Zylinder sind diejenigen, worin die Axen sich eben so verhalten, wie die Durchmesser der Grundflächen, und gleich schief auf den Grundflächen geneigt sind.

§. 11.

Aehnliche Zylinder verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser, oder auch wie die Würfel ihrer Axen, oder wie die Würfel ihrer Höhen.

Aehnliche Zylinder sind die Gränzen ähnlicher Prismen, die in ihnen beschrieben sind. Aehnliche vielkantige Körper verhalten sich aber überhaupt wie die Würfel der in ihnen ähnlich gezogenen Linien. (VIII. §. 44.) Also auch die Zylinder.

§. 12.

Aehnliche Kegel sind diejenigen, worin die Axen gleiche Neigung haben, und sich verhalten wie die Durchmesser der Grundflächen.

§. 13.

Die Seiten eines Kegels sind die beyden geraden Linien, die in der Fläche desselben (die Grundfläche ausgeschlossen) entstehen, wenn man den Kegel vermittelst einer Ebne schneidet, die durch die Axe gehet, und auf der Grundfläche senkrecht stehet.

§. 14.

§. 14.

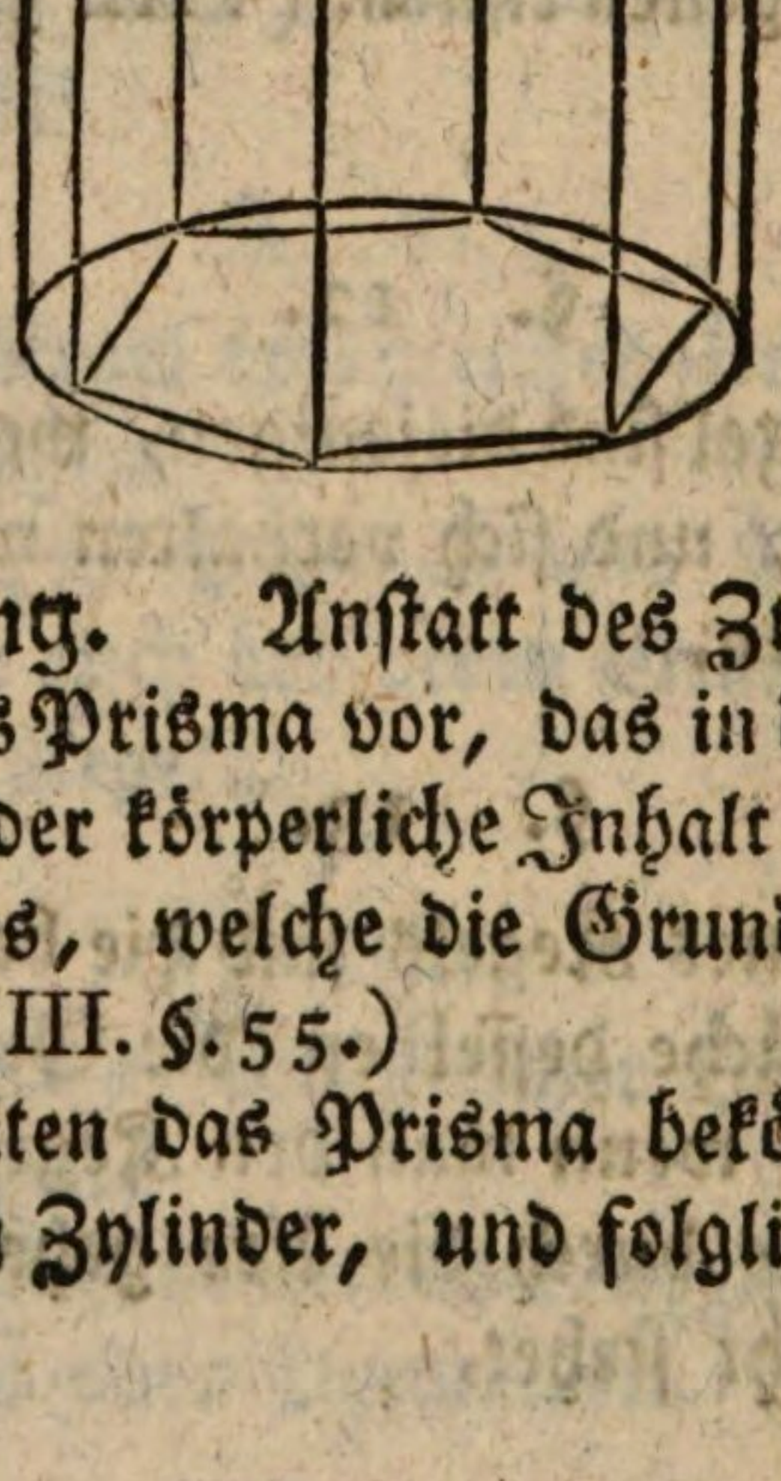
Aehnliche Kegel verhalten sich wie die Würfel der Durchmesser ihrer Grundflächen, oder wie die Würfel der Axen, oder wie die Würfel der Höhen, oder wie die Würfel der homologen Seiten.

Denn ähnliche Kegel sind die Gränzen ähnlicher Pyramiden, und verhalten sich folglich wie die Würfel der in ihnen ähnlichgezogenen Linien. (VIII. §. 44.)

§. 15.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Zylinders berechnen.



Vorbereitung. Anstatt des Zylinders stelle man sich ein vieleckigtes Prisma vor, das in demselben beschrieben sey. So ist der körperliche Inhalt desselben das Produkt des Vieleckes, welche die Grundfläche ausmachet, und der Höhe. (VIII. §. 55.)

Je mehr Seiten das Prisma bekömmt, desto mehr nähert es sich dem Zylinder, und folglich ist der Zylinder dessen Gränze.

Das

Das Produkt aus der Höhe und der Grundfläche des Prisma nähert sich je mehr und mehr dem Produkte aus der Höhe und dem Zirkel, der dem Zylinder zur Grundfläche dienet, und also ist dieses letzte Produkt die Gränze des ersten.

Da also der körperliche Inhalt des Prisma, und das Produkt der Grundfläche mit der Höhe, wachsende Größen sind, die beständig einander gleich bleiben, so sind auch ihre Gränzen gleich. (III. §. 18.)

Nemlich es ist der körperliche Inhalt des Zylinders gleich dem Produkte des Zirkels, der die Grundfläche ausmacht, und der Höhe.

Auflösung. Man messe den Durchmesser des Zirkels, der die Grundfläche ausmacht, berechne darnach die Fläche des Zirkels (VI §. 65.), und multiplizire dieselbe mit der Höhe des Zylinders.

Zusatz. Es sey der Durchmesser des Zylinders $= a$, die Höhe $= b$. Weil der Durchmesser a ist, so ist die Grundfläche $= \frac{1}{4} a^2 \pi$, wenn sich nemlich der Durchmesser zum Umkreise verhält wie 1 zu π. (VI. §. 65.) Multipliziret man mit der Höhe b, so ist

$$\text{Zylinder} = \frac{a^2 b \pi}{4}$$

§. 16.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines Kegels finden.

Auflösung. Der Kegel ist der dritte Theil eines Zylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. (§. 5.) Also muß man den Zirkel, der dem Kegel zur Grundfläche dienet, erstlich berechnen, ihn mit der Höhe des Kegels multipliziren, und den dritten Theil des Produkts nehmen. Oder es wird die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt.

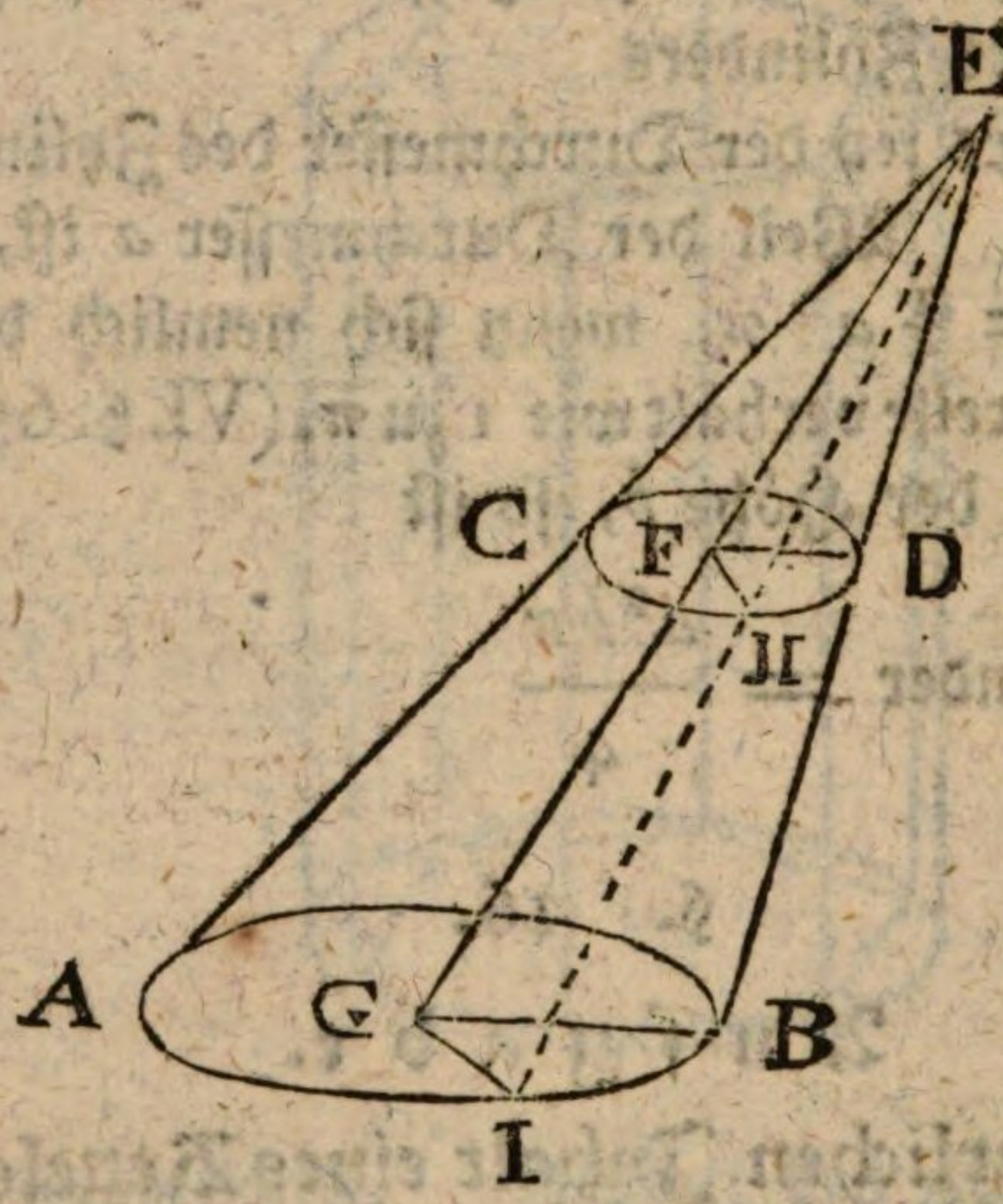
Zusatz.

Zusatz. Es sey der größte Durchmesser des Kegels $= a$, die Höhe b. So wäre der Zylinder $= \frac{a^2 b\pi}{4}$. Hiervon ist der Kegel der dritte Theil, also ist

$$\text{Kegel} = \frac{a^2 b\pi}{12}$$

§. 17.

Wenn ein Kegel ABE vermittelst einer Fläche CD abgeköpfet wird, die mit der Grundfläche AB parallel ist, so ist die Fläche CD ein Zirkel, der Kegel mag übrigens gerade oder schief seyn.



In den ähnlichen Dreyecken EFD und EGB ist

FD, GB :: EF, EG.

In den ähnlichen Dreyecken EFH und EGI ist

FH, GI :: EF, EG.

Also

Also ist

FD, GB :: FH, GI

oder FD, FH :: GB, GI

und weil GB = GI, so ist auch FD = FH.

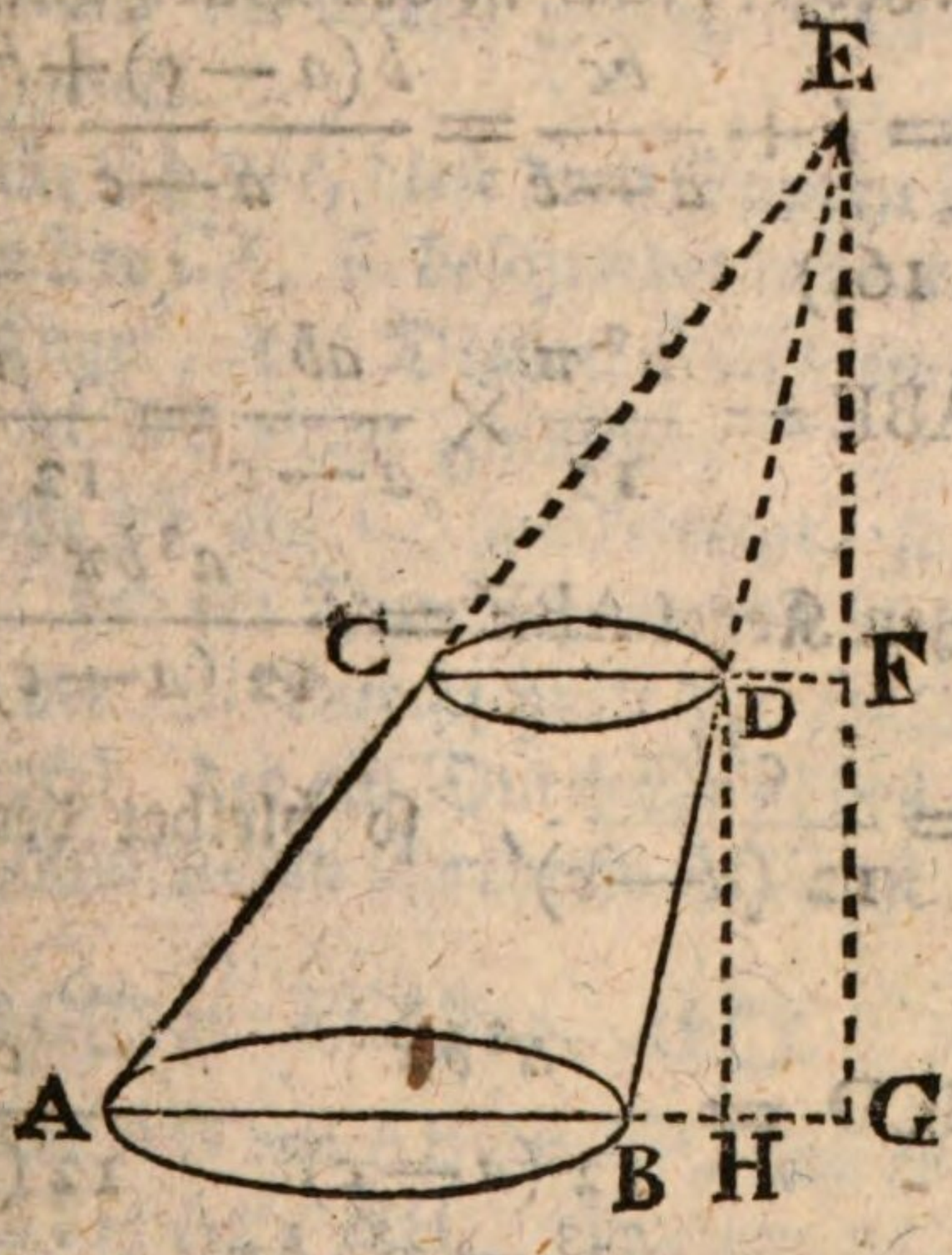
So läßt sich beweisen, daß alle gerade Linien, die in der Ebne CD aus dem Punkte F, wo diese Ebne von der Axe EG geschnitten wird, nach den Umfang dieser Ebne gezogen werden, einander gleich sind.

Folglich ist CD ein Zirkel, dessen Mittelpunkt in F ist.

§. 18.

Aufgabe.

Es ist gegeben der Durchmesser AB (= *a*), der Durchmesser CD (= *c*), und die Höhe DH oder FG (= *b*) des abgeköpften Kegels CDBA. Es soll dessen körperlicher Inhalt gefunden werden.



Auflösung. Man suche erstlich die Höhe FE des abgeschnittenen Stückes.

In den ähnlichen Dreyecken EAB, ECD ist
AB, CD :: BE, DE.
In den ähnlichen Dreyecken EBG, EDF ist
GE, FE :: BE, DE,

also ist

$$AB, CD :: GE, FE$$

oder $a, c :: (b + FE), FE$

daher ist

$$(a - c), c :: (b + FE - FE), FE$$

oder $(a - c), c :: b, FE \left(= \frac{bc}{a - c}\right)$.

Da nun im abgeschnittenen Stücke CDE der Durchmesser $CD = c$, und die Höhe $FE = \frac{bc}{a - c}$, so ist (§. 16.)

$$\text{Kegel CDE} = \frac{c^2\pi}{12} \times \frac{bc}{a-c} = \frac{c^3 b\pi}{12\,(a-c)}$$

Im ganzen Kegel ABE ist der Durchmesser $AB = a$, die Höhe $GE = b + \frac{bc}{a-c} = \frac{b(a-c)+bc}{a-c} = \frac{ab}{a-c}$

Folglich ist (§. 16.)

$$\text{Kegel ABE} = \frac{a^2\pi}{12} \times \frac{ab}{a-c} = \frac{a^3 b\pi}{12\,(a-c)}$$

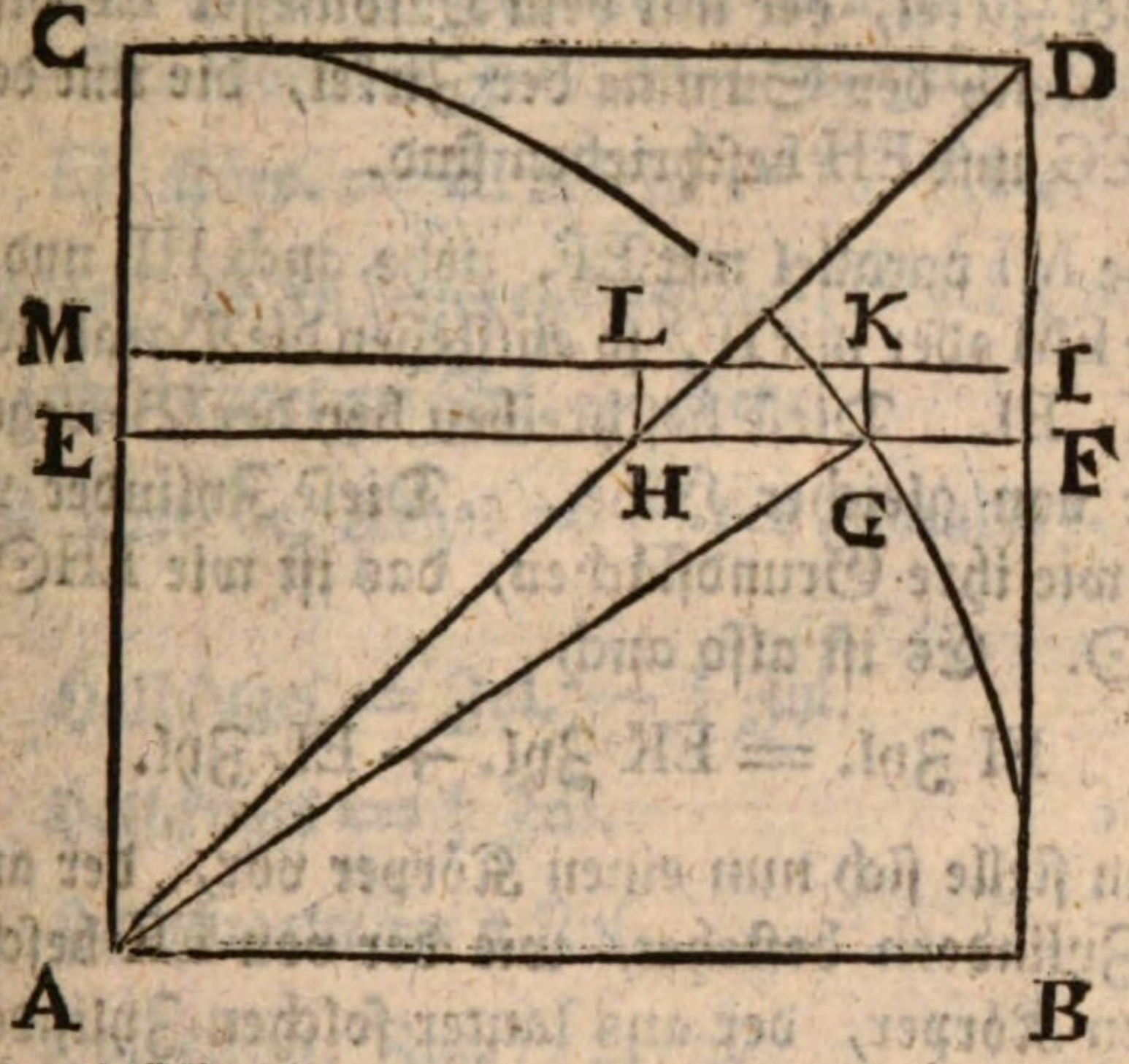
Vom ganzen Kegel $ABE = \frac{a^3 b\pi}{12\,(a-c)}$ ziehe ab den Kegel $CDE = \frac{c^3 b\pi}{12\,(a-c)}$, so bleibet der abgekröpfte Kegel

$$ABCD = \frac{a^3 b\pi}{12\,(a-c)} - \frac{c^3 b\pi}{12\,(a-c)}$$

oder $$ABCD = \frac{(a^3 - c^3)\, b\pi}{12\,(a-c)}$$

§. 19.

Eine Kugel verhält sich zum Zylinder, der den nemlichen Durchmesser und die nemliche Höhe hat, wie 2 zu 3.



Es sey ACB ein viertel Zirkel, ACDB ein Viereck, ACD ein Dreyeck.

Man stelle sich vor, diese drey Figuren bewegen sich zugleich um die Axe CA, so beschreibet der viertel Zirkel ACB eine halbe Kugel, das Dreyeck ACD einen Kegel, und das Viereck ACDB einen Zylinder.

Man ziehe EF auf CA winkelrecht, so beschreibet EH einen Zirkel, der ein Durchschnitt des Kegels ist, EG einen Zirkel, der ein Durchschnitt der Halbkugel ist, und EF einen Zirkel, der ein Durchschnitt des Zylinders ist.

Im rechtwinklichen Dreyecke AEG ist

$$AG\square = EG\square + AE\square.$$

Es ist aber AG = AB = EF, und es ist AE = EH, weil AC, CD :: AE, EH. Da nun AC = CD, so ist AE = EH. Folglich ist auch

$$EF\square = EG\square + EH\square.$$

Da sich nun die Zirkel verhalten wie die Quadrate ihrer Halbmesser, so ist

$$EF\odot = EG\odot + EH\odot$$

Das ist der Zirkel, der mit dem Halbmesser EF beschrieben ist, wird gleich der Summe der Zirkel, die mit den Halbmessern EG und EH beschrieben sind.

Ziehe MI parallel mit EF, ziehe auch HL und GK parallel mit EM oder mit IF, so entstehen die Parallelogramme EL, EK, EI. Diese beschreiben bey der Bewegung drey Zylinder von gleicher Höhe. Diese Zylinder verhalten sich also wie ihre Grundflächen, das ist wie $EH\odot$, $EG\odot$ und $EF\odot$. Es ist also auch

$$EI\ Zyl. = EK\ Zyl. + EL\ Zyl.$$

Man stelle sich nun einen Körper vor, der aus lauter solchen Zylindern bestehet, wie der von EK beschriebene; und einen Körper, der aus lauter solchen Zylindern bestehet, wie der von EL beschriebene.

So werden alle Zylinder wie EI, die im großen Zylinder enthalten sind, welches vom Viereck ACDB beschrieben wird, gleich seyn der Summe aller Zylinder, wie EK, die in der Kugel beschrieben sind, welche vom viertel Zirkel *A*CB erzeuget wird, sammt allen Zylindern wie EL, die im Kegel enthalten sind, der vom Dreyeck ACD beschrieben wird, oder

$$EI\ Körp. = EK\ Körp. + EL\ Körp.$$

das ist, der Körper, der aus den Theilen EI bestehet, ist gleich dem Körper, der aus den Theilen EK bestehet, sammt dem Körper, der aus den Theilen EL bestehet. Oder es ist

$$EK\ Körp. = EI\ Körp. - EL\ Körp.$$

Je kleiner nun die Höhen EM der Theile genommen werden, desto mehr nähert sich der Körper, der aus den

Theilen

Theilen EK bestehet, der Halbkugel; und der Körper, der aus den Theilen EL bestehet, nähert sich dem Kegel. Der Körper, der aus den Theilen EI bestehet, ist der Zylinder. Also ist die Gränze des Körpers EK die Kugel, die Gränze des Körpers EI ist der Kegel, und die Gränze der Differenz EI Körp. — EL Körp. ist Zylinder — Kegel. Weil nun

EK Körp. = EI Körp. — EL Körp.

so sind auch die Gränzen beyderseits gleich (III§. 18) oder es ist

Halbkugel = Zyl. — Kegel.

Es ist aber der Kegel = $\frac{1}{3}$ des Zylinders. (§. 5.) Also ist

Halbkugel = Zyl. — $\frac{1}{3}$ Zyl.

oder Halbkugel = $\frac{2}{3}$ Zyl.

oder 3 Halbkugeln = 2 Zyl.

oder Halbkugel, Zyl. :: 2, 3.

Das ist, es verhält sich die halbe Kugel zum Zylinder, der mit ihr einen gleichen Durchmesser und gleiche Höhe hat, wie 2 zu 3. Nimmt man die Halbkugel doppelt und den Zylinder doppelt, so verhält sich die ganze Kugel zum Zylinder, der ihren Durchmesser zum Durchmesser und auch zur Höhe hat, wie 2 zu 3.

§. 20.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt der Kugel berechnen.

Auflösung. Es sey der Durchmesser der Kugel a, so ist der Durchmesser des Zylinders (§. 19.) und seine Höhe auch $= a$, folglich (§. 15.)

$$\text{Zyl.} = \frac{a^3\pi}{4}$$

Nun ist

3, 2 :: Zyl. Kug.

oder 3, 2 :: $\frac{a^3\pi}{4}$, Kug.

oder 12, 2 :: $a^3\pi$, Kug.

oder 6, 1 :: $a^3\pi$, Kug. $\left(= \frac{a^3\pi}{6}\right)$

Folglich kann man die Kugel berechnen, wenn man den Kubus des Halbmessers mit dem sechsten Theile der Verhältnißzahl π multiplizirt; gesetzt nemlich, daß in jedem Zirkel der Durchmesser sich zum Umkreise verhalte wie 1 zu π.

Zusatz I. Es seyen die Durchmesser zweyer Kugeln a und A, so verhalten sich die Kugeln

wie $\frac{a^3\pi}{6}$ zu $\frac{A^3\pi}{6}$

oder wie a^3 zu A^3

das ist, die Kugeln verhalten sich wie die Würfel oder Kuben ihrer Durchmesser.

Zusatz II. Es seyen a und A die Durchmesser der Kugeln k und K, so ist

k, K :: a^3, A^3

oder k, a^3 :: K, A^3

das ist, das Verhältniß der Kugel zum Würfel ihres Durchmessers ist bey allen Kugeln das nemliche.

Zusatz III. Wenn der Durchmesser 1 ist, so ist der Würfel des Durchmessers = 1, die Kugel aber ist $\frac{\pi}{6}$, es verhält sich also

Würfel, Kugel :: 1, $\frac{\pi}{6}$

Es ist aber $\pi = 3;141592....$

also $\frac{\pi}{6} = 0;523598....$

oder beynahe $\frac{\pi}{6} = 0;5236.$

Also ist:
Würfel, Kugel :: 1, 0;5236
oder Würfel, Kugel :: 10000, 5236.

Will man sich mit einer geringern Genauigkeit begnügen, so nehme man an, es verhalte sich der Durchmesser zum Umkreise wie 7 zu 22. Ist nun der Durchmesser 1, so hat man

$$7, 22 :: 1, \pi = \frac{22}{7}$$

Da nun $\pi = \frac{22}{7}$, so ist $\frac{\pi}{6} = \frac{22}{6.7}$.

Also ist

Würfel, Kugel :: 1, $\frac{22}{6.7}$
:: 6 × 7, 22
:: 3 × 7, 11
:: 21, 11.

Also verhält sich ohnfähr in kleinen Zahlen der Würfel zur Kugel, die dessen Flächenseite zum Durchmesser hat, wie 21 zu 11.

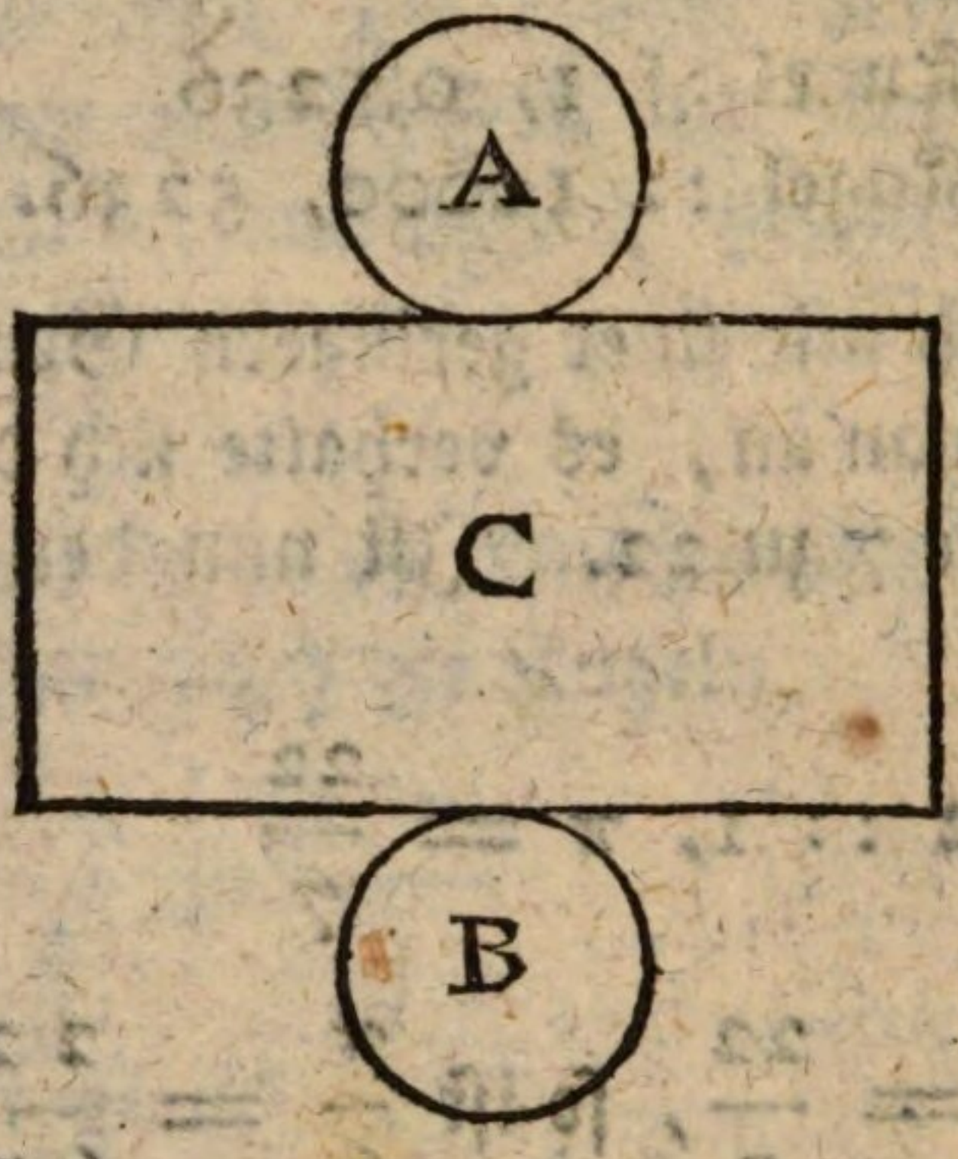
Zusatz IV. Wenn man den Inhalt einer Kugel berechnen will, so darf man also nur den Durchmesser kubiren, und hernach sagen:

wie 10000 zu 5236 } so ist der Kubus des Durch-
oder wie 21 zu 11 } messers, zur Kugel.

§. 21.

Aufgabe.

Die Oberfläche eines geraden Zylinders auszurechnen.



Vorbereitung.

Wenn man die Oberfläche eines Zylinders entwickelt, und auf einer ebenen Fläche ausdehnet, so bestehet sie aus zwey gleichen Zirkeln A und B, nebst einem Parallelogramm C, welches die Höhe des Zylinders hat, und dessen Grundlinie dem Umkreise des Zirkels B oder A gleich ist.

Es sey also der Durchmesser des Zirkels A oder B $= a$, so ist der Umkreis $a\pi$, der Flächen-Inhalt des Zirkels $\frac{a^2\pi}{4}$.

Es sey die Höhe des Zylinders h, so ist das Parallelogramm $C = a\pi \times h$.

Auflösung. Will man die beyden Grundflächen ausschließen, so ist die übrige Oberfläche des Zylinders $= ah\pi$.

Will man die beyden Zirkel mit rechnen, so hat man zur Oberfläche:

$$ah\pi + \frac{2a^2\pi}{4}$$

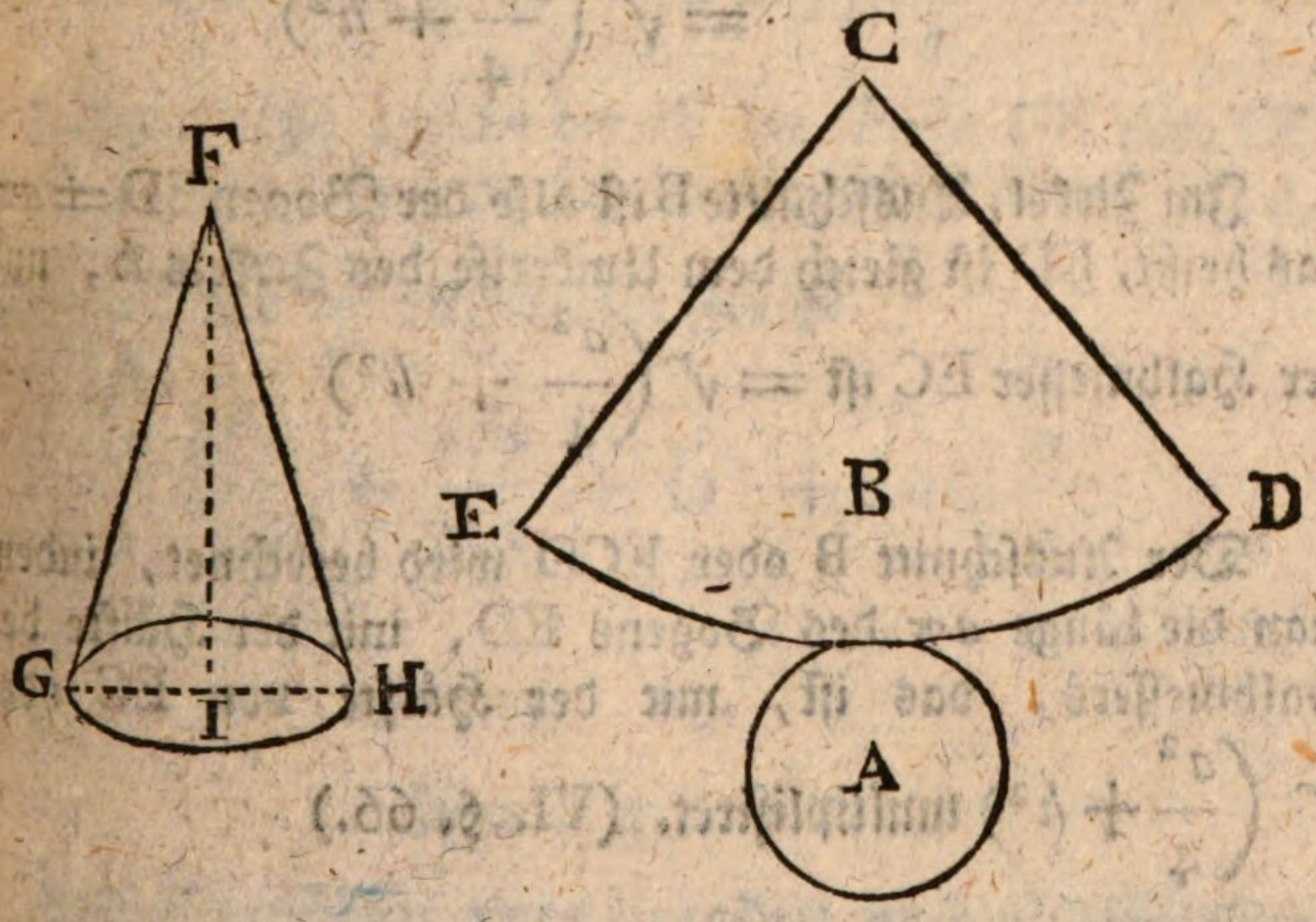
oder

$$(2ah + a^2).\frac{\pi}{2}$$

§. 22.

Aufgabe.

Die Oberfläche eines geraden Kegels auszurechnen.



Vorbereitung.

Man entwickele die Oberfläche des geraden Kegels auf einer Ebene, so bestehet sie aus einem Zirkel A, der die

Grundfläche ausmachet, und einem Zirkel-Ausschnitte B, dessen Bogen ED die nemliche Länge hat als der Umkreis des Zirkels A. Hingegen der Halbmesser CE ist der Seite FG des Kegels gleich.

Gesetzt nun es sey gegeben der Durchmesser GH des Zirkels A der die Grundfläche ausmacht, und die Höhe FI des Kegels. Es sey $GH = a$ und $FI = h$. So ist der Umkreis des Zirkels $A = a\pi$, und die Fläche desselben ist $\frac{a^2\pi}{4}$.

Ferner ist $GI = \frac{1}{2}a$, und im rechtwinklichen Dreyecke FIG ist.

$$GF\,(= CE) = \sqrt{(GI^2 + IF^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right)}$$

Im Zirkel-Ausschnitte B ist also der Bogen $ED = a\pi$, das heißt, ED ist gleich dem Umkreise des Zirkels A, und der Halbmesser EC ist $= \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right)}$

Der Ausschnitt B oder ECD wird berechnet, indem man die Länge $a\pi$ des Bogens ED, mit der Hälfte des Halbmessers, das ist, mit der Hälfte von EC oder $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right)}$ multiplizirt. (VI. §. 66.)

Folglich ist

$$\text{Ausschnitt ECD} = \tfrac{1}{2} a\pi \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + h^2\right)}$$

$$= \frac{a\pi \sqrt{(a^2 + 4h^2)}}{4}$$

Auflösung. Wenn der größte Durchmesser a und die Höhe h ist, so ist die Grundfläche allein

$$\frac{a^2\pi}{4}$$

Die übrige Fläche allein ist

$$\frac{a\pi \sqrt{(a^2 + 4h^2)}}{4}$$

Beydes zusammen machet:

$$[a^2 + a \sqrt{(a^2 + 4h^2)}] \cdot \frac{\pi}{4}$$

Zusatz. Ist anstatt der IF die Seite GF oder CE ($= l$) gegeben, so wird der Ausschnitt ECD $= \tfrac{1}{2} la\pi$, oder $\frac{al\pi}{2}$, und die vollständige Fläche

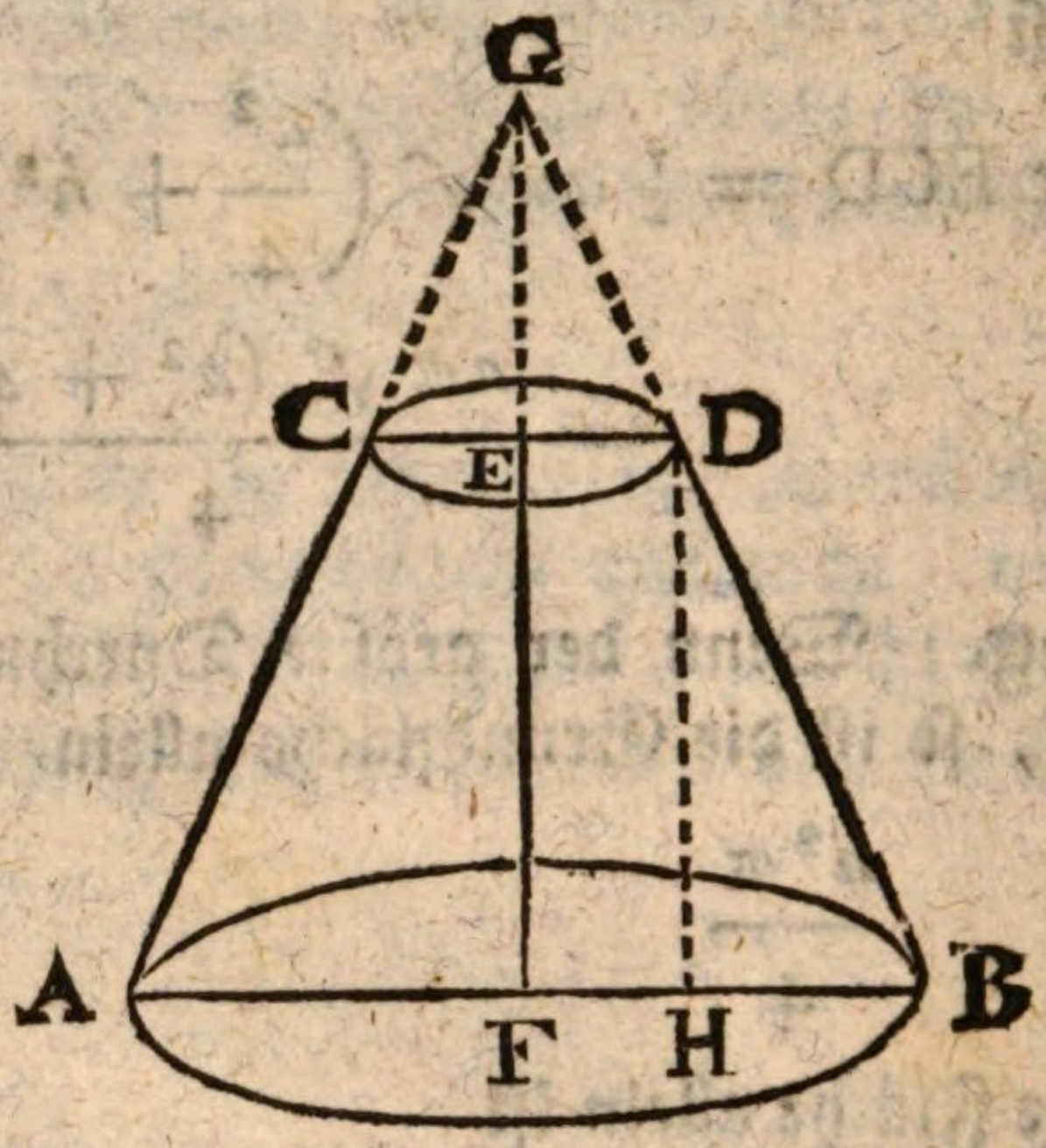
$$\frac{a^2\pi}{4} + \frac{al\pi}{2} + (a^2 + 2al) \cdot \frac{\pi}{4}$$

§. 23.

Aufgabe.

Die Oberfläche eines geraden und abgeköpften Kegels ausrechnen.

(Siehe die folgende Figur.)



Vorbereitung.

Es sey der größte Halbmesser AB $= a$, der kleinste CD $= c$, die Höhe EF oder DH $= h$, so ist in den ähnlichen Dreyecken BHD und BFG.

BF, BH :: FG, HD

(BF — BH), BH :: (FG — HD), HD

oder FH, ... BH :: (FG — FE), FE

oder ED, ... BH :: EG, FE

$\frac{1}{2}c$, $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c)$ :: EG, h

$\frac{c}{2}$, $\frac{a-c}{2}$ :: EG, h

c, $(a-c)$ :: EG, h

$(a-c)$, c :: h, EG $= \left(\frac{hc}{a-c}\right)$

Da nun im Kegel GCD der Durchmesser $CD = c$, und die Höhe $GE = \frac{hc}{a-c}$, so ist die auswendige Fläche des Kegels

$$\frac{c\pi}{4}\sqrt{\left(c^2+\frac{4h^2c^2}{(a-c)^2}\right)} = \frac{c^2\pi}{4}\sqrt{\left(1+\frac{4h^2}{(a-c)^2}\right)}$$

Im Kegel GAB ist der größte Durchmesser $AB = a$, und die Höhe $FG = FE + EG = h + \frac{hc}{a-c} = \frac{ah}{a-c}$, also ist die auswendige Fläche des Kegels

$$\frac{a\pi}{4}\sqrt{\left(a^2+\frac{4a^2h^2}{(a-c)^2}\right)} = \frac{a^2\pi}{4}\left(\sqrt{1+\frac{4h^2}{(a-c)^2}}\right)$$

Auflösung. Ziehet man von dieser letzten Fläche die erste ab, so ist die auswendige Fläche des abgeköpften Kegels, ohne die beyden Zirkel

$$\frac{a^2\pi}{4}\sqrt{\left(1+\frac{4h^2}{(a-c^2}\right)} - \frac{c^2\pi}{4}\sqrt{\left(1+\frac{4h^2}{(a-c)^2}\right)}$$

oder

$$\frac{\pi}{4}\cdot(a^2-c^2)\cdot\sqrt{\left(1+\frac{4h^2}{(a-c)^2}\right)}$$

§. 24.

Aufgabe.

Die Oberfläche einer Kugel finden.

Vorbereitung.

Man stelle sich eine Kugel vor, auf welcher lauter kleine rechtlinichte Ebenen abgeschnitten sind, so entstehet ein Körper der aus lauter Pyramiden zusammengesetzt ist welche

welche auswendig ihre Grundflächen, und ihre Spitzen im Mittelpunkte haben. Wir können noch annehmen, daß die Pyramiden gleiche Höhe haben, die Grundflächen aber können eine Gestalt bekommen wie man will.

So ist jede Pyramide das Produkt aus ihrer Grundfläche und dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe. Folglich ist der ganze Körper, oder die Summe aller Pyramiden, das Produkt aus dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe, und der ganzen auswendigen Oberfläche.

Je kleiner man die auswendigen Flächen annimmt, desto mehr nähert sich der Körper der Größe der Kugel. Das Produkt der Oberfläche und des dritten Theiles der Höhe, nähert sich aber dem Produkte aus der Oberfläche der Kugel und dem dritten Theile des Halbmessers.

Da nun gedachter Körper beständig dem Produkte seiner Oberfläche und des dritten Theiles der gemeinschaftlichen Höhe gleich ist, so sind auch die Gränzen beyder Größen gleich. (III. §. 18.)

Nemlich es ist die Kugel gleich dem Produkte der runden Oberfläche und des dritten Theiles vom Halbmesser.

Es sey der Halbmesser der Kugel $= a$, so ist die Kugel selbst $= \frac{a^3 \pi}{6}$. (§. 20.) Es sey die Oberfläche der Kugel $= X$, so ist, zufolge des Vorigen, auch die Kugel $= X$ multipliziret mit dem dritten Theile des Halbmessers oder mit dem sechsten Theile des Durchmessers, also $= \frac{aX}{6}$. Es muß dann seyn

$$\frac{a^3 \pi}{6} = \frac{aX}{6}$$

$$a^3 \pi = aX$$

$$a^2 \pi = X$$

Es

Es ist aber $\frac{a^2\pi}{4}$ die Fläche des Zirkels der den nemlichen Durchmesser a hat als die Kugel. Man kann also auch schreiben

$$4\left(\frac{a^2\pi}{4}\right) = X$$

oder die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß als der Zirkel der den Durchmesser der Kugel hat.

Oder die Oberfläche der Kugel ist einem Zirkel gleich der den doppelttn Durchmesser der Kugel hat, oder der den Durchmesser der Kugel zum Halbmesser hat. Denn ist der Durchmesser doppelt, so wird der Zirkel vierfach.

Auflösung. Man berechne einen Zirkel, dessen Durchmesser doppelt so groß ist als der Durchmesser der Kugel, so hat man die Oberfläche der Kugel.

Oder man quadrire den Durchmesser, und multiplizire das Quadrat mit der Verhältnißzahl π, welche die Peripherie eines Zirkels andeutet, dessen Durchmesser $= 1$ ist.

Zusatz I. Wenn der Durchmesser der Kugel 1 ist, so wird $a^2\pi$ zu π, das ist, die Verhältnißzahl π drücket zugleich die Oberfläche der Kugel aus.

Zusatz II. Wenn der Halbmesser zweyer Kugeln a und A sind, so verhalten sich die Oberflächen wie $a^2\pi$ zu $A^2\pi$ oder wie a^2 zu A^2, das ist, wie die Quadrate der Durchmesser.

§. 25.

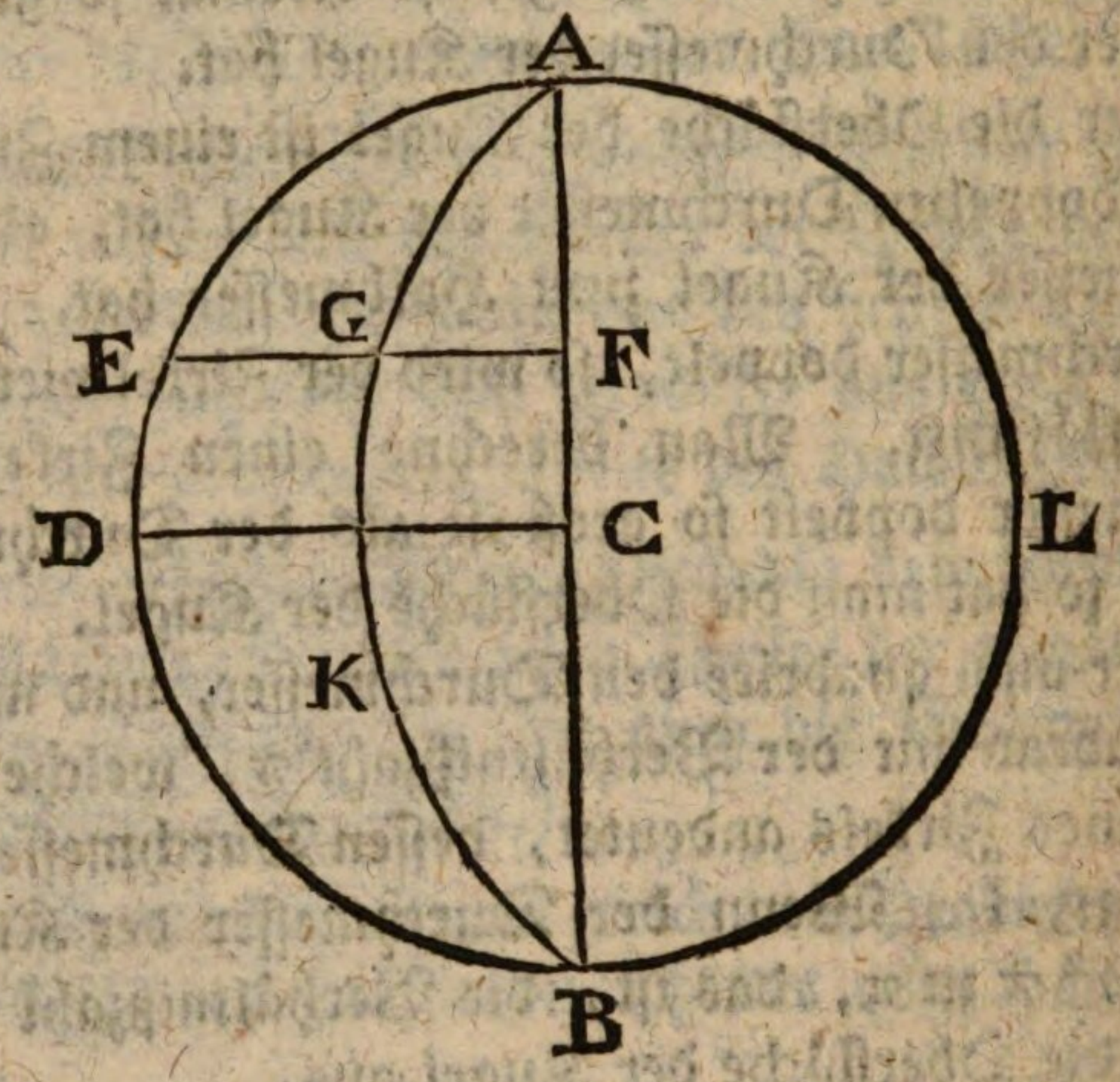
Da wir eben von der Oberfläche der Kugel handeln, so ist hier der Ort, wo wir etwas von den Zirkeln und Zirkelbogen sagen müssen, die auf solcher Oberfläche beschrieben werden können.

§. 26.

Große Zirkel auf der Kugel sind solche, die den nemlichen Mittelpunkt und Halbmesser als die Kugel selbst haben. Kleine Zirkel hingegen sind solche, die ihren Mittel-

telpunkt nicht im Mittelpunkte der Kugel haben, und die folglich einen kleineren Halbmesser als die Kugel haben.

Man stelle sich vor, daß der Halbmesser AB eines Zirkels unverrückt bleibet, und daß der halbe Umkreis AEDB sich um diesen Halbmesser umdrehet. Der Punkt D sey von A und B gleich weit entfernet, so beschreibet dieser Punkt einen Zirkel der seinen Mittelpunkt C und seinen Halbmesser DC mit der Kugel gemein hat. Hingegen jeder



andere Punkt, als E, beschreibet einen kleinen Zirkel, dessen Halbmesser EF auf AB senkrecht ist, aber kleiner als DC, und dessen Mittelpunkt F außer dem Mittelpunkte C der Kugel lieget.

Der Zirkel AEDBLA, dessen Hälfte AEDB die Kugel beschreibet, ist allemal ein großer Zirkel, weil er seinen Halbmesser AC und seinen Mittelpunkt C mit der Kugel gemein hat. Eben so ist AGKB die Hälfte eines großen Zirkels, weil AGKB nichts anders als der halbe Zirkel AEDB ist, der bey der Umwendung eine andere Lage bekommen hat.

§. 27.

§. 27.

Eine **Spindel** (un fuseau) ist ein Theil der Kugelfläche wie AEDBKGA (in vorhergehender Figur), der zwischen zwey Hälften von großen Zirkeln enthalten ist.

§. 28.

Die **Axe** eines großen Zirkels ist derjenige Durchmesser der Kugel, der auf der Fläche des großen Zirkels und folglich auf jedem Durchmesser desselben senkrecht stehet. Die Axe eines großen Zirkels gehet also durch den Mittelpunkt desselben und endiget sich in zwey Punkten der Kugelfläche. Z. E. in letzter Figur ist AB die Axe des großen Zirkels den der Punkt D beschreibet, und wenn man den Halbmesser CD auf der Ebene des Papieres im Punkte C senkrecht errichtete, so wäre diese CD die halbe Axe des großen Zirkels ADBIA.

§. 29.

Die **Pole** eines großen Zirkels, sind beyde Enden seiner Axe. Z. E. A und B sind die Pole des großen Zirkels den der Punkt D beschreibet.

§. 30.

Jeder kleine Zirkel hat auch seine Axe und seine Pole. Wenn man sich nemlich immer vorstellet der halbe Zirkel AEDB beschreibe die Kugel, und der Punkt E beschreibe einen Zirkel in der Kugelfläche, so ist AB die Axe nicht nur des großen Zirkels den der Punkt D beschreibet, sondern auch des kleinen Zirkels den E beschreibet, und der EF zum Halbmesser hat. Die Punkte A und B sind ebenfalls die Pole dieses kleinen Zirkels.

§. 31.

Alle kleine Zirkel, wie der Zirkel den der Halbmesser EF beschreibet, die mit dem großen Zirkel, den der

Halbmesser DC beschreibet, einerley Axe AB und einerley Pole A und B haben, werden Parallel-Zirkel dieses großen Zirkels genannt, und sind auch in der That mit ihm parallel, weil bey der Entstehung der Kugel die Halbmesser FE und CD allemal parallel bleiben, und die Entfernung ED der Umkreise, sich nicht verändert.

§. 32.

Die Entfernung zweyer Punkte auf der Kugelfläche wird vermittelst des Bogens eines großen Zirkels gemessen, der von dem einen Punkte zum andern gehet. Z. E. der Bogen ED des großen Zirkels AEDBLA bestimmet auf der Kugelfläche die Entfernung der Punkte E und D. Weiß man also wie viel Grade der Bogen DE hält, so weiß man wie weit seine Enden D und E von einander entfernet sind. Weil dieses Maaß beständig und bestimmet ist, so muß man dabey bleiben, und wann von Bogen auf der Kugel geredet wird, so verstehet man allemal Bogen von großen Zirkeln, es müßte denn ausdrücklich das Gegentheil gesagt werden.

§. 33.

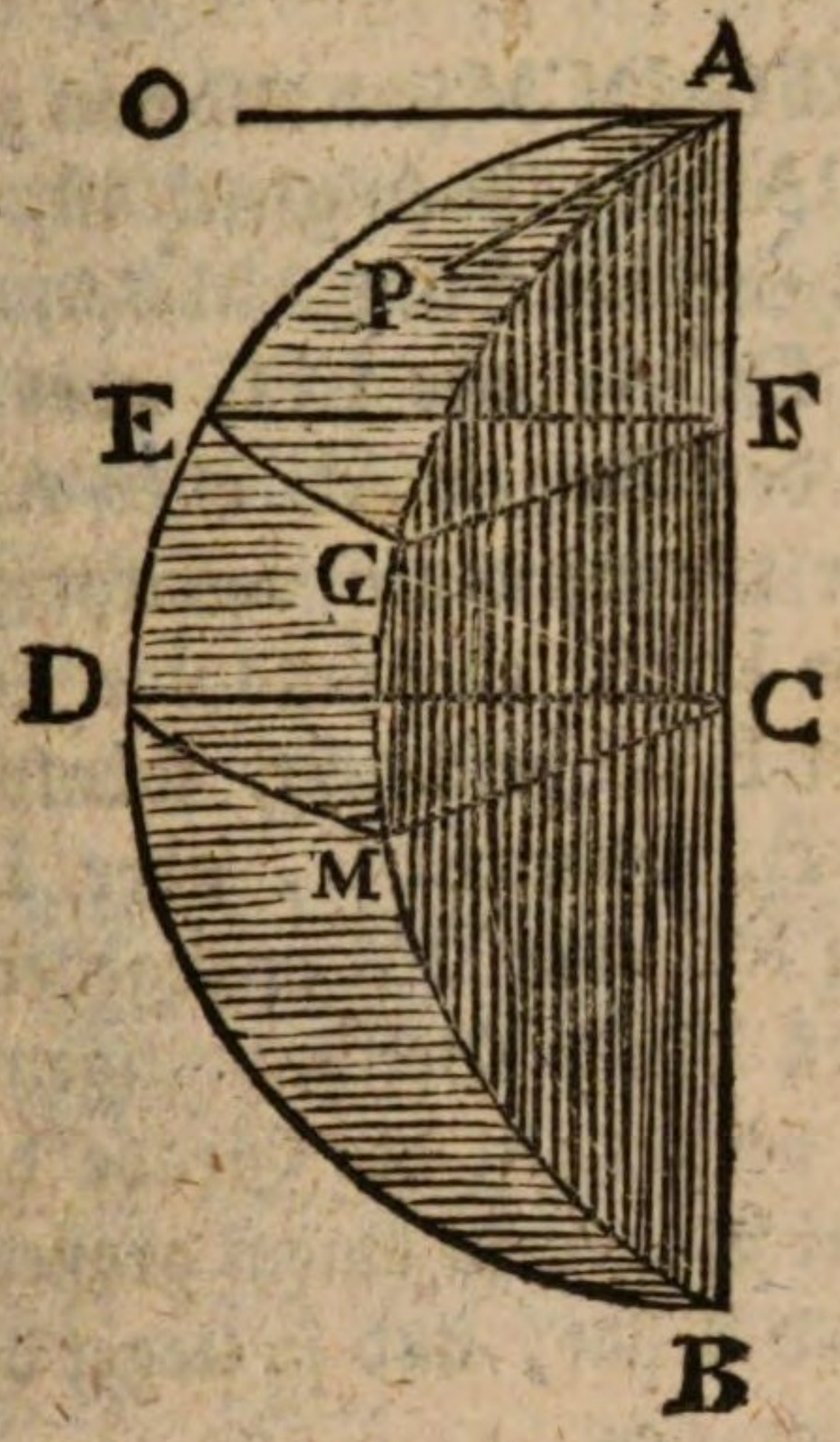
Ein sphärischer Winkel ist die Neigung zweyer Bogen gegen einander, bey den Punkten, wo diese Bogen einander begegnen, und es kömmt hierbey nicht auf die Länge der Bogen, sondern blos auf gedachte Neigung an.

§. 34.

Ein sphärischer Winkel wird bestimmt entweder durch den geradlinichten Winkel, den beyde gerade Linien, welche die Bogen berühren, mit einander machen, oder durch einen Bogen des großen Zirkels der den Scheitel des Winkels zum Pole hat, oder durch einen Bogen jedes andern Zirkels der den nemlichen Scheitel zum Pole hat, oder durch die Neigung der Ebnen beyder Schenkel. Die

Bestim-

Bestimmung vermittelst des großen Zirkels ist die gebräuchlichste.



Z. E. man stelle sich vor der halbe Zirkel AEDBA beschreibe eine Kugel, und es sey AO die gerade Linie welche den Bogen EA im Punkte A berühret. Folglich ist AO senkrecht auf AC oder auf AB. Es seyen auch EF und DC senkrecht auf AB, der Punkt D sey von A und B gleich weit entfernet.

Bey der Umwendung werden sowohl der Bogen AE, als die berührende Linie AO, wie auch der Punkt E und der Punkt D, desgleichen die Linien EF und DC, ebenfalls die Fläche AEDBA, alle zu gleicher Zeit einen gleichen Theil der Umwendung vollenden.

Es sey also die Ebne AEDBA in die Lage AGMBA gekommen, AE in AG, AO in AP, FE in FG, CD in CM, der Punkt E in G, der Punkt D in M. Gesetzt die Fläche habe den zehnten Theil der Umwendung vollendet, so haben auch die Punkte E und D den zehnten Theil der

Anwendung vollendet, desgleichen die Linien FE, CD, AO und der Bogen AE. Es wäre demnach der Bogen EG von $\frac{360}{10} = 36$ Grad, desgleichen der Bogen DM von 36 Grad.

Die Winkel EFG, DCM sind also von 36 Grad, folglich auch der Winkel OAP der ihnen gleich ist, folglich auch die Neigung der Flächen ADBA und AMBA, welche Neigung von den Winkel DCM oder EFG oder OAP gemessen wird. Da nun der Bogen AE oder AD ebenfalls den zehnten Theil der Umwendung verrichtet hat, so ist der Winkel EAG oder DAM ebenfalls von 36 Grad. Also wird dieser Winkel EAG bestimmt, sobald man die Grade des Winkels OAP, oder EFG, oder DCM, oder die Grade der Bogen EG oder DM anzugeben weiß.

Aber von allen diesen Bestimmungen ist diejenige am bequemsten, die vermittelst der Grade des Bogens DM geschiehet, welcher Bogen zu einem großen Zirkel gehöret, seine Pole in A und B hat, und so lieget daß AD (= AM = BD = BM) = 90s.

Uebrigens ist es sichtbar, daß vermöge der eben jetzt beschriebenen Umwendung, in B ein sphärischer Winkel entstehet, der dem Winkel EAG allemal gleich ist.

§. 35.

In einer Kugel sind alle große Zirkel gleich.

Denn sie haben alle den selbigen Halbmesser, nemlich den Halbmesser der Kugel.

§. 36.

Kleine Zirkel in der nemlichen Kugel oder in gleichen Kugeln, deren Mittelpunkte vom Mittelpnnkte der Kugel gleich weit entfernt sind, sind einander gleich, weil ihre Halbmesser gleich sind. Die Halbmesser sind aber gleich, weil sie nichts anders als die halben Sehnen gleicher Bogen sind, in dem Zirkel der die Kugel beschreibet.

§. 37.

Je weiter der Mittelpunkt eines kleinen Zirkels vom Mittelpunkte der Kugel entfernt ist, desto kleiner ist solcher Zirkel. Denn da der Halbmesser jedes kleinen Zirkels als die halbe Sehne eines Bogens des beschreibenden Zirkels angesehen werden kann, so muß diese halbe Sehne immer kleiner und kleiner werden, nachdem der Bogen selbst kleiner wird, das ist, nachdem man sich vom Mittelpunkte des beschreibenden Zirkels, oder der Kugel entfernet.

§. 38.

Von einem Punkte der Kugelfläche zu einem andern kann allemal ein, und nur ein einziger, Bogen eines großen Zirkels gezogen werden.

Denn durch die gegebnen zwey Punkte und den Mittelpunkt der Kugel kann eine und nur eine einzige Ebne gehen. (VIII. §. 10. Zus.)

Und solche Ebne schneidet in der Kugel einen großen Zirkel, weil solcher Zirkel seinen Mittelpunkt im Mittelpunkte der Kugel hat, und weil seine Halbmesser, die von den gegebenen Punkten zum Mittelpunkte gehen, zugleich Halbmesser der Kugel sind. Daß aber jeder ebne Schnitt der Kugel ein Zirkel sey, läßt sich leicht aus der Entstehung der Kugel begreifen. (§. 4 u. 26.)

§. 39.

Zwei große Zirkel in einer Kugel halbiren einander, und die Punkte, wo ihre Umkreise einander schneiden, sind 180 Grade von einander entfernet.

Denn alle große Zirkel gehen durch den Mittelpunkt der Kugel, und schneiden folglich einander in einer geraden Linie die durch den Mittelpunkt der Kugel gehet. Solche Linie ist also zugleich ein Durchmesser der Kugel und beyder Zirkel, also schneidet sie jeden Zirkel in zwey gleiche

Theile, das ist sie schneidet dieselben so, daß jeder abgeschnittene Bogen 180s ausmachet.

§. 40.

Jeder Punkt in der Peripherie eines großen Zirkels ist 90 Grad von den Polen des nemlichen großen Zirkels entfernet.

Denn man stelle sich in obiger Figur vor, der Punkt D beschreibe einen großen Zirkel (§. 34.), dessen Axe AB und dessen Pole A und B sind, so ist D in jeder Lage gleich weit von A und B entfernet, das ist, der Bogen DA ist gleich dem Bogen DB, also jeder von 90 Graden.

§. 41.

Zwey große Zirkel in der Kugel können nicht die nemlichen Pole haben.

Denn, da die Axe eines großen Zirkels auf demselben senkrecht stehet, so kann die nemliche nicht zugleich auf zwey großen Zirkeln senkrecht seyn. Also können sie nicht die nemliche Axe, folglich auch nicht die nemlichen Pole haben.

§. 42.

Die Pole eines großen Zirkels sind zugleich die Pole aller kleinen Zirkel die mit dem großen parallel sind. Dieses erhellet hinlänglich aus der Entstehung der Parallel-Zirkel. (§. 31.)

§. 43.

Der Bogen eines großen Zirkels der auf der Kugel zwischen zwey Punkten gezogen wird, ist kleiner als jeder andere Bogen eines kleinen Zirkels der zwischen den nemlichen Punkten gezogen werden könnte. Denn wenn die

Um-

Umkreise verschiedener Zirkel durch zwey unveränderte Punkte gehen, so nähert sich der Bogen, der von beyden Punkten abgeschnitten wird, desto mehr der geraden Linie, je größer der Zirkel ist, und folglich geben größere Zirkel kleinere Bogen. Also auch auf der Kugel giebt ein großer Zirkel allemal zwischen zwey Punkten einen kürzeren Bogen, als ein kleiner Zirkel.

Und eben aus dieser Ursache hat man den Bogen eines großen Zirkels zum Maaße der Entfernung zweyer Punkte auf der Kugelfläche gewählet.

§. 44.

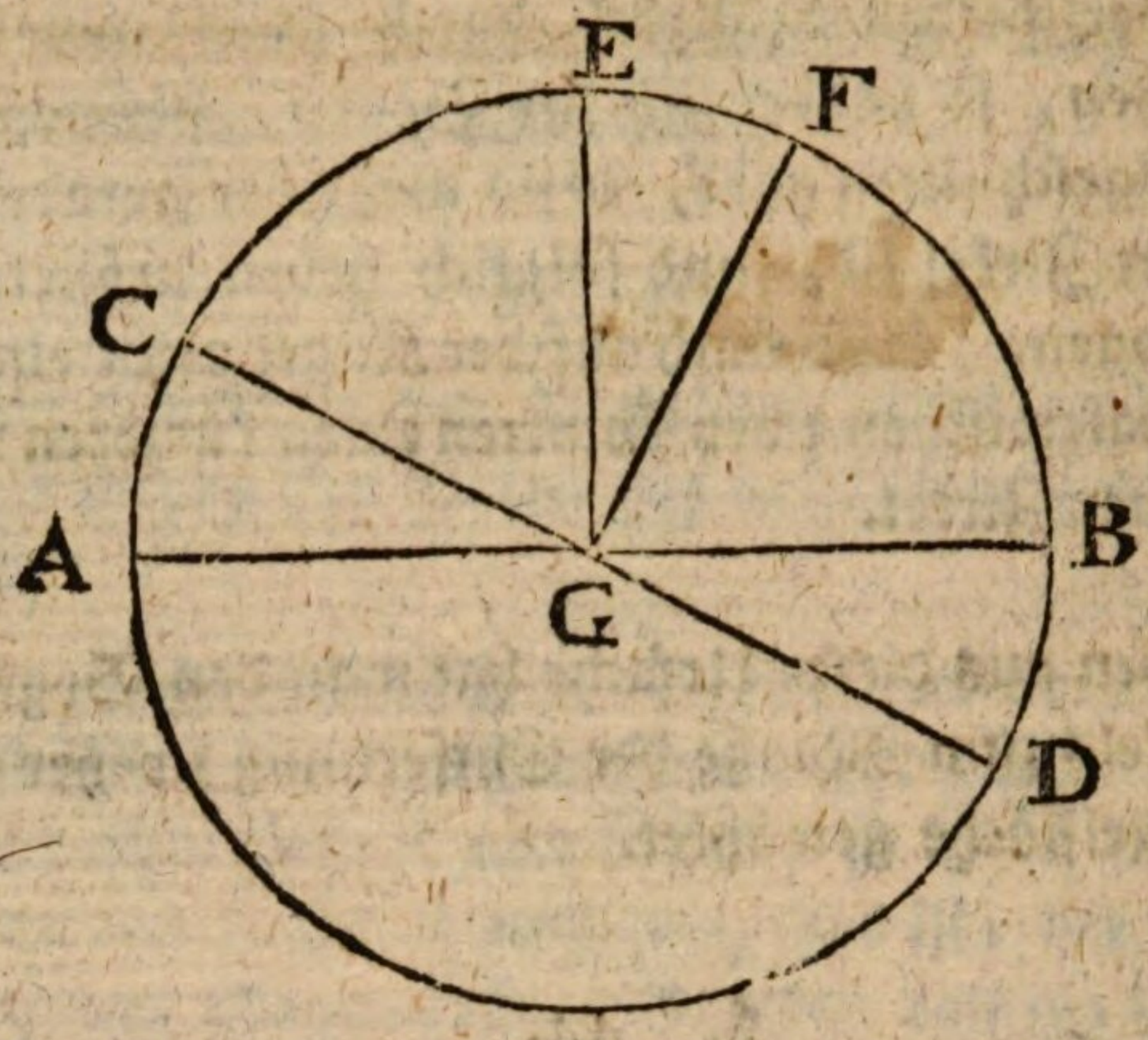
Die Punkte wo zwey Umkreise großer Zirkel einander schneiden, sind die Pole des Bogens, der das Maaß der gleichen Winkel giebt, welche neben solchen Punkten entstehen.

Z. E. die Punkte A und B in der Figur bey §. 34. sind die Pole des Bogens DM der den Winkel EAC oder DBM bestimmet.

§. 45.

Wenn zwey große Zirkel eine gewisse Neigung gegen einander haben, so haben ihre Axen die nemliche Neigung gegen einander.

(Siehe die folgende Figur.)



Denn es seyen AB, CD die Flächen zweyer großer Zirkel, GE, GF ihre Axen, so ist EG senkrecht auf AB und GF senkrecht auf CD. Also ist AE = 90°, und FC = 90 Grad, oder AE = CF. Nimm beyderseits CE ab, so bleibet AC = EF.

§. 46.

Wenn ein sphärischer Winkel ein rechter ist, das ist, wenn er 90 Grade hält, so müssen dessen Schenkel, wenn sie, so viel als nöthig ist, verlängert werden, so beschaffen seyn, daß jeder durch den Pol des andern gehe.

Denn, da der rechte sphärische Winkel 90 Grade hält, so sind dessen Schenkel Theile von Zirkeln, die einander unter einer Neigung von 90 Graden schneiden (§. 34.). Also haben ihre Axen auch eine Neigung von 90 Graden (§. 45.). Demnach lieget die Axe des einen Zirkels in der Ebne des anderen, und folglich lieget der Pol des einen Zirkels in der Peripherie des anderen.

§. 47.

Alle Bogen, die auf einem großen Zirkel senkrecht stehen, das heißt, die ihn unter zwei Nebenwinkeln, jedem von

90 Graden schneiden, laufen in den Polen des Zirkels zusammen.

Denn jeder Bogen, der mit dem nemlichen Zirkel 90 Grad machet, muß durch die Pole des Zirkels gehen (§. 46.). Demnach gehen alle Bogen durch diese Pole.

Wäre auch der Zirkel kein großer, so fände das nemliche statt. Denn der kleine Zirkel ist mit irgend einem großen parallel (§. 31.). Die Bogen, die auf dem kleinen senkrecht sind, sind also auch auf dem großen senkrecht, und gehen durch seine Pole (§. 46.), die zugleich die Pole des kleinen Zirkels sind (§. 42.).

§. 48.

Die Entfernung zwischen den Polen zweier großer Zirkel mißt zugleich die Neigung beider Zirkel.

Denn in der Figur bei §. 45. ist EF = AC. Es mißt aber AC die Neigung CGA beider großer Zirkel, also mißt EF die Neigung der nemlichen Zirkel.

§. 49.

Zwei sphärische Scheitelwinkel sind gleich.

Denn die geraden Linien, die ihre Schenkel berühren, machen gleiche Scheitelwinkel, also auch die sphärischen Schenkel selbst.

§. 50.

Zwei sphärische Nebenwinkel machen allemal zusammen 180 Grad.

Denn die geraden Linien, welche beide Bogen berühren, machen zwei Nebenwinkel, deren Summe zweien Rechten oder 180 Graden gleich ist.

§. 51.

Wenn zwei oder mehrere Bogen auf der Kugel durch einen Punkt gehen, so entstehen um solchen Punkt vier oder mehrere Winkel, die zusammen 360 Grad machen.

Denn, ziehet man die geraden Linien, welche die Bogen im gegebenen Punkte berühren, so liegen solche gerade Linien alle in einer Ebne, und machen zusammen 360 Grad. Daß sie aber in einer Ebne liegen, ist daher deutlich zu erkennen, weil der nemliche Durchmesser der Kugel auf allen senkrecht stehet.

§. 52.

Dieses mag für jetzt von den sphärischen Winkeln genug seyn. Wir werden in einem der folgenden Hauptstücke weiter gehen, und auch die Dreyecke betrachten, die auf der Kugelfläche aus drei einander schneidenden Bogen entstehen.

Zehntes Hauptstück.

Von den fünf regulären Körpern.

§. 1.

Ein regulärer Körper ist ein solcher, der in lauter ähnlichgleichen Flächen eingeschlossen ist.

Wir wollen in diesem Hauptstücke vornehmlich lehren, wie die regulären Körper in einer Kugel eingeschrieben werden können, so daß alle Punkte, wo die Flächen des Körpers zusammenstoßen, in der Oberfläche der Kugel liegen. Diese Lehre wird aber noch einige andere Sätze erfordern, die wir an den Stellen, wo es nöthig ist, einschalten müssen. Uebrigens müssen wir gestehen, daß diese ganze Theorie keinen sonderlichen Nutzen hat, und nur als eine gute Uebung des Scharfsinns zu betrachten ist. Wer also nicht viel Zeit auf die Geometrie zu verwenden hat, kann dieses Hauptstück übergehen, ohne zu befürchten, daß er dadurch in seinem weiteren Fortgange gehindert werde.

§. 2.

Man zählet fünf reguläre Körper, nemlich

1) Das Tetraedron, welches in 4 regulären oder gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen ist.

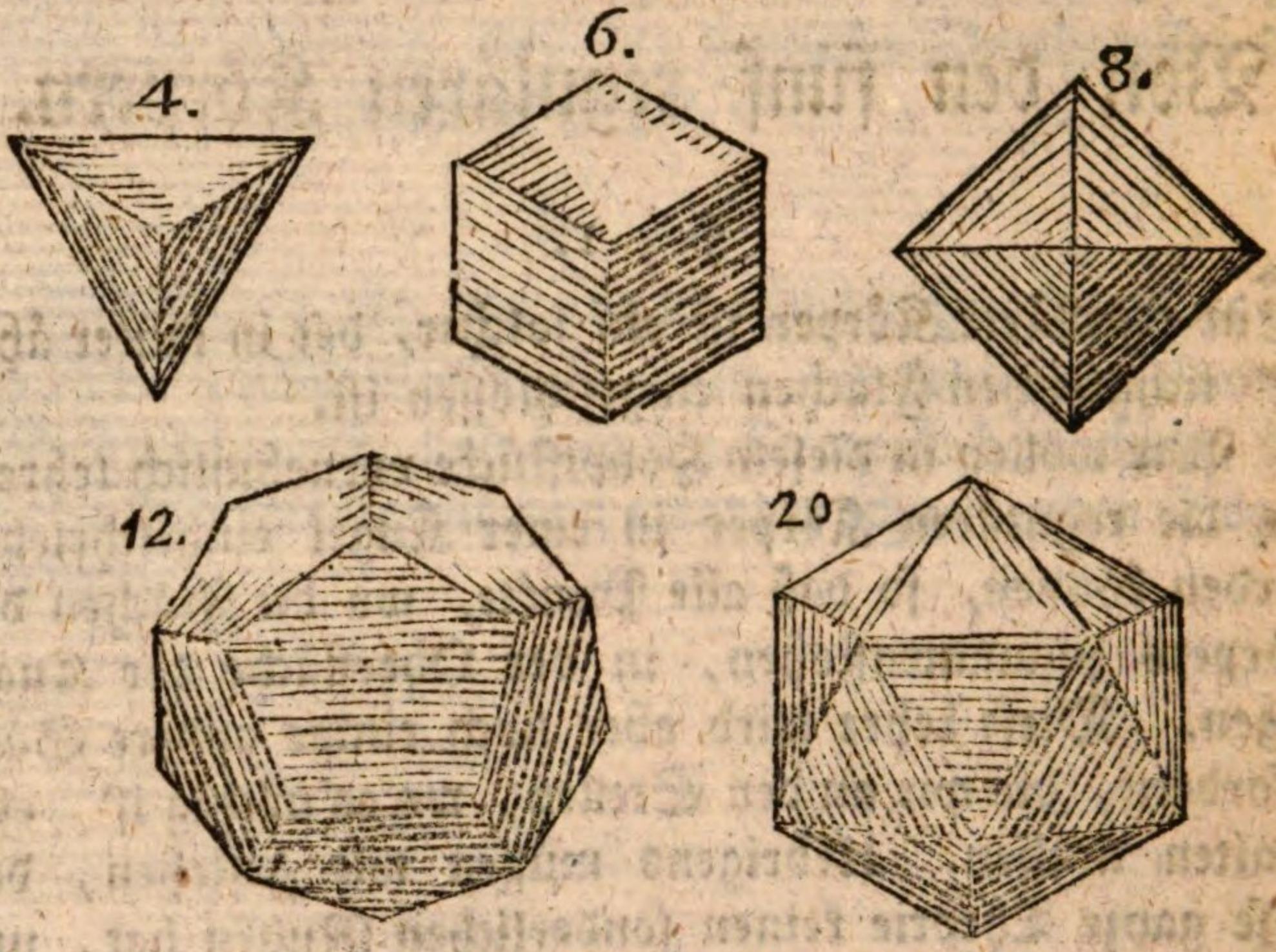
2) Das Hexaedron, welches in 6 Quadraten oder regulären Vierecken eingeschlossen ist. Es ist der nemliche Körper, den man auch einen Würfel oder Kubus nennet.

3) Das Oktaedron, welches in 8 regulären Dreiecken eingeschlossen ist.

4) Das Dodekaedron, welches in 12 regulären Fünfecken eingeschlossen ist.

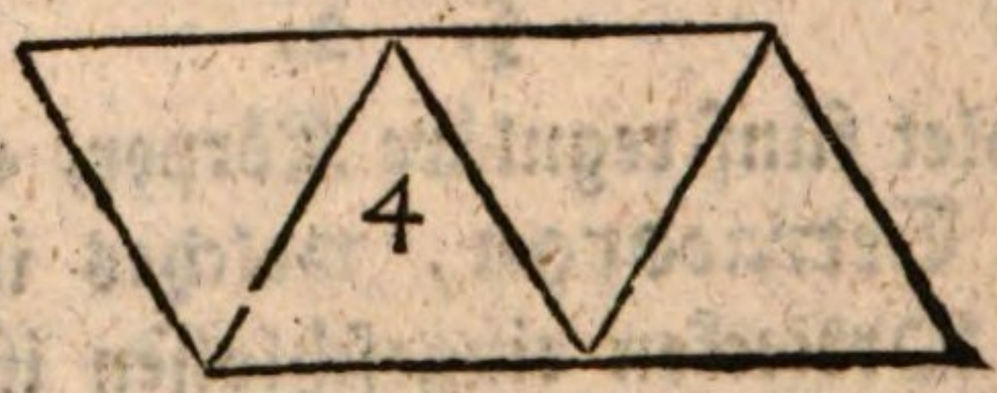
5) Das Ikosaedron, welches in 20 regulären Dreiecken eingeschlossen ist.

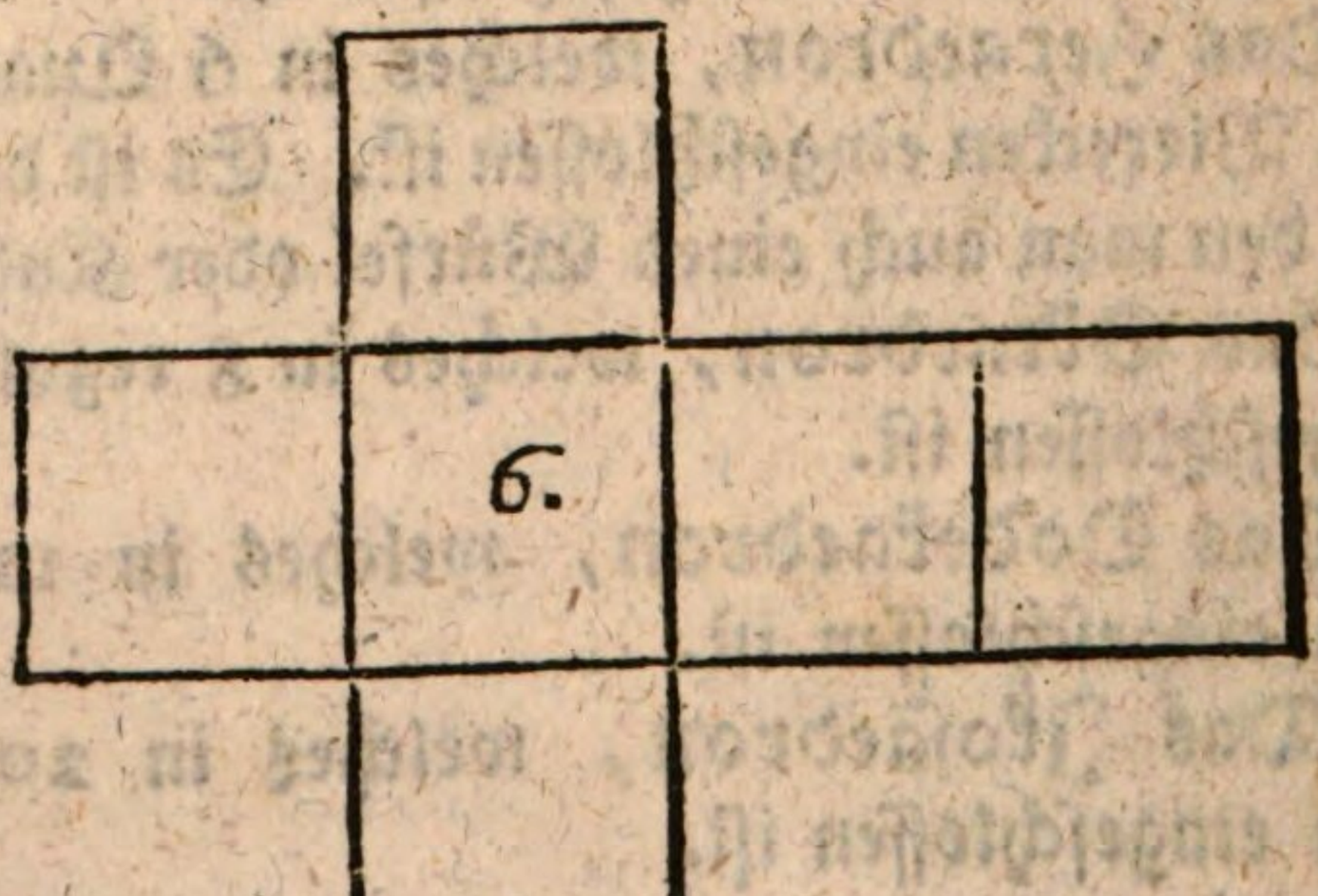
Folgende Figuren stellen ohngefähr die perspektivischen Bilder der fünf regulären Körper vor. Die Zahlen bedeuten die Anzahl der Flächen.



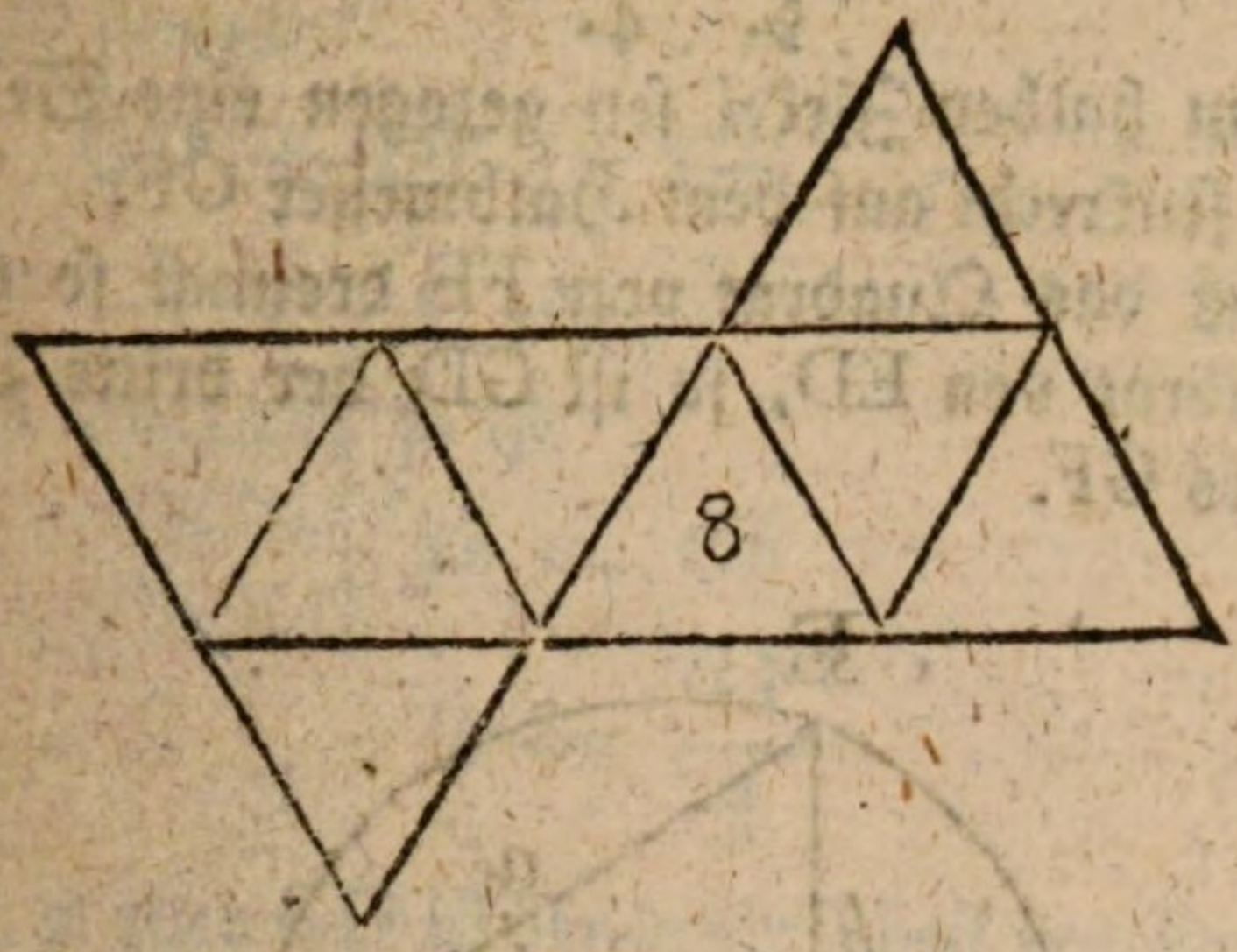
§. 3.

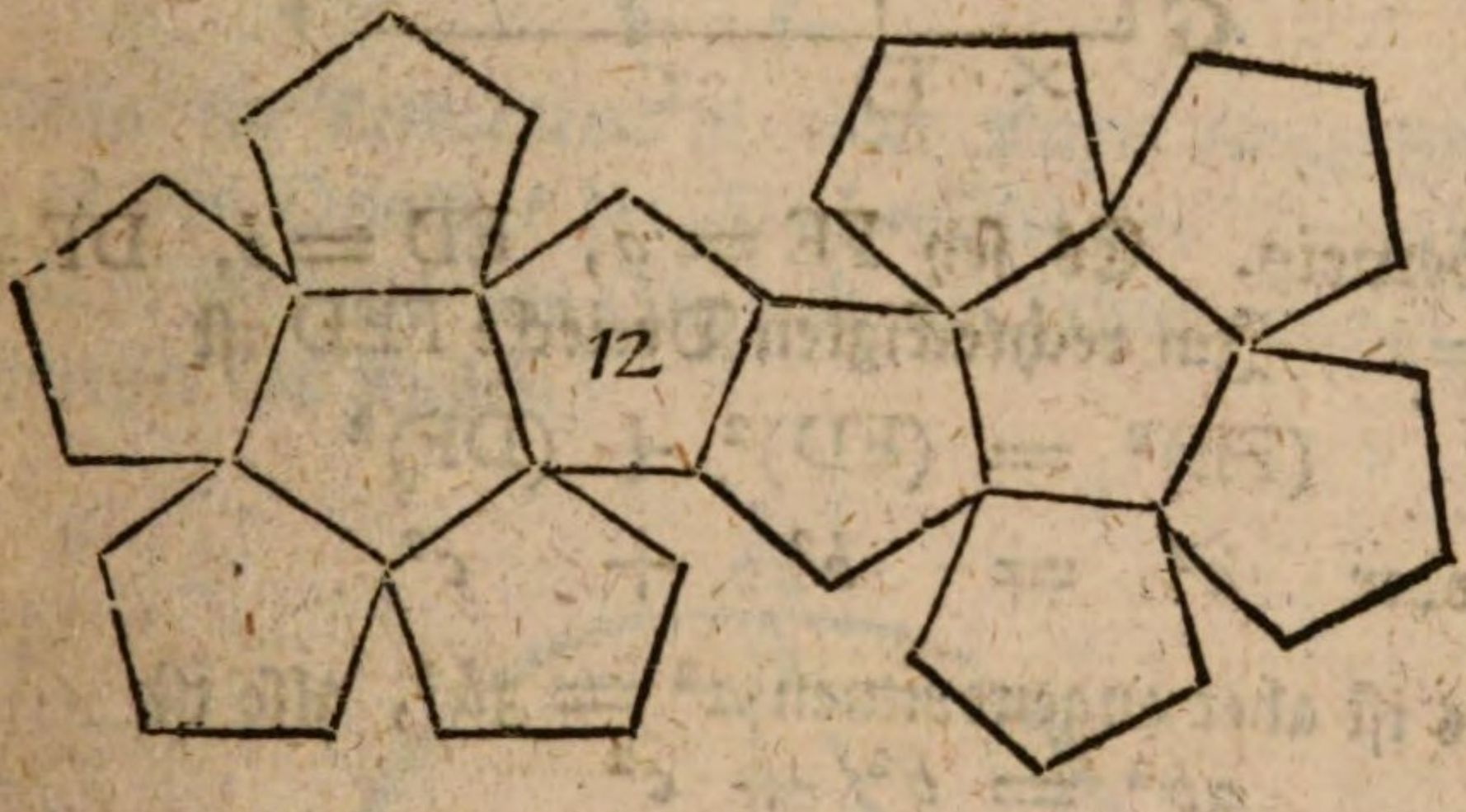
Um die Lehre von den regulären Körpern desto besser zu begreifen, kann man sich dieselben aus Pappe verfertigen. Folgende Figuren geben deutlich genug zu verstehen, wie die Flächen auf der Pappe gezeichnet werden müssen.

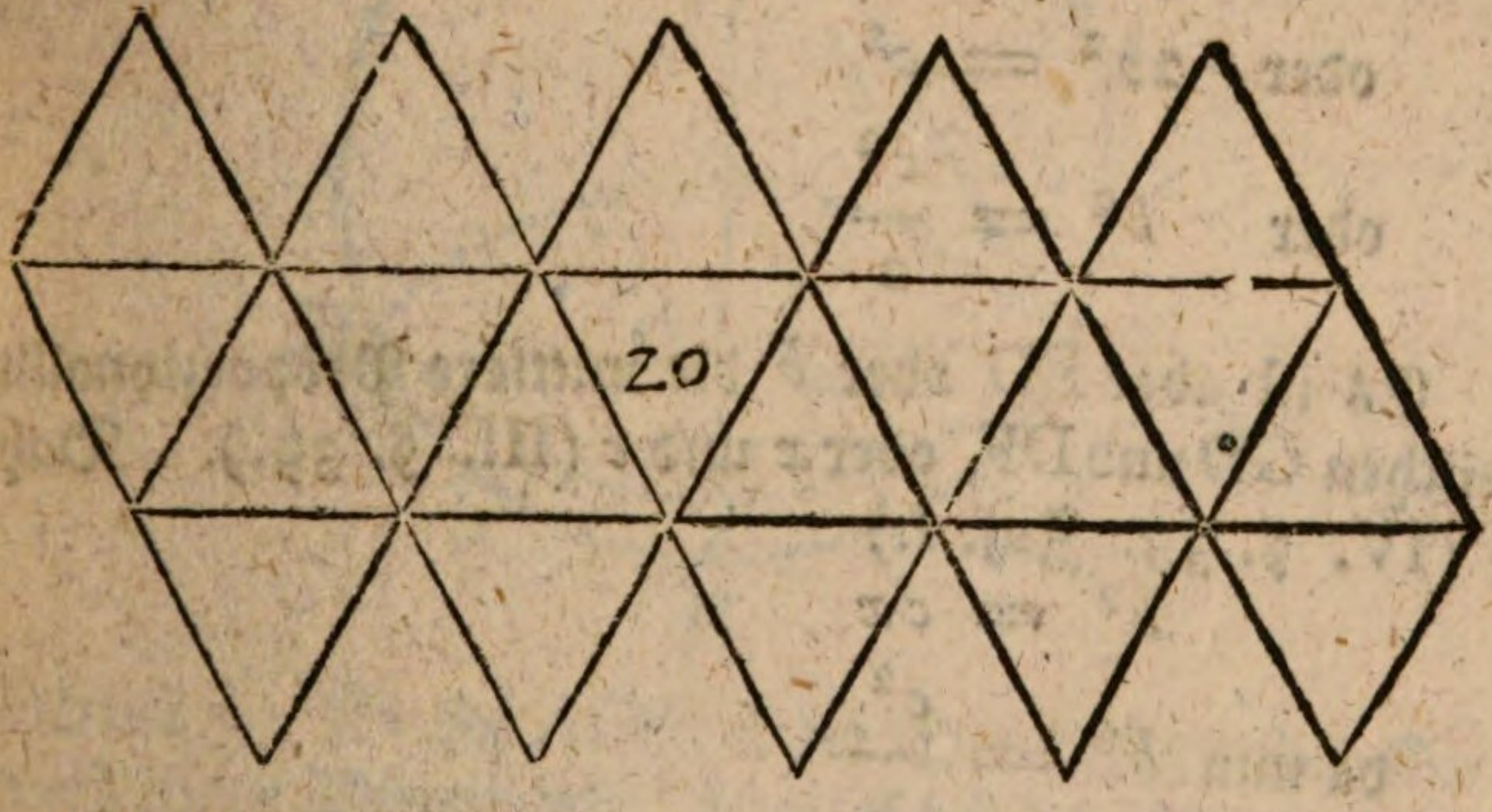




Nach-





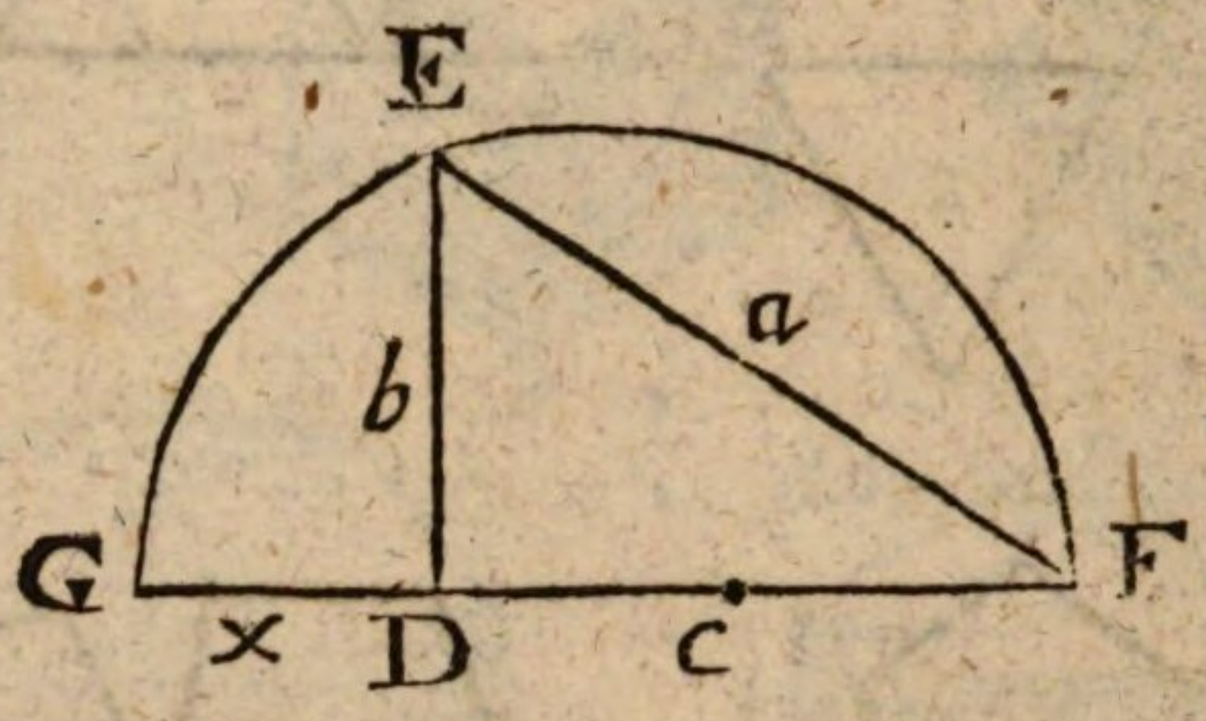


Nachdem diese Figuren gezeichnet und ausgeschnitten worden, muß man sie so zusammen falten und zusammen kleben oder leimen, daß die Flächen sich an einander fügen, und die regulären Körper bilden.

§. 4.

§. 4.

In einem halben Zirkel sey gezogen eine Sehne FE, und die ED senkrecht auf dem Halbmesser GF. Trift es sich nun, daß das Quadrat von FE dreimal so groß ist, als das Quadrat von ED, so ist GD der dritte Theil des Durchmessers GF.



Beweis. Es sey FE $= a$, ED $= b$, DF $= c$, GD $= x$. Im rechteckigten Dreiecke FED ist

$$(FE)^2 = (ED)^2 + (DF)^2$$

oder $$a^2 = b^2 + c^2$$

Es ist aber angenommen $a^2 = 3b^2$, also ist

$$3b^2 = b^2 + c^2$$

oder $$2b^2 = c^2$$

oder $$b^2 = \frac{c^2}{2}$$

Es ist aber ED oder b die mittlere Proporzionallinie zwischen GD und DF, oder x und c (III. §. 39.). Daher ist (IV. §. 33. Zus. I.)

$$b^2 = cx$$

da nun $$b^2 = \frac{c^2}{2}$$

so ist $$cx = \frac{c^2}{2}$$

$$x = \frac{c}{2}, \text{ und } c = 2x$$

Es

Es ist ferner

$$GD + DF = GF$$

oder $x + c = GF$

da nun $c = 2x$, so ist

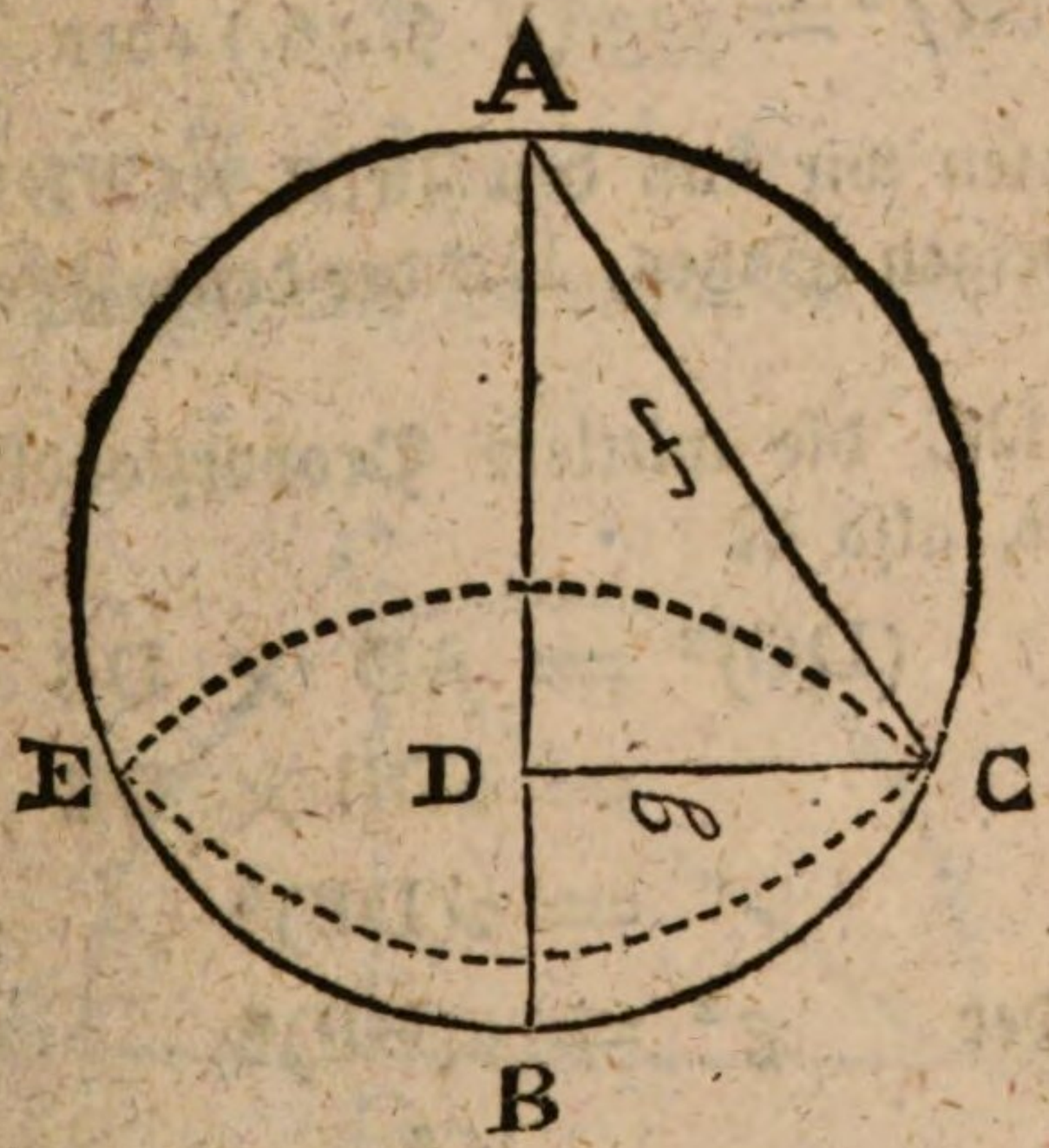
$$3x = GF$$

$$x = \frac{GF}{3}$$

das ist, x oder GD ist der dritte Theil des Durchmessers.

§. 5.

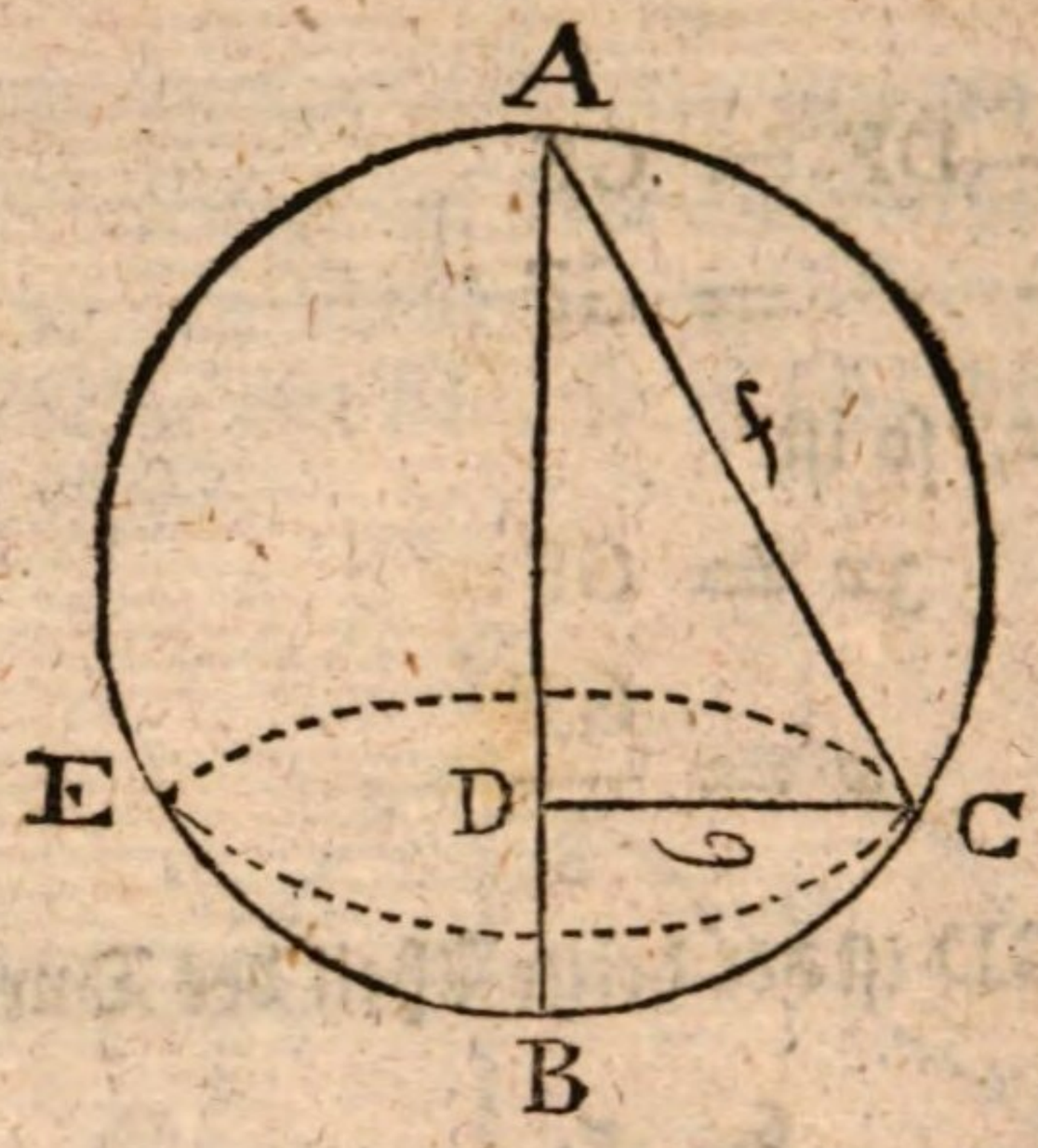
Wenn ein Tetraedron in einer Kugel eingeschrieben ist, so ist das Quadrat der Flächenseite des Tetraedrons sechsmal so groß als das Quadrat des dritten Theils vom Durchmesser der Kugel.



Beweis. Es sey ACBEA der Durchschnitt der Kugel durch ihren Mittelpunkt, folglich AB der Durchmesser der Kugel.

Es sey EC der Zirkel, worin eines der regulären Dreiecke beschrieben ist, die das Tetraedron bilden, und CD der Halbmesser solches Zirkels.

Es



Es sey AC die Flächenseite eines andern von den 4 regulären Dreiecken.

Wir wollen AC mit f und CD mit g benennen; so ist AC oder f, Seite des eingeschriebenen Dreiecks $= \sqrt{3gg}$, oder $f^2 = 3gg$ (V. §. 26.) oder $\frac{f^2}{3} = gg$.

Betrachten wir nun den Zirkel ACEBA, so ist, vermöge des vorigen Satzes, DB der dritte Theil des Durchmessers AB.

Es ist DC die mittlere Proporzionallinie zwischen AD und DB, also ist

$$(DC)^2 = AD \times DB$$
$$= 2DB \times DB$$
$$= 2(DB)^2$$

oder $g^2 = 2(DB)^2$

Da nun $g^2 = \frac{f^2}{3}$

so ist $\frac{f^2}{3} = 2(DB)^2$

oder $f^2 = 6(DB)^2$

das

das ist, f^2, Quadrat der Flächenseite des Tetraedons, ist gleich 6mal dem Quadrate des dritten Theiles DB vom Durchmesser.

§. 6.

Das Quadrat der Flächenseite des Tetraedrons verhält sich zum Quadrate des Halbmessers wie 2 zu 3.

Es ist $AB = 3DB$, folglich $AB^2 = 9(DB)^2$

Da nnn $(AC)^2 = 6(DB)^2$

und $(AB)^2 = 9(DB)^2$

so ist $(AC)^2, (AB)^2 :: 6(DB)^2, 9(DB)^2$

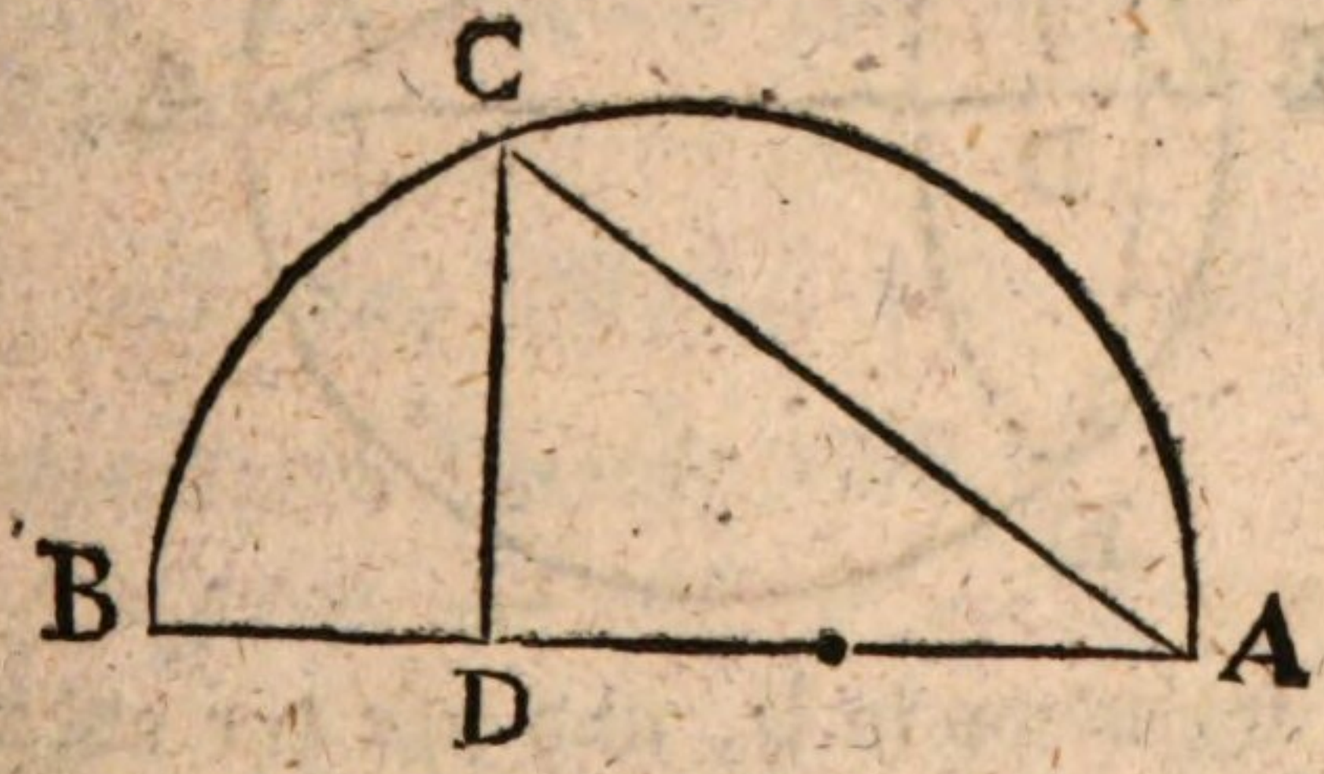
$:: 6, 9$

$:: 2, 3.$

§. 7.

Aufgabe.

In einer Kugel ein Tetraedron einschreiben.



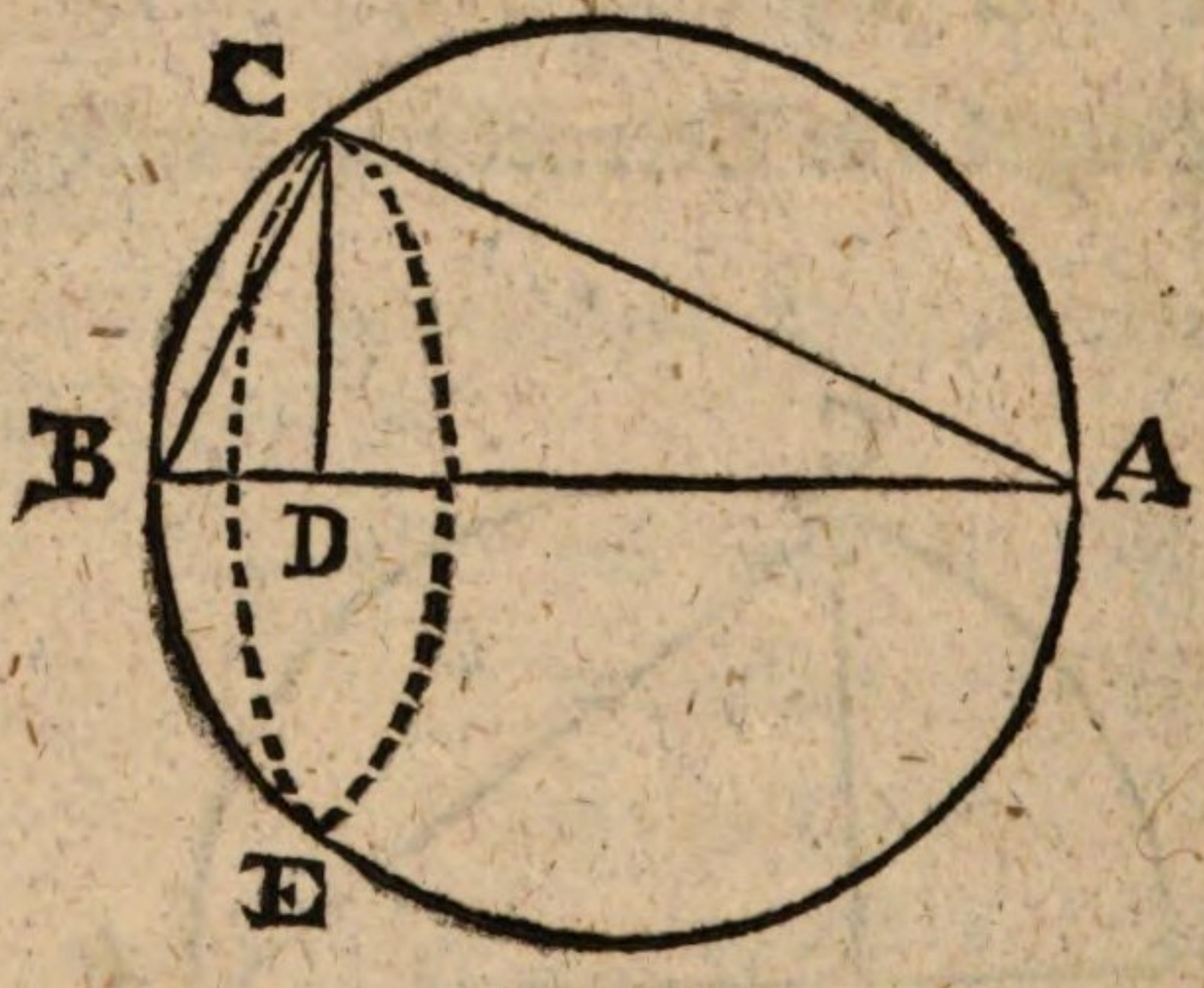
Auflösung. Theile den Durchmesser AB der Kugel in drey gleiche Theile, so daß $BD = \frac{1}{3} AB$.

Ziehe DC senkrecht auf BA. Ziehe AC; so ist AC die Seite des regulären Dreyecks, welches eine von den vier Flächen des Tetraedrons ausmachet.

Oder DC ist der Halbmesser des Zirkels, worin ein solches reguläres Dreyeck beschrieben werden kann. (§. 5.) Beschreibet man demnach auf einer Ebne einen Zirkel mit dem Halbmesser DC, so braucht man nur AC auf dem Umkreise herum zu tragen, um die drey Punkte des Dreyecks zu bekommen.

Anmerkung. Will man ein Tetraedron aus einer hölzernen Kugel schneiden, so darf man nur die gefundene Flächenseite mit dem Zirkel fassen und damit zwei Punkte auf der Kugel merken. Hernach wird das gleichseitige Dreyeck wie auf einer Ebne beschrieben. Die Ründung zwischen den drey Punkten wird abgeschnitten und flach gemacht. Neben dem ersten Dreyecke werden die übrigen auf gleiche Art gezeichnet.

Oder, anstatt des gefundenen Halbmessers DC, nimm die Entfernung BC. Setze die eine Spitze des Zirkels auf

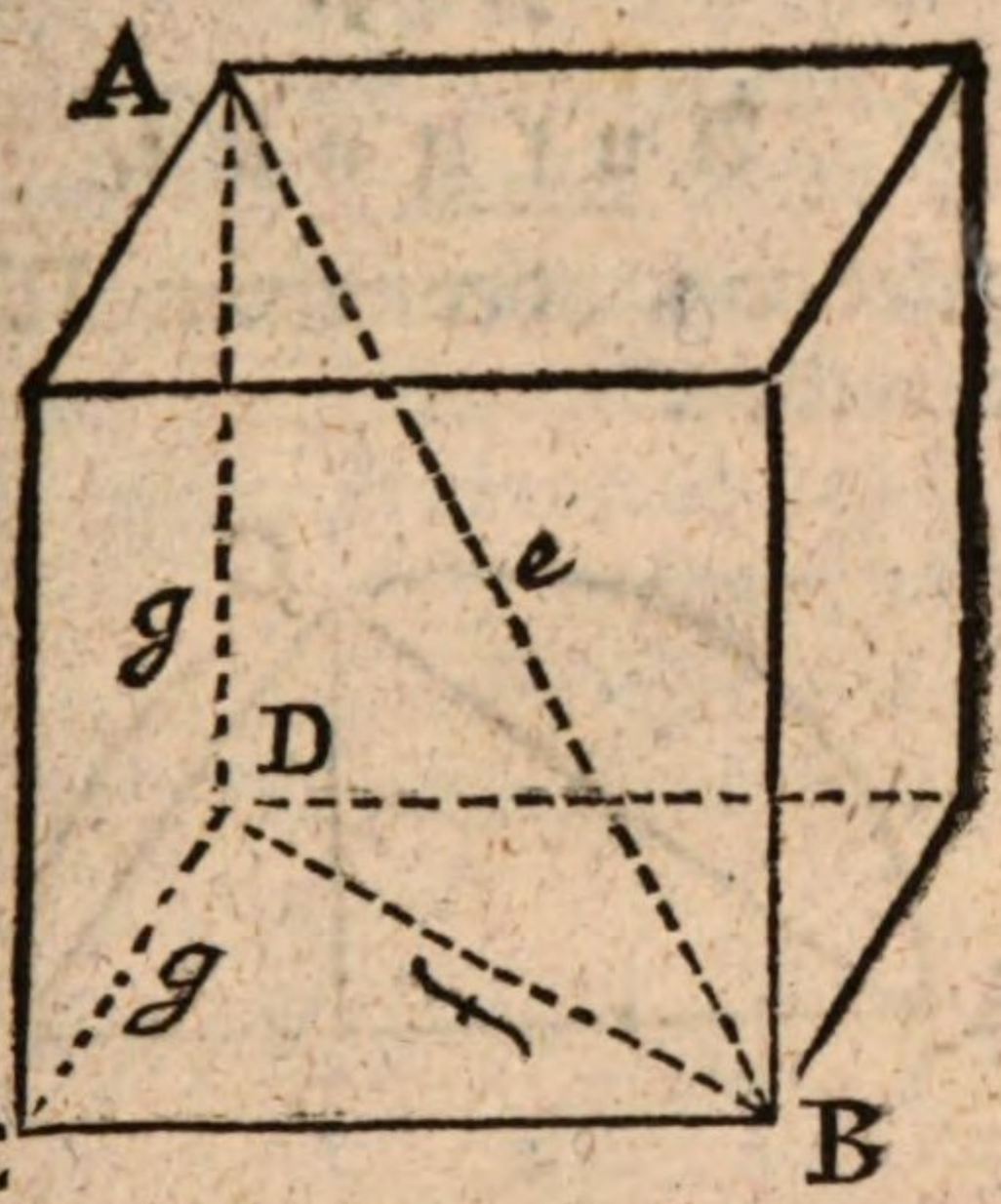


der Kugel irgendwo in B, und mit der anderen Spitze C beschreibe den Zirkel CE, so wird dieser die DC zum Halbmesser haben. Schneide die Kugel längst der Ebne CE, und beschreibe in dieser Ebne, welche ein Zirkel ist, das reguläre Dreyeck, welches AC zur Flächenseite bekommen wird.

§. 8.

§. 8.

Das Quadrat des Durchmessers der Kugel ist dreymal so groß als das Quadrat der Flächenseite des eingeschriebenen Würfels oder Hexaedrons.



Beweis. Es sey ein Würfel in einer Kugel eingeschrieben, so ist die Queerlinie, die von einem Winkel A zum gegenüberstehenden B gehet, zugleich ein Durchmesser der Kugel. Es sey DB die Queerlinie der einen Fläche des Würfels. DC oder CB oder AD ist die Flächenseite des Würfels.

Es sey $AB = e$, $DB = f$, $CD = CB = AD = g$

Im rechteckigten Dreiecke ADB ist

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (DB)^2$$

oder $$e^2 = g^2 + f^2$$

Im rechteckigen Dreyeck DCB ist ferner

$$(DB)^2 = (DC)^2 + (CB)^2$$

$$f^2 = g^2 + g^2$$

Setze diesen Werth von f^2 in voriger Gleichnng $e^2 = g^2 + f^2$, so kömmt

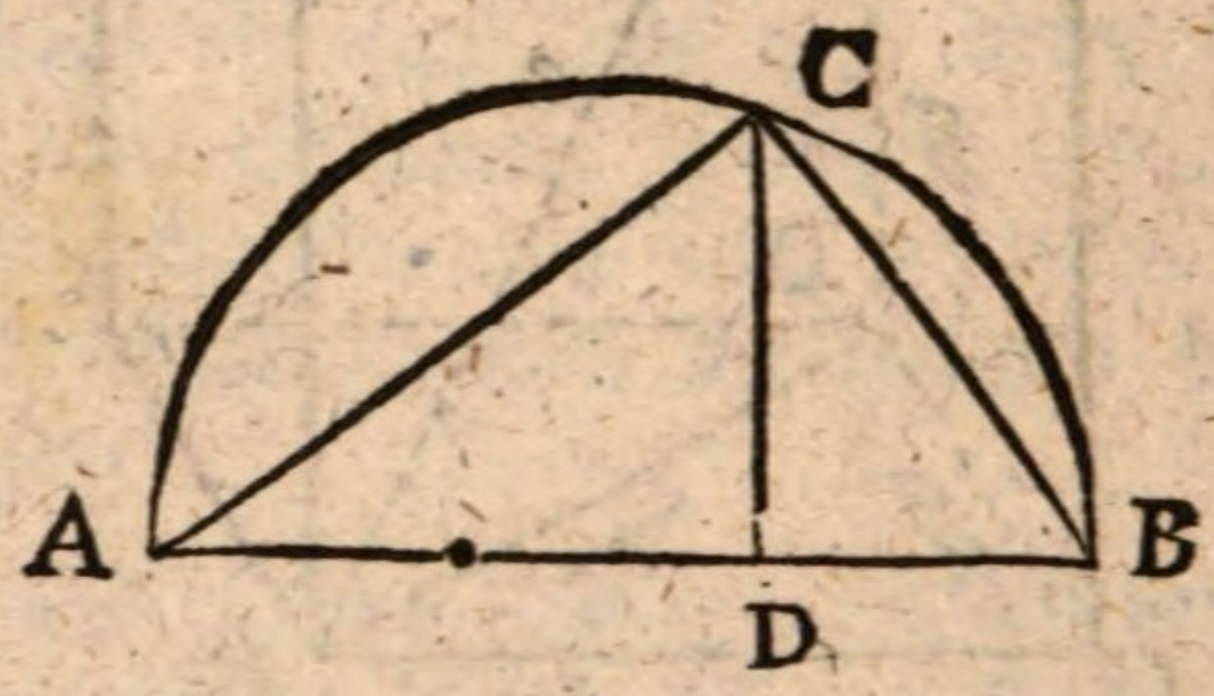
$$e^2 = g^2 + g^2 + g^2$$

oder $e^2 = 3g^2$

§. 9.

Aufgabe.

Ein Hexaedron oder einen Würfel in einer Kugel einschreiben.



Auflösung. Es sey AB der Durchmesser der Kugel.

Beschreibe über AB einen halben Zirkel. Theile AB in drey gleiche Theile, so daß AD = 2BD.

Ziehe DC senkrecht auf AB.

Ziehe CB.

So ist CB die Flächenseite des Würfels.

Denn es sey BA = 3c, CB = d, so ist (III. §. 35.)

AB , BC :: BC , DB

3c , d :: d , c

daher $3cc = dd = (CB)^2$

Nun ist $(AB)^2 = (3c)^2 = 9cc$.

Da nun $(CB)^2 = 3cc$

und $(AB)^2 = 9cc$

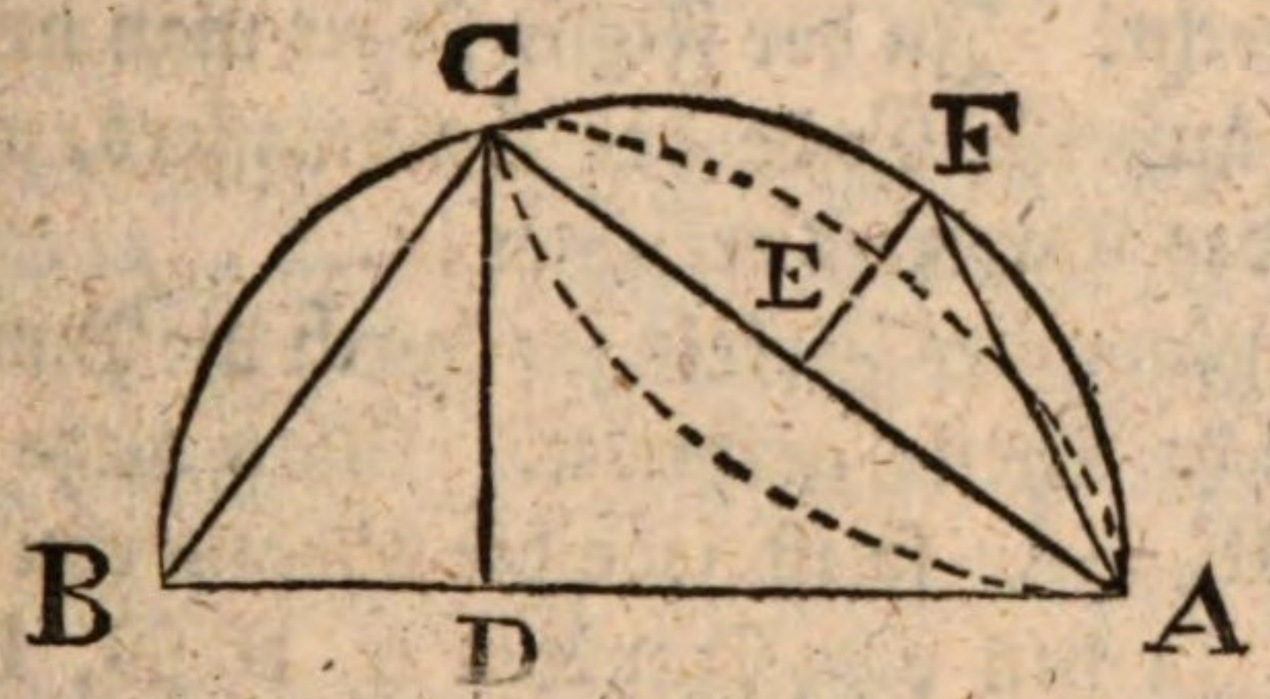
so ist $(AB)^2 = 3(CB)^2$

Folg=

Folglich ist BC die verlangte Flächenseite des eingeschriebenen Würfels. (§. 8.)

Zusatz. Um den Zirkel zu bekommen, worin jedes Quadrat des Würfels eingeschrieben werden kann, nehme man den Durchmesser = AC, oder den Halbmesser = $\frac{1}{2}$ AC. Denn in vorletzter Figur (§. 8.) ist DB die Queerlinie des Vierecks und zugleich der Durchmesser des umgeschriebenen Zirkels, und das Quadrat dieses Durchmessers ist gleich dem Quadrate des Durchmessers AB der Kugel, weniger dem Quadrate der Flächenseite AD.

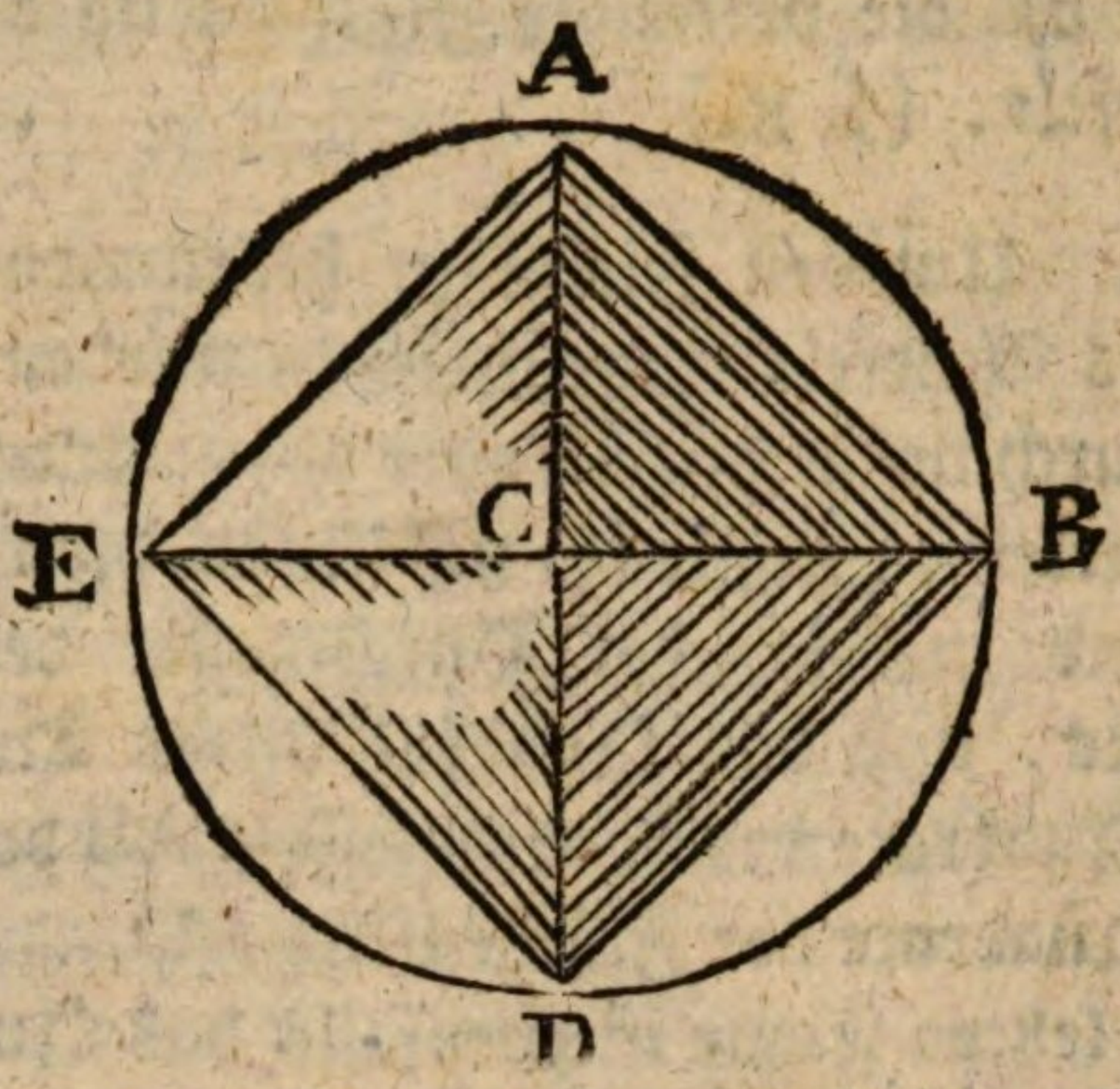
In der letzten Figur ist ebenfalls das Quadrat der AC gleich dem Quadrate der AB, weniger dem Quadrate der BC. Also ist AC der Durchmesser des Zirkels, worin die Flächen des Würfels eingeschrieben werden.



Man halbire AC in E, ziehe EF senkrecht auf AC, ziehe AF, so ist AF die Oefnung des Zirkels, die man nöthig hat, um auf der Kugel aus dem Punkte F den Zirkel zu beschreiben, der AC zum Durchmesser hat, und worin das Quadrat eingeschrieben werden kann, das CB zur Seite hat.

§. 10.

Das Quadrat der Flächenseite eines Oktaedrons ist halb so groß, als das Quadrat des Durchmessers der umgeschriebenen Kugel.



Beweis. Es sey der Zirkel ABDEA der Durchschnitt einer Kugel durch den Mittelpunkt. Ueber dem Mittelpunkte des Zirkels ABDEA stehe in C der Halbmesser der Kugel senkrecht. In der Figur siehet man nur den Punkt C als das äußerste Ende des Halbmessers, welcher über der Fläche des Papieres errichtet ist.

Der Umfang des Zirkels sey durch die Punkte A,B,D,E in vier gleiche Theile getheilet. Man ziehe die Sehnen AB, BD, DE, EA, so ist jede die Sehne von 90 Graden.

Aus C zu den vier Punkten A, B, D, E, ziehe man wiederum die Linien CA CB, CD, CE, so ist jede in der Kugel wiederum die Sehne von 90 Graden, obgleich diese vier Linien auf dem Papiere wie Halbmesser des Zirkels ABDEA erscheinen.

Also sind die Linien CA, CB, CD, CE in der Kugel den Linien AB, BD, DE, EA in der nemlichen Kugel gleich.

Folglich sind die Dreyecke ACB, BCD, DCE, ECA lauter gleichseitige Dreyecke, und einander ähnlichgleich.

Stellet man sich in der andern Hälfte der Kugel auch vier solche Dreyecke vor, so hat man ein Oktaedron.

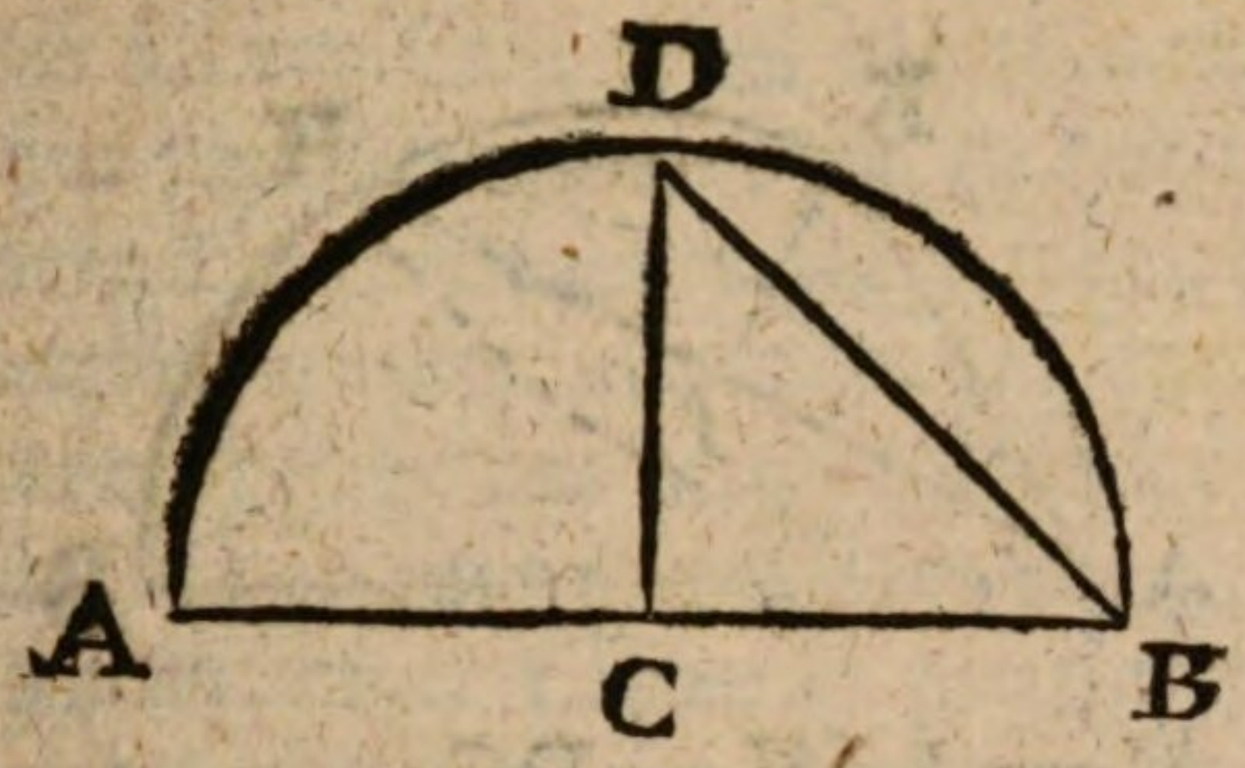
Da nun die Flächenseite des Oktaedrons nichts anders, als die Sehne von 90 Grad ist, so ist das Quadrat dieser Sehne halb so groß, als das Quadrat des Halbmessers. (V. §. 27.).

§. 11.

§. 11.

Aufgabe.

Ein Oktaedron in einer Kugel einschreiben.

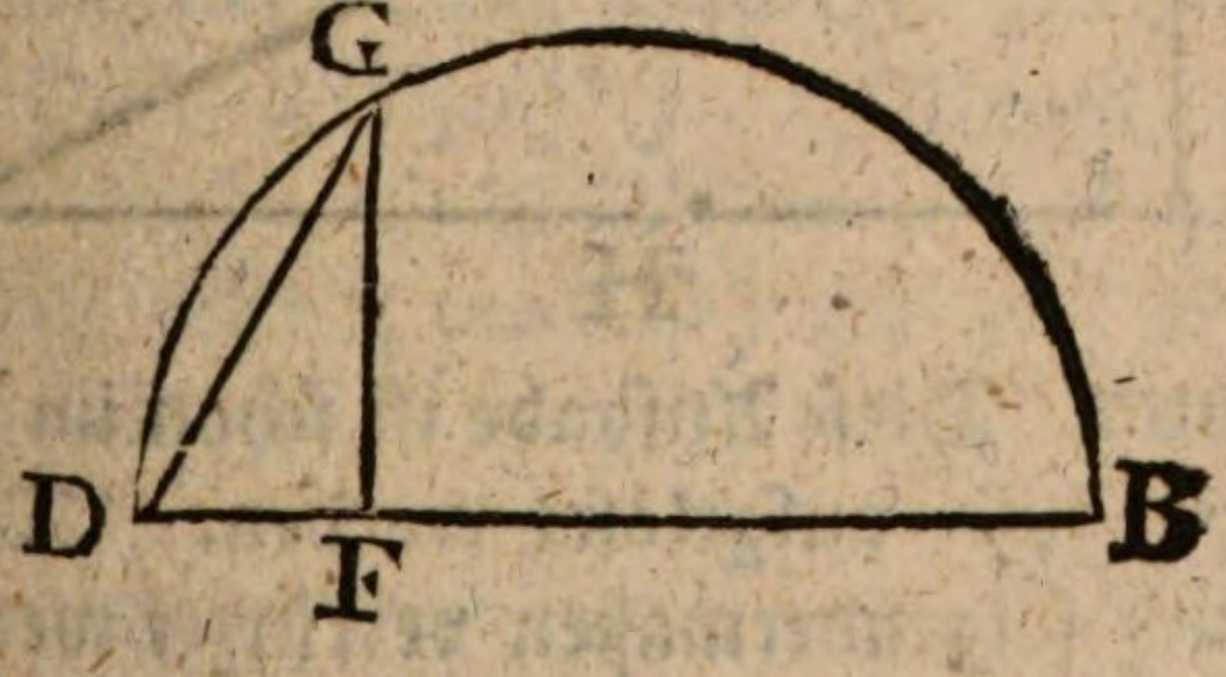


Auflösung. Es sey AB der Durchmesser der Kugel. Beschreibe über AB einen halben Zirkel.

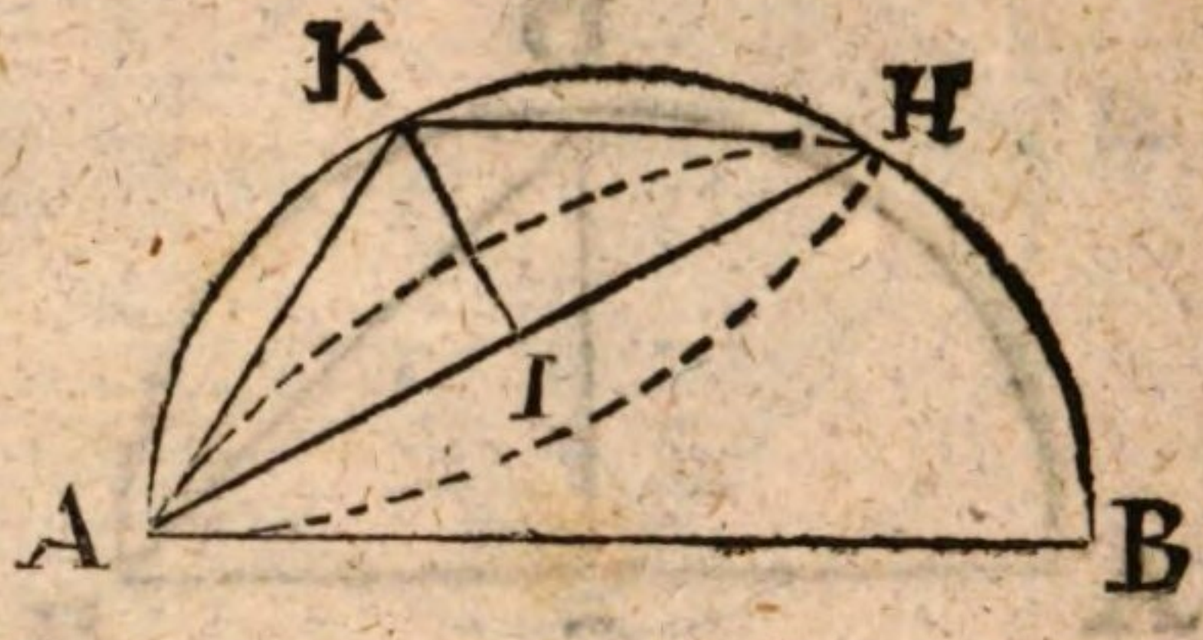
Errichte im Mittelpunkte C den Halbmesser CD senkrecht über *AB*.

Ziehe BD, so ist BD die Flächenseite des Oktaedrons, weil sie die Sehne von 90 Graden ist (§. 10.)

Zusatz I. Da nun die Seite DB jedes Dreyeckes, woraus die Oberfläche des Oktaedrons bestehet, gefunden worden, so kann auch der umgeschriebene Zirkel eines solchen Dreyecks gefunden werden. Es wird nemlich zwischen der ganzen Linie DB und ihrem dritten Theile die mittlere Proporzional-Linie gesuchet, so ist diese der Halbmesser des Zirkels, worin das Dreyeck beschrieben werden kann (V. §. 26. Zus. V.). Es sey DB die Seite des Dreyecks, DF der dritte Theil derselben, so ist DG der Halbmesser des verlangten Zirkels. (III. §. 39.)



Zusatz II. Es sey wiederum AB der Durchmesser der Kugel. Nimm AH = 2DG, so ist AH der Durchmesser des Zirkels, worin eine Fläche des Oktaedrons beschrieben werden kann.



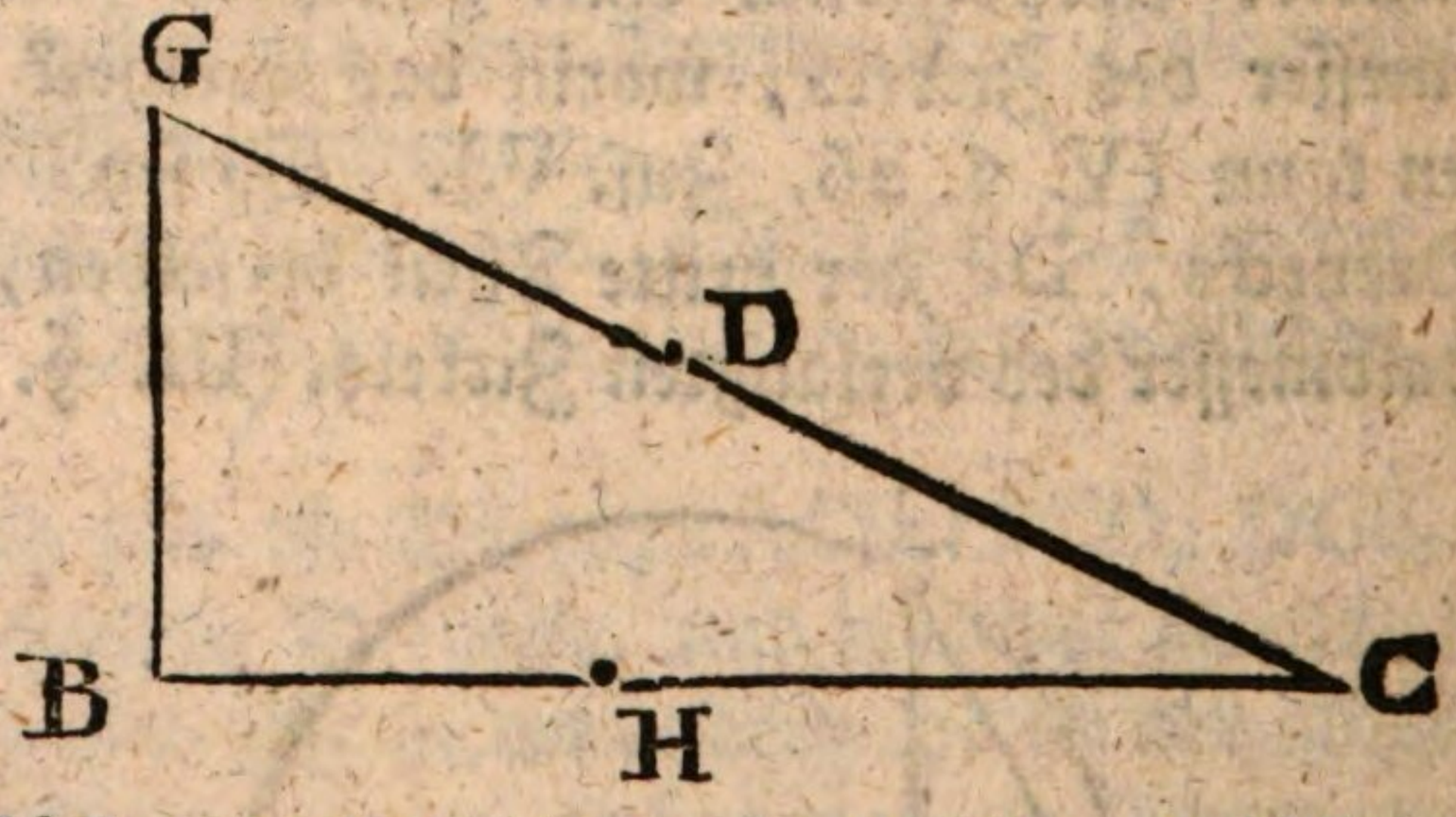
Nimm AI = ½ AH = DG.

Setze IK senkrecht auf AH. Ziehe AK; so ist AK die nöthige Oefnung des Zirkels, um aus K auf der Kugel den Zirkel zu beschreiben, der AH zum Durchmesser hat.

§. 12.

Aufgabe.

Die Mediane einer gegebenen Linie finden, das ist, einen solchen Theil derselben, welcher die mittlere Proporzional-Linie sey, zwischen der ganzen Linie und dem übrigen Theile.



Auflösung. Diese Aufgabe ist schon im VIten Hauptstücke (§. 57. Zus.) aufgelöset worden. Die Auflösung kann aber auch folgendermaßen verkürzet werden.

Es sey BC die gegebene Linie. An einem Ende B derselben errichte eine senkrechte Linie BG und mache $BG = \frac{1}{2}BC$. Ziehe GC. Schneide von derselben ab $GD = BG = \frac{1}{2}BC$, so bleibet CD. Von der BC schneide ab die $CH = CD$, so ist die Linie BC in H verlangter maaßen geschnitten, und es ist CH die Mediane, oder die mittlere Proporzional-Linie zwischen BC und BH.

Der Beweis erhellet aus der angeführten Stelle, nemlich aus dem Zusatze des §. 57 im VIten Hauptstücke.

Will man die nemliche Aufgabe durch die Algebra auflösen, so sey $BC = a$, $CH = x$, folglich $BH = a - x$. Die Bedingung der Aufgabe enthält folgende Proporzion:

$$BC, CH :: CH, BH$$

oder $a , x :: x , (a-x)$

daher ist $x^2 = a(a-x)$

$x^2 = a^2 - ax$

$x^2 + ax = a^2$

addire $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$

so ist $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2 + (\frac{1}{2}a)^2$

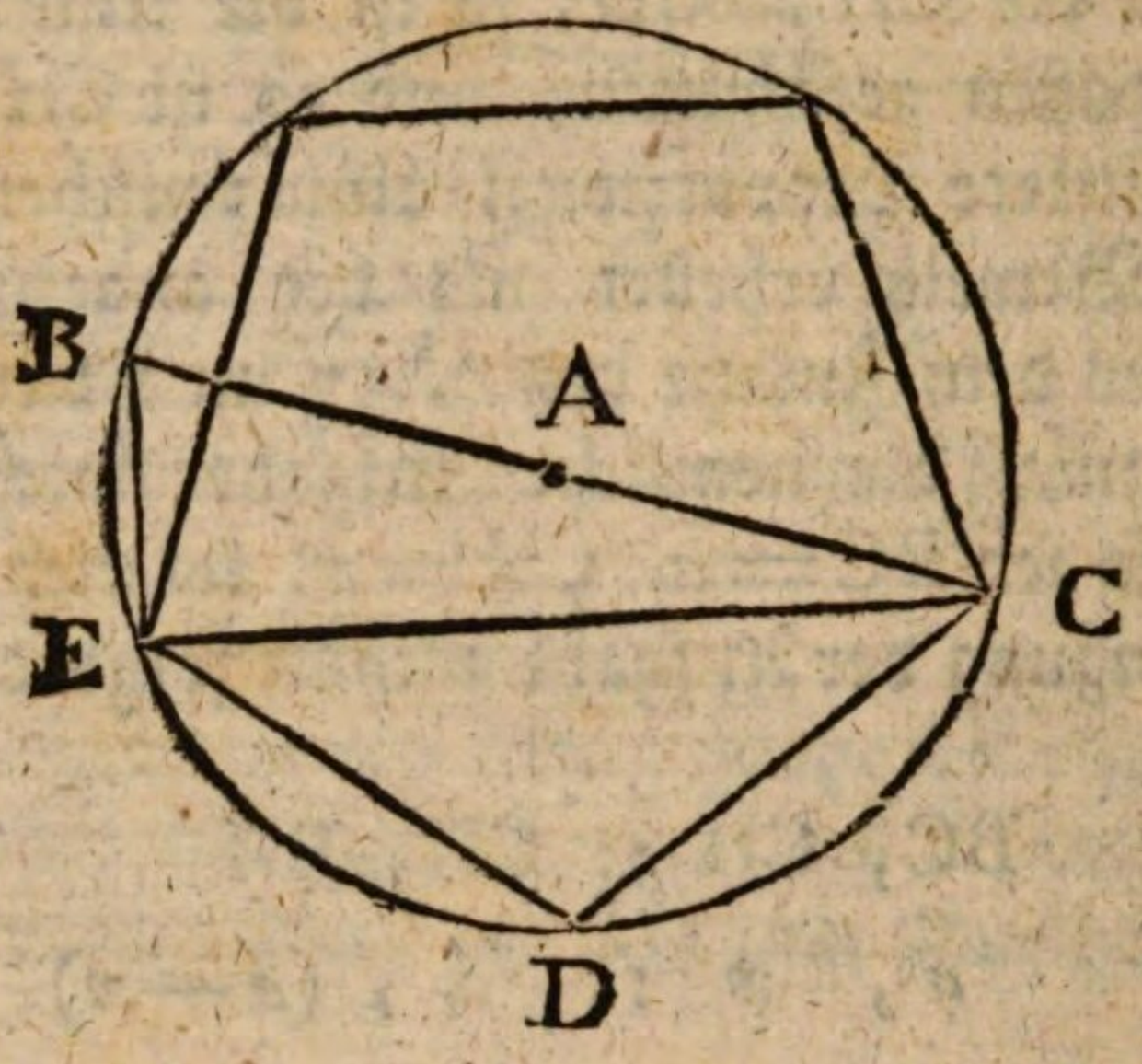
die Wurz. $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{[a^2 + (\frac{1}{2}a)^2]}$

daher $x \ldots = \sqrt{[a^2 + (\frac{1}{2}a)^2]} - \frac{1}{2}a.$

Dieser Werth von x giebt genau die obige Auflösung. Denn da im rechtwinklichen Dreyecke GBC, die Seite $BC = a$, und $BG = \frac{1}{2}a$, so ist $GC^2 = a^2 + (\frac{1}{2}a)^2$ und $GC = \sqrt{[a^2 + (\frac{1}{2}a)^2]}$. Nimmt man nun ab $GD = GB = \frac{1}{2}a$, so ist $CD = \sqrt{[a^2 + (\frac{1}{2}a)^2]} - \frac{1}{2}a$, folglich auch $CH\ (= CD) = \sqrt{[a^2 + (\frac{1}{2}a)^2]} - \frac{1}{2}a = x$.

§. 13.

Wenn man die Diagonal-Linie eines Fünfecks ziehet, und die Mediane derselben suchet, so wird diese Mediane der Seite des Fünfecks gleich.



Beweis. Es sey AB der Halbmesser, CB der Durchmesser des Zirkels, CD oder DE die Seite des Fünfecks, so wird BE die Seite des Zehnecks, und es ist (V. §. 28.)

$$BE = AB\sqrt{\tfrac{5}{4}} - \tfrac{1}{2}AB$$

$$BE^2 = \tfrac{6}{4}AB^2 - AB^2\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

Nun ist

$$CE^2 = CB^2 - BE^2$$

$$= 4AB^2 - BE^2$$

$$= 4AB^2 - \tfrac{6}{4}AB^2 + AB^2\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

$$\text{oder } CE^2 = \tfrac{10}{4}AB^2 + AB^2\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

$$CE = \sqrt{(\tfrac{10}{4}AB^2 + AB^2\sqrt{\tfrac{5}{4}})}$$

Hierzu suche die Mediane x, so muß seyn

$$(CE - x), x :: x, CE$$

daher ist $x^2 = CE^2 - CE.x$

oder $x^2 + CE.x = CE^2$.

Löset

Löset man diese Gleichung auf, so kömmt

$$x = -\tfrac{1}{2}CE + CE\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

daher ist $x^2 = \tfrac{6}{4}CE^2 - CE^2\sqrt{\tfrac{5}{4}}$.

Setzet man nun anstatt CE dessen vorhergefundenen Werth, so kömmt

$$x^2 = \tfrac{6}{4}(\tfrac{10}{4}AB^2 + AB^2\sqrt{\tfrac{5}{4}}) - (\tfrac{10}{4}AB^2 + AB^2\sqrt{\tfrac{5}{4}})\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck und verkürzet ihn, so kömmt

$$x^2 = \tfrac{10}{4}AB^2 - AB^2\sqrt{\tfrac{5}{4}}$$

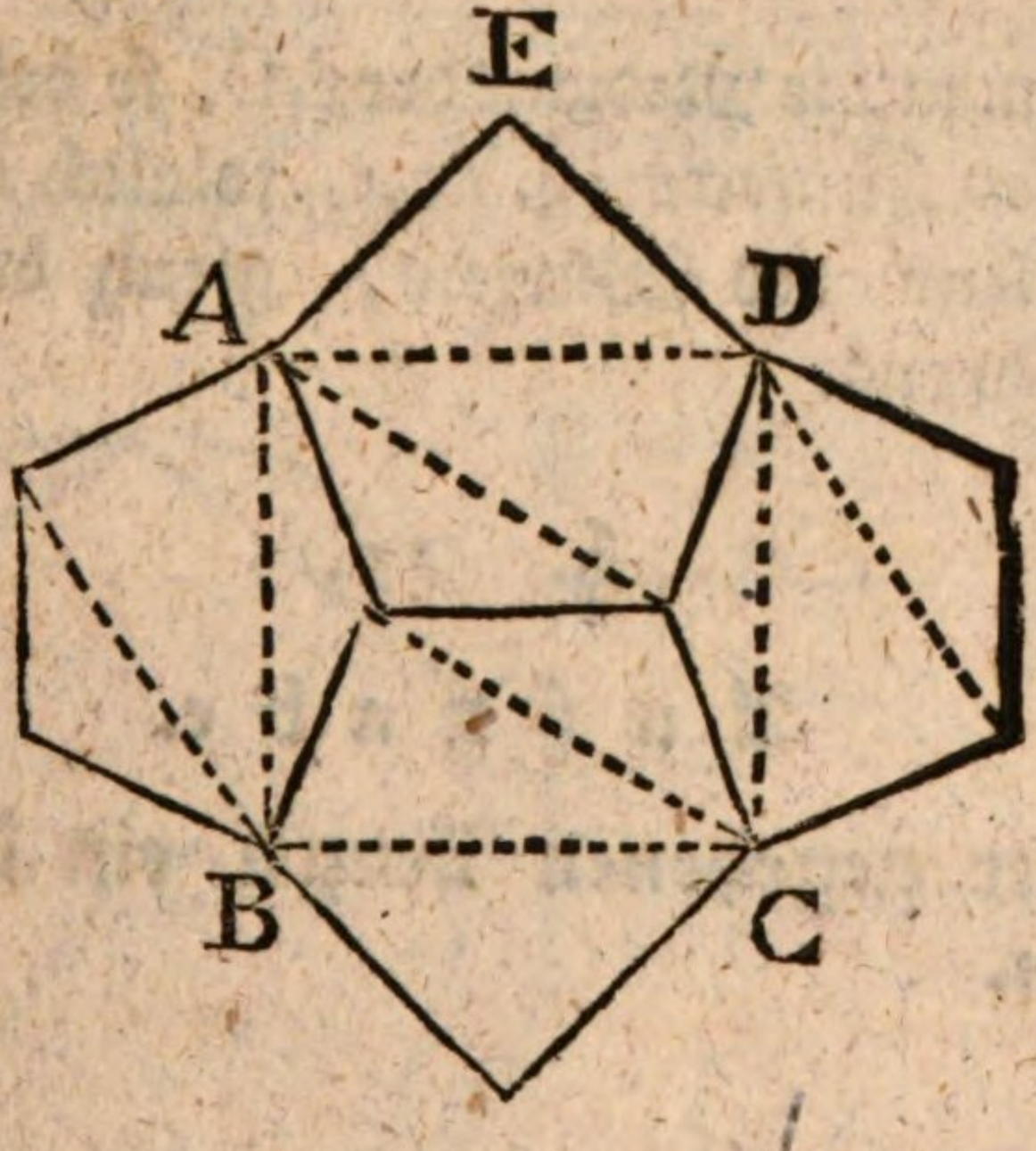
$$x = \sqrt{(\tfrac{10}{4}AB^2 - AB^2\sqrt{\tfrac{5}{4}})}$$

und dieses ist zugleich die Seite CD des Fünfecks (V. §. 29).

Also ist die Mediane der CE zugleich die Seite CD des Fünfecks.

§. 14.

Die Mediane der Flächenseite des Würfels ist gleich der Flächenseite des Dodekaedrons.



Beweis. Die Figur stellet einen Theil der Oberfläche des Ikosaedrons vor, nemlich vier an einander gränzende

regu-

reguläre Fünfecke. Ziehe in den Fünfecken die Diagonal-Linie AD, DC, CB, BA, so sind sie gleich, weil die Fünfecke gleich sind.

Man stelle sich vor, die Kugel, worin das Ikosaedron beschrieben ist, sey längst der Fläche ADCBA geschnitten, so ist solcher Schnitt ein Zirkel und jede der Linien AD, DC, CB, BA ist die Sehne von 90 Grad. Also ist ADCBA ein reguläres Viereck.

Wenn man jedes Fünfeck in der Oberfläche des Ikosaedrons in 3 Dreyecke eintheilet, wie in der Figur geschehen, so bestehet die ganze Oberfläche aus 36 Dreyecken. Davon stehen 6 über dem Quadrate ADCBA. Also lassen sich überhaupt 6 solche Quadrate im Dodekaedron beschreiben. Und diese 6 Quadrate bilden einen Würfel. (§. 2.) Und weil dieser Würfel die Kugel mit seinen Winkeln berühret, so ist es der eingeschriebene Würfel.

Es ist demnach die Diagonal-Linie, als AD, jedes Fünfecks des Ikosaedrons nichts anders als die Flächenseite des eingeschriebenen Würfels.

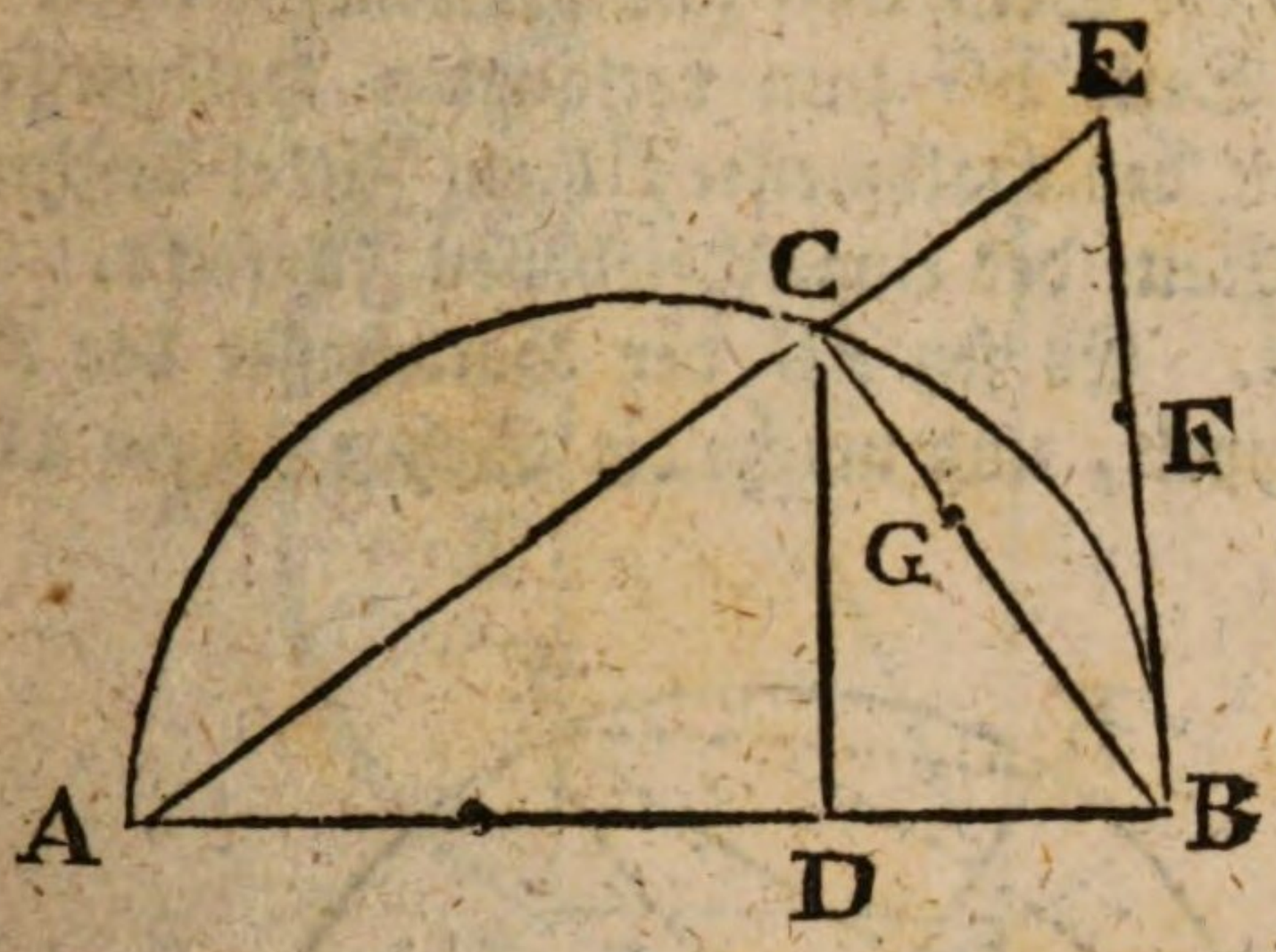
Suchet man die Mediane der AD, so bekömmt man die Seite DE des Fünfecks (§. 13.), folglich ist die Mediane der Flächenseite des Würfels, gleich der Flächenseite des Dodekaedrons.

§. 15.

Aufgabe.

In einer gegebenen Kugel ein Dodekaedron einschreiben.

Auflö-

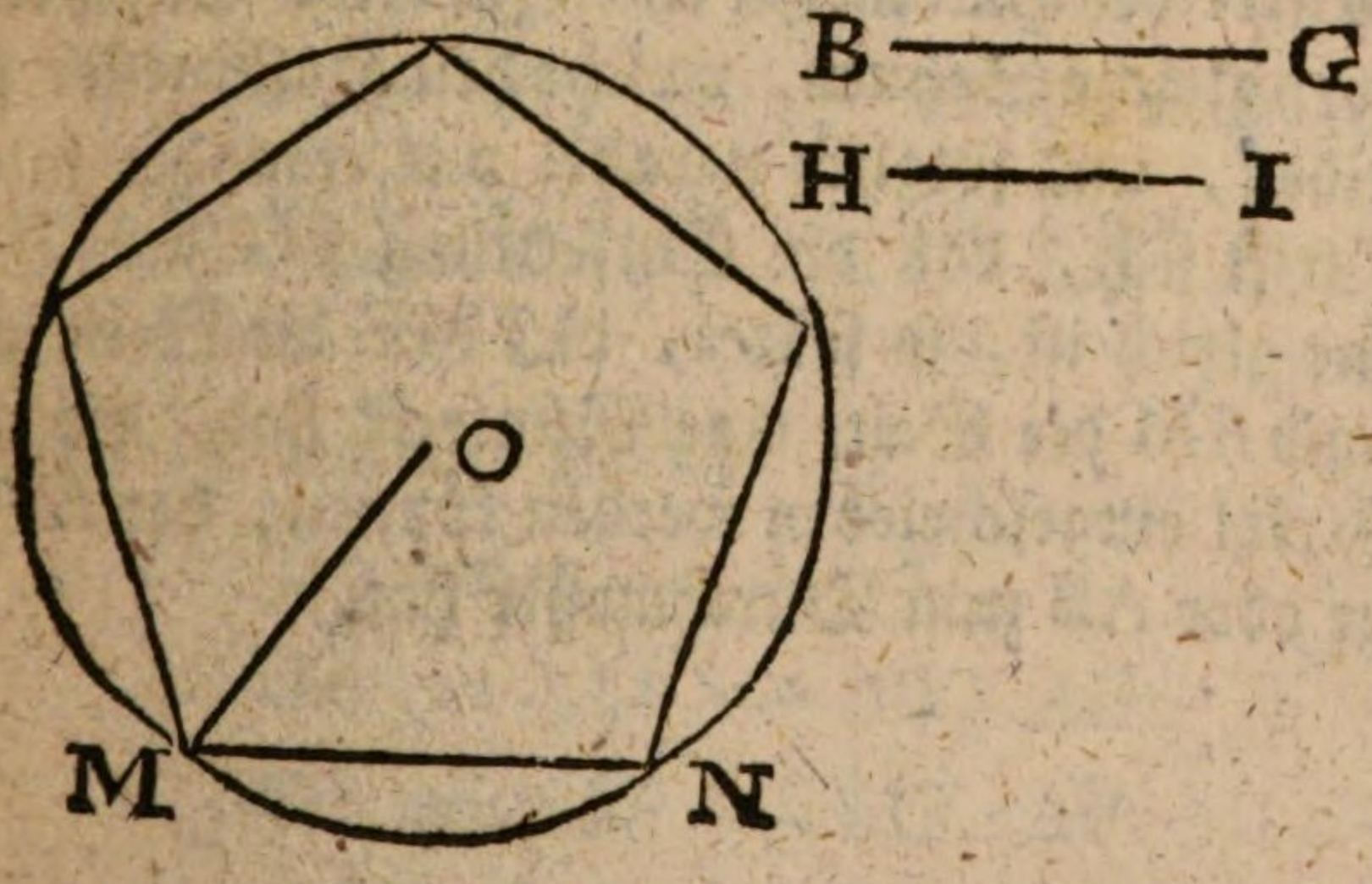


Auflösung. Theile den Durchmesser AB der Kugel in drey gleiche Theile, so daß DB = 2AD, ziehe DC senkrecht auf AB, ziehe CB.

So ist CB die Flächenseite des eingeschriebenen Würfels. (§. 9.)

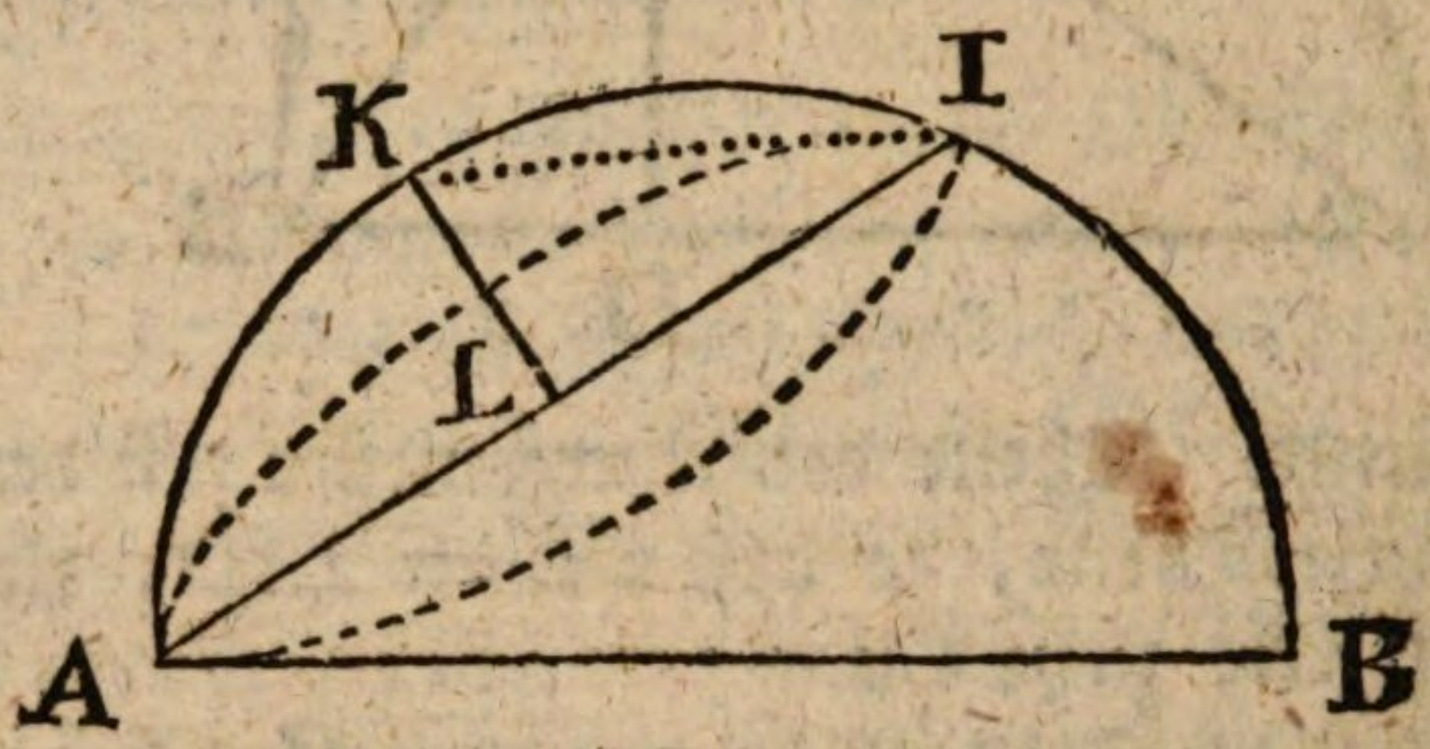
Nimm auf der verlängerten CA die CE = $\frac{1}{2}$ CB. Mache EF = EC, und BG = BF, so ist BG die Mediane der BC, oder die Flächenseite des Dodekaedrons. (§. 14)

Zusatz I. Nachdem die Seite des Fünfecks gefunden, so kann auch der Halbmesser des dazu gehörigen Zirkels also leicht gefunden werden.



Beschreibe in einem willkürlichen Zirkel ein Fünfeck, und sage: wie die Seite MN zum Halbmesser MO, so ist die gegebene Seite BG zum verlangten Halbmesser HI. Wird nun mit den Halbmesser HI ein Zirkel beschrieben, so ist BG die Seite des eingeschriebenen Fünfecks.

Zusatz II. Es sey AB der Halbmesser der Kugel. Nimm HI doppelt, und mache die Sehne AI = 2HI.



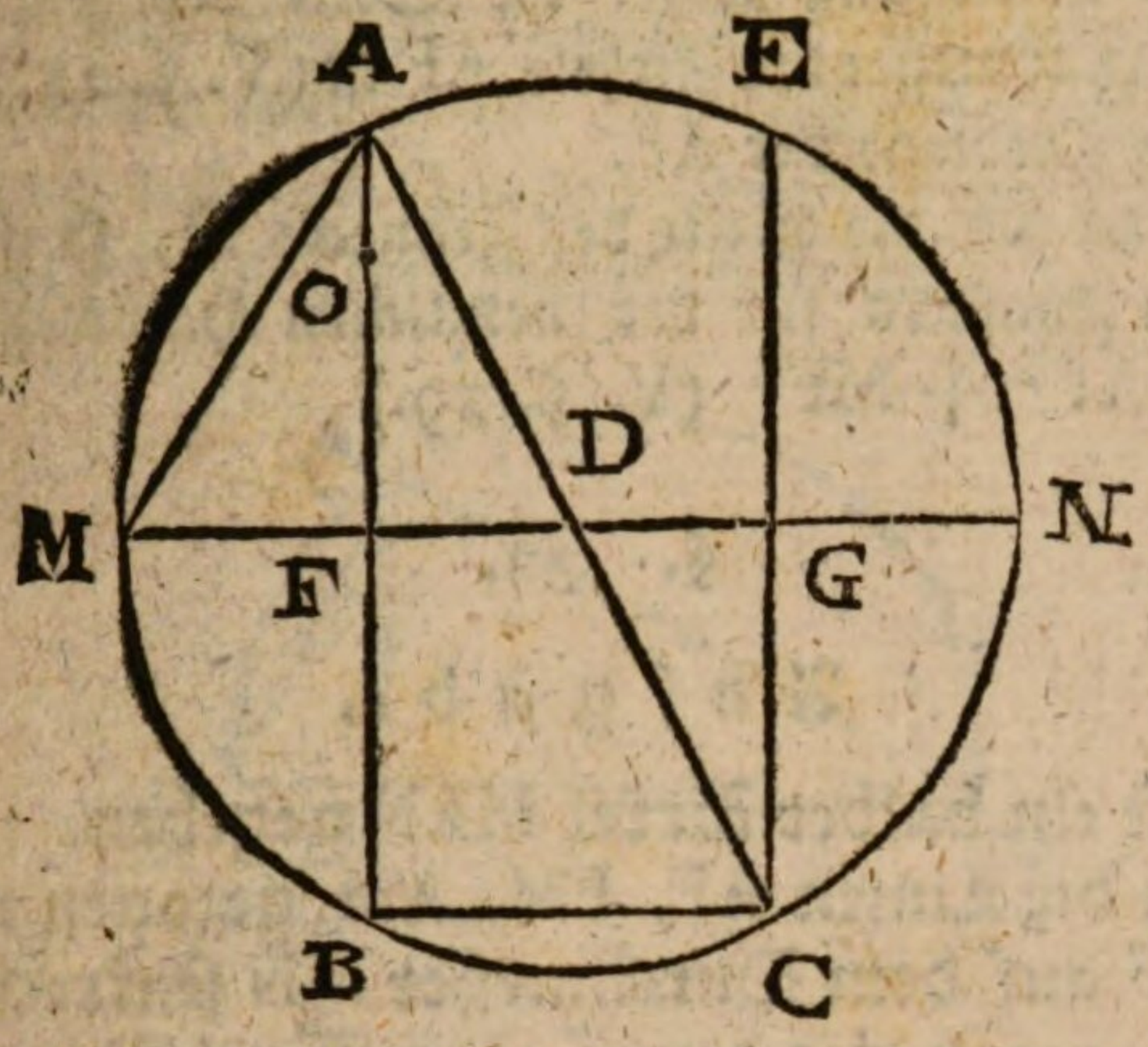
Ueber L, als der Mitte der AI, errichte LK senkrecht.

So ist KI die Oeffnung des Zirkels womit aus dem Punkte K auf der Kugel der Zirkel beschrieben wird, der AI zum Durchmesser hat.

§. 16.

Es sey MN der Halbmesser eines Zirkels. Es seyen AB und EC zwey gleiche Sehnen, welche den Halbmesser senkrecht schneiden, und folglich parallel mit einander laufen. Gesetzt es trift sich, daß die Entfernung FG der Hälfte jeder Sehne gleich ist, so folget, daß MF die Seite eines Zehnecks und AM die Seite eines Fünfecks sind, die beyde in einem Zirkel eingeschrieben werden können, der AF zum Halbmesser oder AB zum Durchmesser hat.

Beweis.



Beweis. Nimm FO = FM. Es sey FO oder FM = x, der übrige Theil OA der AF sey = z.

So ist BC (= FG) = FA = $x + z$. Es ist auch AB = $2(x + z) = 2x + 2z$. Ferner ist AC oder MN = MF + GN + FG = $x + x + (x + z) = 3x + z$.

Nun ist

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

folglich $(3x + z)^2 = (2x + 2z)^2 + (x + z)^2$

$$9xx + 6xz + zz = (4xx + 8xz + 4zz) + (xx + 2xz + zz)$$

$$9xx + 6xz + zz = 5xx + 10xz + 5zz$$

subtrah. $5xx + 6xz + zz = 5xx + 6xz + zz$

bleibet $4xx \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots 4xz + 4zz$

daher ist $xx = xz + zz$

$$xx = z(x + z)$$

$$MF^2 = (AF - MF)\ AF$$

$$MF^2 = AF^2 - MF.\ AF$$

$$MF^2 + AF.\ MF = AF^2.$$

Diese

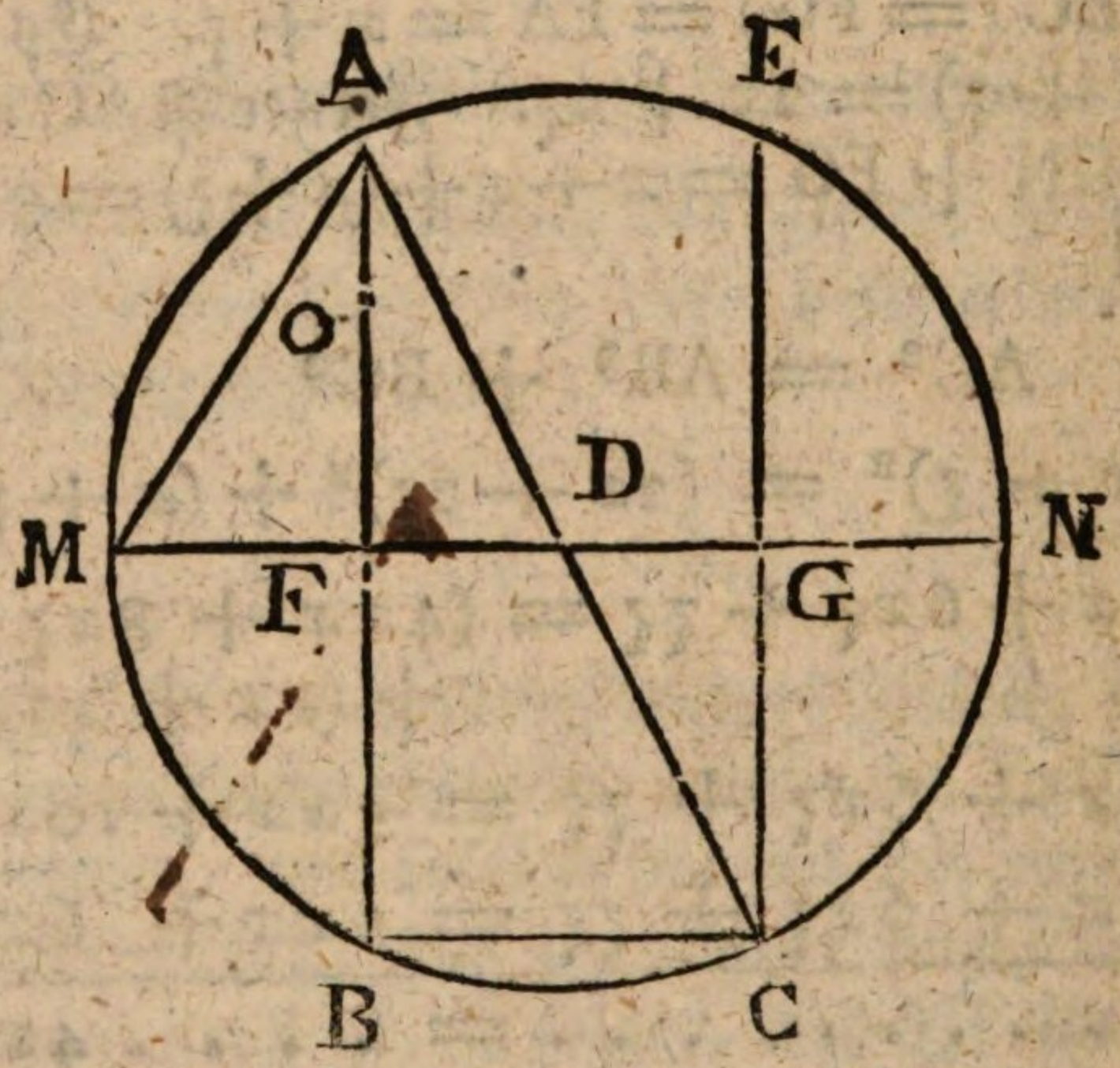
Diese Gleichung zeiget die Seite des Zehnecks an, wenn der Halbmesser des Zirkels AF ist (V. §. 28.), oder es ist MF die Mediane der AF.

Da nun MF die Seite des Zehnecks ist, so ist AM die Seite des Fünfecks für den nemlichen Halbmesser, weil $AM^2 = AF^2 + MF^2$ (V. §. 29.)

§. 32.

Aufgabe.

Es ist ein halber Zirkel MAN gegeben. Es sollen darin die Linien AF, FM, AM gezogen werden, so daß AF auf dem Durchmesser MN senkrecht stehe, und daß, wenn mit dem Halbmesser AF ein anderer Zirkel beschrieben wird, die MF zur Seit des Zehnecks und AM zur Seite des Fünfecks werde.



Auflösung. Es war $AB = 2AF$ und $BC = AF$.

Da nun $(MN)^2 = (AC)^2 = AB^2 + BC^2$

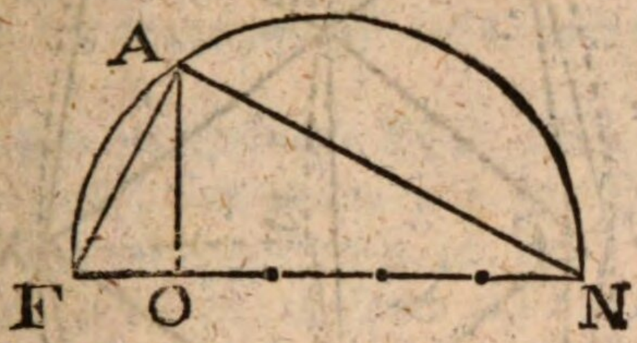
so ist . . . . . $(MN)^2 = (2AF)^2 + (AF)^2$

oder . . . . . $(MN)^2 = 5AF^4$.

oder $AF^2 = \frac{1}{5} MN^2$

Es

Es kömmt also nur darauf an, die Linie AF in der vorhergehenden oder in der hier beygefügten Figur so zu bestimmen, daß das Quadrat derselben der fünfte Theil des Quadrats des Durchmessers MN sey.



Um dieses zu erhalten, so mache den Halbmesser FN gleich dem gegebenen MN. Theile FN in fünf gleiche Theile, so daß $FO = \frac{1}{5} FN$.

So ist im rechteckigten Dreyecke FAN, die Seite FA die mittlere Proporzional-Linie zwischen FN und FO, also ist

$$FO, FA :: FA, FN$$

$$\frac{1}{5}FN, FA :: FA, FN$$

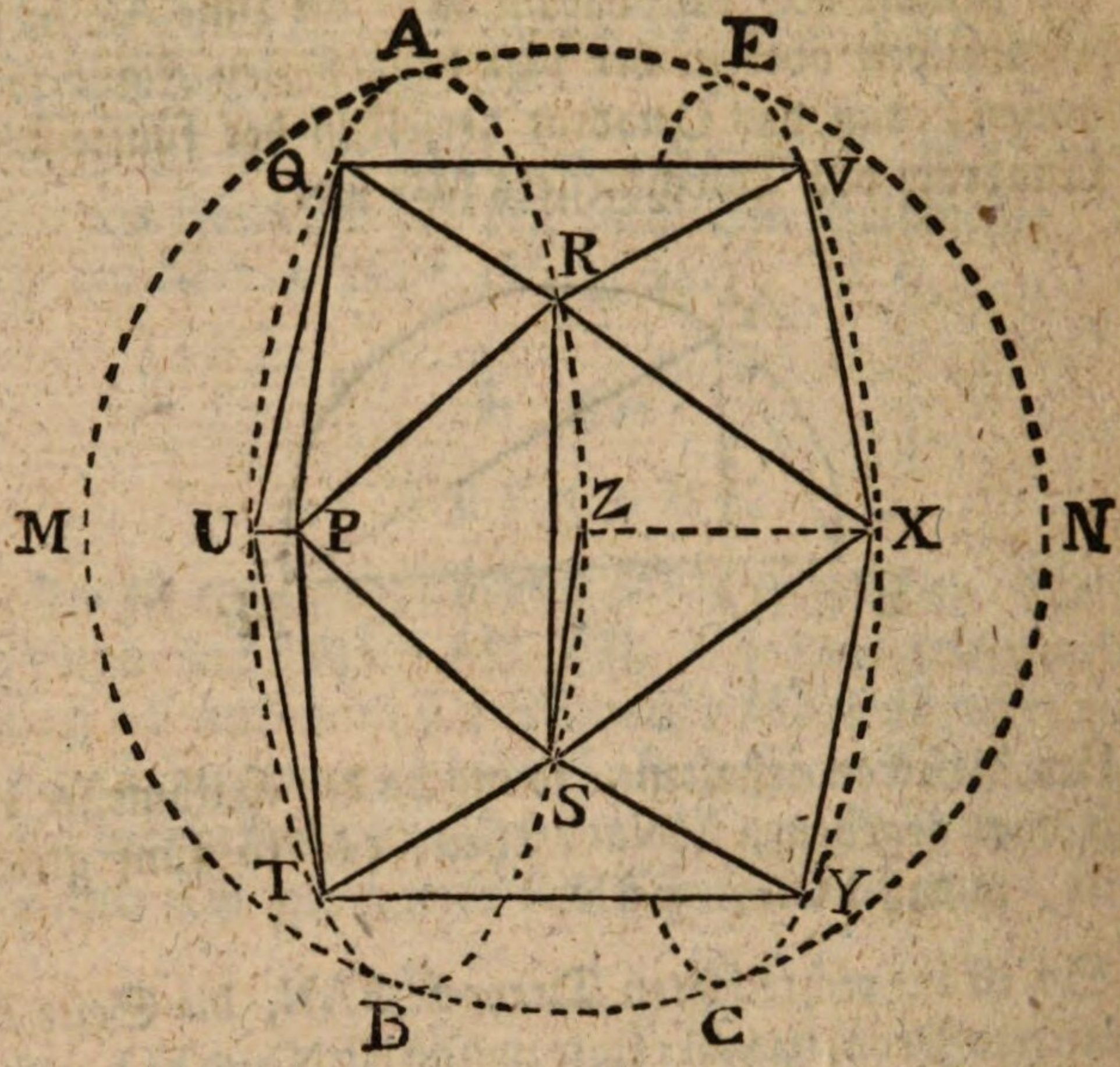
daher ist $FA^2 = \frac{1}{5}FN^2$

FA ist demnach die verlangte Linie. Nimmt man nun aus dem Mittelpunkte D (vorletzter Figur), $DF = DG = \frac{1}{2} AF$, so ist die Lage der Sehnen AB, EC bestimmt.

§. 18.

Aufgabe.

In einer Kugel ein Ikosaedron einschreiben.



Auflösung.

Es sey MN ein Durchmesser der Kugel. Nimm nach Belieben diesen oder einen anderen Durchmesser. Stelle dir vor, die Kugel sey längst demselben durchgeschnitten. Im Zirkel, der den Durchschnitt vorstellet, ziehe die Sehnen, welche in der Figur des §. 16. 17. mit AB und EC bezeichnet worden. Mit den gleichen Halbmessern AF, EG beschreibe aus den Punkten F und G zwey Zirkel, die mit einander parallel seyn, und auf dem angenommenen Halbmesser, oder auf dem Durchschnitte der Kugel senkrecht stehen müssen.

Theile die Umkreise der Zirkel AB und EC (in hier beigefügter Figur) jeden in 10 gleiche Theile, so daß die gegenüberstehenden Theilungspunkte allemal in einer Linie liegen, die auf beyden Zirkeln senkrecht sey.

Im Zirkel AB beschreibe das Fünfeck QRSTU, indem du jeden zweyten Theilungspunkt übergehest.

Es sey P das Ende des Durchmessers der Kugel, welcher anfänglich angenommen worden, und worauf die Zirkel AB und EC senkrecht stehen. Ziehe nach dem Punkte P zu die Sehnen QP, RP, SP, TP, UP.

So sind alle diese Linien = AM (§. 16. 17.) das ist, sie sind gleich der Seite des Fünfecks, was im Zirkel AB beschrieben ist.

Folglich sind die Dreyecke PQR, PRS, PST, PTU, PUQ, alle regulär, und gleich, und ihre Seiten sind alle gleich der AM in der Figur des §. 16. 17.

Mit dem Zirkel EC verfahre auf die nemliche Art. Nur müssen die Seiten des Fünfecks nicht mit den Seiten des vorigen übereinkommen; sondern wo eine Seite ist, da kömmt eine Ecke gegenüber, und wo im Fünfeck AB eine Ecke ist, da kömmt im Fünfeck EC eine Seite gegenüber.

In der Figur sind nur zwey Seiten VX, XY des Fünfecks EC zu sehen; die übrigen, wie auch den körperlichen Winkel, welcher dem Winkel P gegenüber stehet, muß man sich auf der unsichtbaren Seite des Körpers vorstellen.

Auf solche Art hat man an jedem Ende des Körpers schon fünf ähnlichgleiche Dreyecke, zusammen zehn Dreyecke.

Nun ziehe von den Ecken des Fünfecks AB zu den Ecken des Fünfecks EC, die Linien QV, VR, RX, XS, SY, YT, u. s. f. So entstehen rund herum, zwischen den Fünfecken AB und EC zehn Dreyecke, die wiederum mit den übrigen ähnlichgleich sind.

Denn man ziehe SZ, die Seite des Zehnecks im Zirkel AB, und vom Punkte Z zum gegenüberstehenden Punkte X, die gerade ZX, so ist ZX dem Durchmesser des Zirkels AB gleich, nemlich ZX ist gleich der Linie FG in der Figur des §. 17. oder der Linie *AF* der nemlichen Figur. Ferner ist SZ, Seite des Zehnecks, gleich der FM (§. 17.). Beide stehen senkrecht auf einander. Also ist SX gleich der AM (§. 17.), oder der Seite des Fünfecks, oder der SR. Eben so läßt sich beweisen, daß RX = RS.

Also ist das Dreyeck RXS gleichseitig, und da dessen Seiten der Seite des Fünfecks gleich sind, so ist das Dreyeck RXS mit den Dreyecken ähnlichgleich, die sich in P vereinigen.

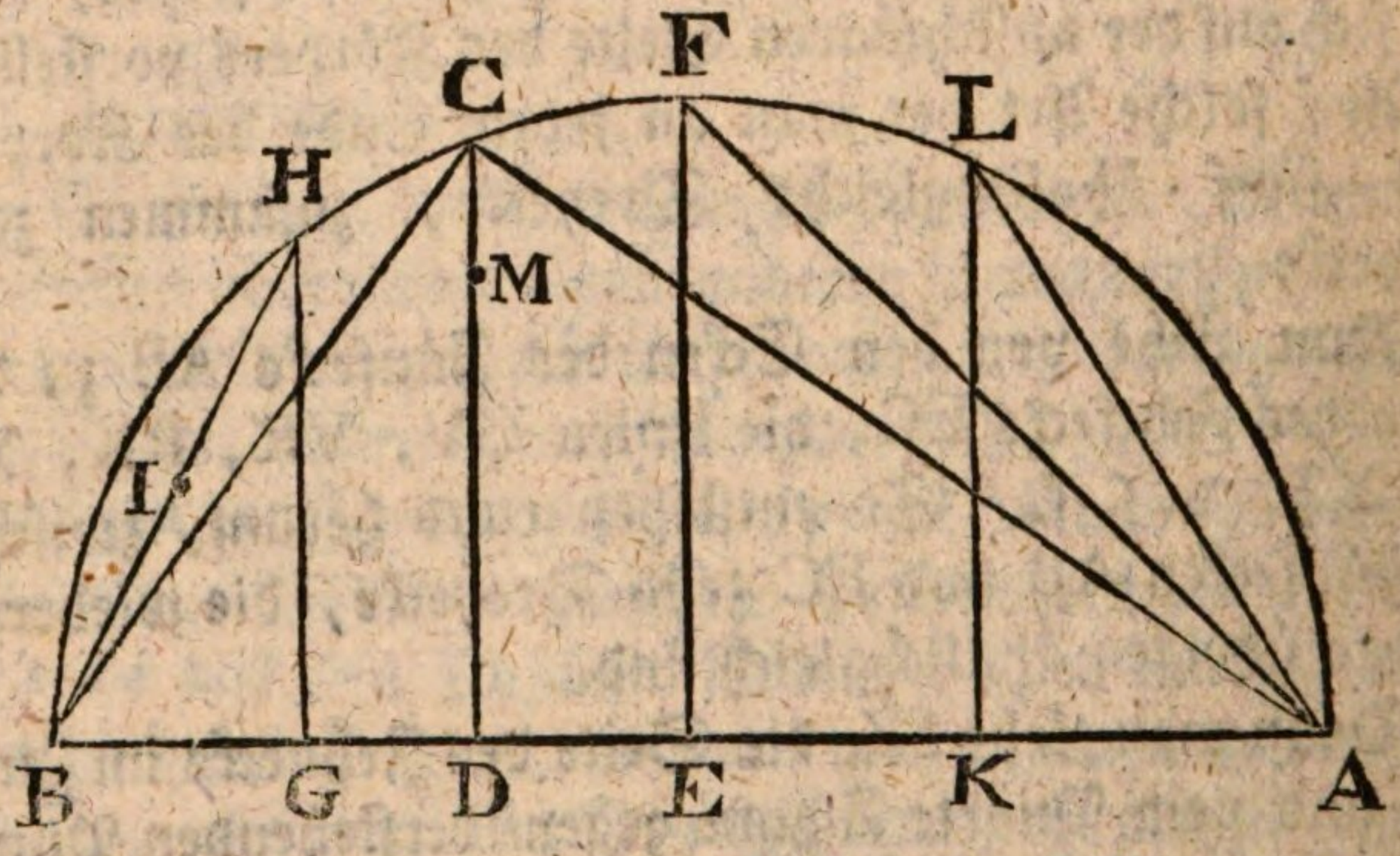
So läßt sich von allen zehn Dreyecken, die um die Mitte des Körpers liegen, beweisen, daß sie mit den anderen zehn, die an beiden Enden liegen, ähnlichgleich sind.

Folglich ist der ganze Körper in 20 ähnlichgleichen und regulären Dreyecken eingeschlossen. Und ein solcher Körper ist ein Ikasaedron.

§. 19.

Aufgabe.

Es ist der Durchmesser einer Kugel gegeben. Es sollen die Flächenseiten der fünf eingeschriebenen regulären Körper dargestellet werden.



Auflösung. Beschreibe über dem gegebenen Durchmesser BA der Kugel einen halben Zirkel.

1) Mache $BD = \frac{1}{3}BA$. Ziehe DC senkrecht auf BA. Ziehe AC. So ist AC die Flächenseite des Tetraedrons. Zugleich ist DC der Durchmesser des Zirkels, worin jedes Dreyeck des Tetraedrons beschrieben wird. Und BC ist die

die nöthige Oefnung des Zirkels, um auf der Fläche der Kugel einen solchen Zirkel zu beschreiben. (Siehe §. 7.)

2) Die Linie BC ist auch die Flächenseite des Würfels oder Hexaedrons. Zugleich ist AC der Durchmesser des Zirkels, worin jedes Viereck des Würfels eingeschrieben werden kann. (§. 9.)

3) Errichte EF senkrecht über der BA im Mittelpunkte E, und ziehe FA, so ist FA die Flächenseite des Oktaedrons. (§. 11)

4) Nimm die Flächenseite BC des Würfels. Suche die Mediane (§. 12.). Diese sey = DM. So ist DM die Flächenseite des Dodekaedrons. (§. 14.).

5) Nimm $BG = \frac{1}{5}BA$. Stelle GH senkrecht auf BA. Ziehe BH. Nimm $BI = \frac{1}{2}BH$. Mache $EK = BI = \frac{1}{2}BH$. Stelle KL senkrecht auf BA. Ziehe LA. So ist LA die Flächenseite des Ikosaedrons. (§. 16. 17. 18.)

§. 20.

Aufgabe.

Die Anzahl der Flächenseiten jedes regulären Körpers finden.

Auflösung. Multiplizire die Zahl der Flächen mit der Zahl der Seiten jeder Fläche, und halbire das Produkt.

Denn es bestehe die ganze Oberfläche des Körpers aus f Flächen, und jede Fläche sey von k Seiten begränzet, so wäre die Anzahl der Seiten $f \times k$. Weil aber jede Seite zweymal gerechnet wird, indem sie zu zwey an einander stoßenden Flächen gehöret, so behält man nur die Hälfte der Seiten.

1) In Tetraedron sind vier Dreyecke. Also ist die Anzahl der Flächenseiten $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

2) Im Hexaedron oder Würfel sind 6 Vierecke, also $\frac{6 \times 4}{2} = 12$ Flächenseiten.

3) Im Oktaedron sind 8 Dreyecke, also $\frac{8 \times 3}{2} = 12$ Flächenseiten.

4) Im Dodekaedron sind 12 Fünfecke, also $\frac{12 \times 5}{2} = 30$ Flächenseiten.

5) Im Ikosaedron sind 20 Dreyecke, also $\frac{20 \times 3}{2} = 30$ Flächenseiten.

Es hat also der erste Körper 6 Flächenseiten, die beyden folgenden 12, und die beiden übrigen 30.

§. 21.

Aufgabe.

Die Anzahl der körperlichen Winkel in jedem der fünf regulären Körper finden.

Auflösung. Multiplizire die Zahl der Flächen mit der Zahl der Ecken, die in jeder Fläche sind. Dividire das Produkt durch die Zahl der Ecken, die zu einem körperlichen Winkel gehören.

Denn es sey die Zahl der Flächen f, die Zahl der Ecken in jeder Fläche e, so hat man $f \times e$ Ecken. Gesetzt es gehören nun n Ecken zu einem körperlichen Winkel, so ist die Anzahl derselben $\frac{fe}{n}$.

1) Im Tetraedron sind 4 Dreyecke, und es gehören drey Ecken zu jedem Winkel, also ist die Anzahl der Winkel $\frac{4 \times 3}{3} = 4$.

2) Im Hexaedron sind 6 Vierecke, und 3 Ecken machen einen Winkel, also sind $\frac{6 \times 4}{3} = 8$ Winkel.

3)

3) Im Oktaedron sind 8 Dreyecke, und 4 Ecken machen einen Winkel, daher sind $\frac{8 \times 3}{4} = 6$ Winkel.

4) Im Dodekaedron sind 12 Fünfecke, und 3 Ecken machen einen Winkel, also sind $\frac{12 \times 5}{3} = 20$ Winkel.

5) Im Ikosaedron sind 20 Dreyecke, und 5 Ecken machen einen Winkel, also sind überhaupt $\frac{20 \times 3}{5} = 12$ Winkel.

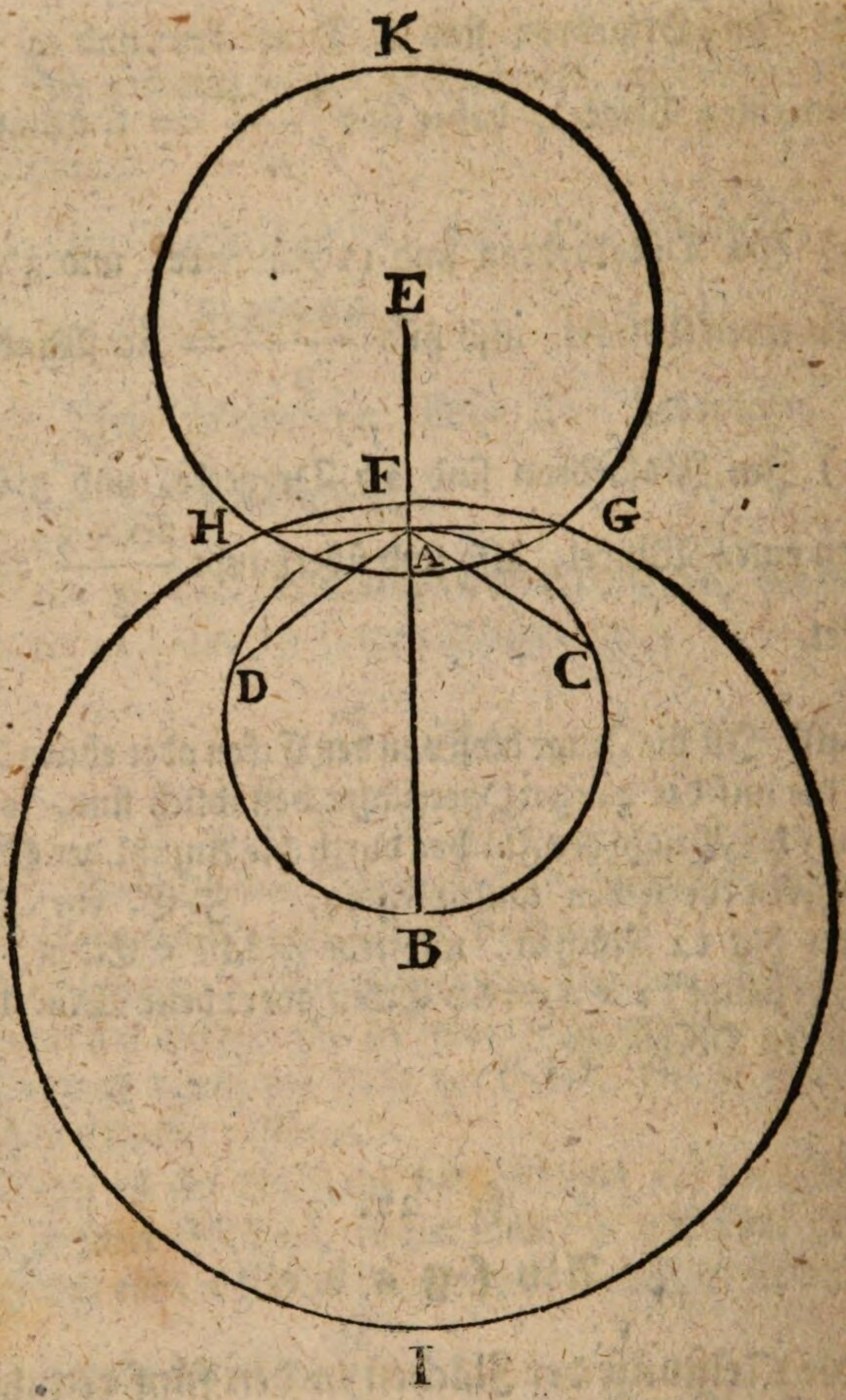
Zus. Ist die Frage bloß von den Ecken oder ebnen Winkeln, die auf der ganzen Oberfläche befindlich sind, so darf man nur die Anzahl der Flächen durch die Anzahl der Seiten oder Ecken derselben multipliziren. Z. E. ein Dodekaedron hat 12 Flächen, und jede Fläche 5 Ecken, also sind überhaupt $12 \times 5 = 60$ Ecken oder ebene Winkel auf der ganzen Oberfläche.

§. 22.

Aufgabe.

Die Neigung der Flächen in den fünf regulären Körpern bestimmen.

(Siehe die folgende Figur.)



Auflösung. Hierzu gehören drey Zirkel.

I) Der erste Zirkel FGIHF ist willkührlich, und stellet den großen Zirkel einer Kugel vor, worin der reguläre Körper eingeschrieben werden soll.

Suche die Flächenseite GH des Körpers, der in solcher Kugel eingeschrieben werden kann (§. 19.), und trage die Sehne GH auf dem Umkreise.

II)

II) Beschreibe den zweyten Zirkel GKH, so daß er eine Fläche des Körpers fassen könne. Oder vermöge der Seite GH eines der Vielecke, woraus die Körperfläche bestehet, suche den Mittelpunkt E des umgeschriebenen Zirkels.

Ziehe *EB* von einem Mittelpunkte zum andern. So läßt sich leicht beweisen, daß EB auf GH senkrecht ist, und die Sehne GH in A halbiret.

III) Ueber AB als Durchmesser beschreibe den dritten Zirkel ACBDA.

Nimm darin die Sehnen AC und *AD*, jede der *AE* gleich, so bilden sie den ebnen Winkel, der die verlangte Neigung der Flächen bestimmt, oder es ist ∠CAD dieser Neigung gleich.

Beweis. Die bloße Einbildungskraft wird die Sache deutlicher machen, als eine perspektivische Figur, welche hier ziemlich verwirrt ausfallen würde.

Nimm in Gedanken zwey nebeneinander liegende Flächen des Körpers. Nimm die Mitte ihrer gemeinschaftlichen Seite. Von dieser Mitte ziehe gerade Linien nach den Mittelpunkten beyder Flächen oder eigentlich nach den Mittelpunkten der umgeschriebenen Zirkel.

So werden beyde gerade Linien auf der gemeinen Seite senkrecht stehen, und die Neigung der Flächen bestimmen.

Aus den Mittelpunkten beyder Flächen, und aus der Mitte der gemeinen Seite, ziehe gerade Linien nach dem Mittelpunkte der Kugel.

So entstehen zwey rechtwinkliche ähnlichgleiche Dreyecke, welche ihre rechte Winkel an den Mittelpunkten beyder Flächen haben. Sie haben eine gemeinschaftliche Hypotenuse, nemlich die gerade Linie, die von der Mitte der gemeinen Seite zum Mittelpunkte der Kugel gehet.

Beschreibet man demnach über dieser Hypotenuse, als Durchmesser, einen Zirkel, so fallen die rechten Winkel, eben deswegen weil sie rechte sind, in den Umkreis.

Alsdann werden die beyden geraden Linien die von den Mittelpunkten der Flächen auf die gemeine Seite senkrecht fallen, zu zweyen gleichen Sehnen des Zirkels, und bilden einen Winkel welcher der Neigung der Flächen gleich ist.

Um diesen Winkel zu bestimmen, muß man also aus dem Mittelpunkte B der Kugel (siehe die letzte Figur) auf die gemeine Flächenseite GH die senkrechte Linie BA ziehen, wodurch GH in A halbiret wird. 2) Ueber dieser B*A* muß der Zirkel ACBDA beschrieben werden, dessen Fläche eigentlich auf GH senkrecht seyn sollte. So liegen die Mittelpunkte beyder Flächen im Umkreise dieses Zirkels. 3) Man muß die senkrechte Linie AE kennen, die vom Mittelpunkt jeder Fläche auf die gemeine Seite GH fällt, und die Sehnen AC, *A*D derselben gleich machen. Alsdann sind ACB und ADB beyde vorhergedachte rechtwinkliche Dreyecke, und die Linien AC und AE zeigen die wahre Lage oder Neigung beyder Flächen an. Dieses Verfahren aber stimmet vollkommen mit der gegebenen Auflösung überein.

Zusatz. Machet man die Figur so groß als möglich, daß sie recht ackurat werde, und mißt den Winkel *CAD* mit dem Winkelmesser, so kann man die Grade desselben bestimmen. Diese Grade lassen sich aber noch genauer durch trigonometrische Linien berechnen, von welchen in der Folge geredet werden soll.

§. 23.

Aufgabe.

Es ist der Durchmesser der Kugel gegeben. Es soll die Flächenseite der fünf regulären Körper berechnet werden.

Auflösung. Es sey *d* der Durchmesser der Kugel und *k* die Flächenseite des Körpers.

I) So ist im Tetraedron (§. 5.)

$$k^2 = 6\left(\tfrac{1}{3}d\right)^2$$
$$k^2 = 6\left(\tfrac{1}{9}d^2\right)$$
$$k^2 = \tfrac{6}{9}d^2$$
$$k^2 = \tfrac{2}{3}d^2$$
$$k = d\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

II) Im Würfel oder Hexaedron ist (§. 8.)

$$3k^2 = d^2$$
$$k^2 = \tfrac{1}{3}d^2$$
$$k = d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

III) Im Oktaedron ist (§. 10.)

$$k^2 = \tfrac{1}{2}d^2$$
$$k = d\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

IV) Um die Flächenseite des Dodekaedrons zu finden, muß die Mediane der Flächenseite des Würfels gesuchet werden. (§. 14.)

Die Flächenseite des Würfels war $d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$. Es sey die Mediane x, so ist (§. 12.)

$$\left(d\sqrt{\tfrac{1}{3}} - x\right),\ x :: x,\ d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

folglich ist $xx = d\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(d\sqrt{\tfrac{1}{3}} - x\right)$

$$xx = \tfrac{1}{3}d^2 - x.\ d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$
$$xx + x.\ d\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}d^2$$

addire beyderseits $\tfrac{1}{4}\left(d\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^2 = \tfrac{1}{12}d^2$, so ist

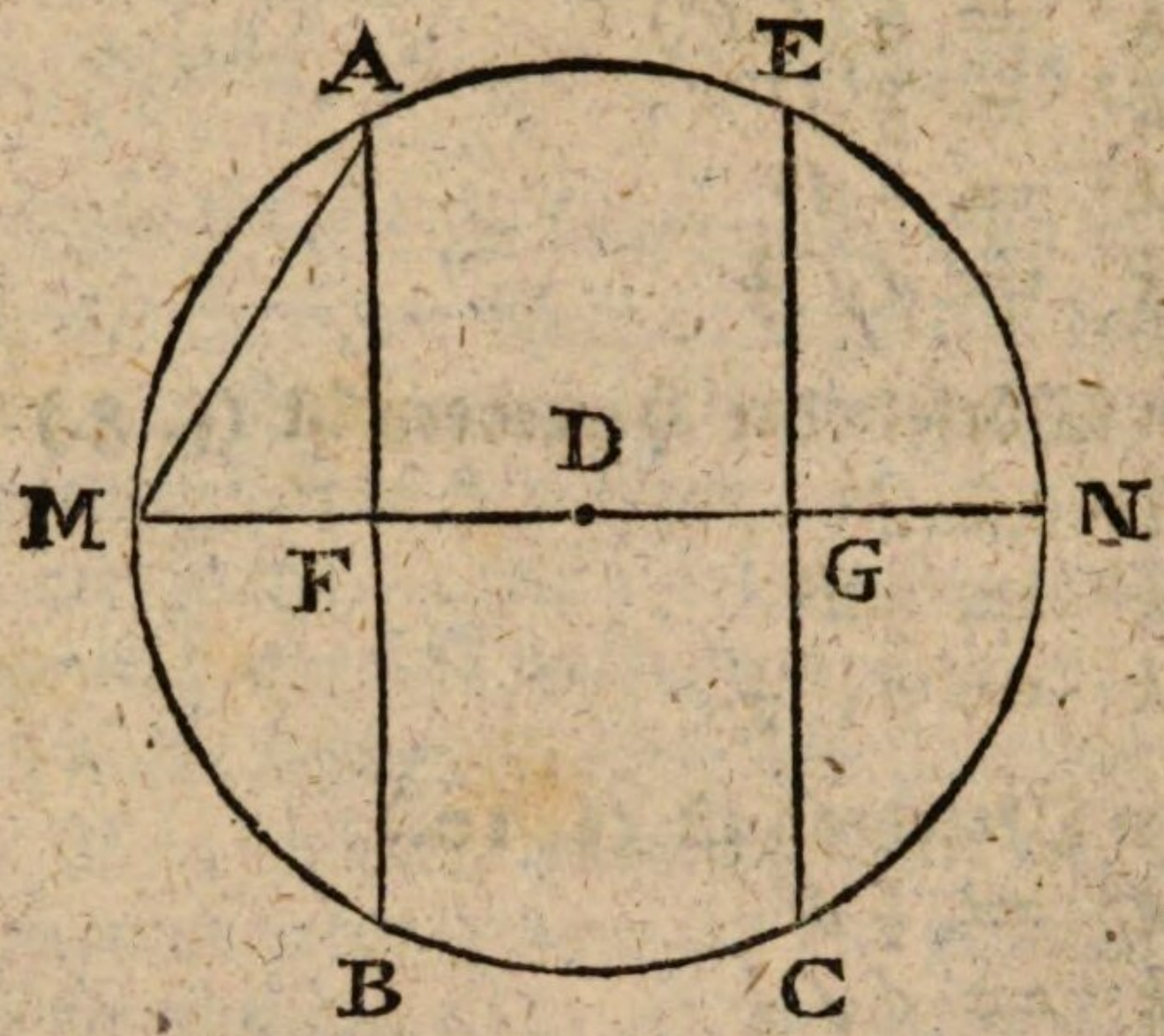
$$xx + x.\ d\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{12}d^2 = \tfrac{5}{12}d^2$$

daher $x + \tfrac{1}{2}d\sqrt{\tfrac{1}{3}} = d\sqrt{\tfrac{5}{12}}$

$$x = d\sqrt{\tfrac{5}{12}} - \tfrac{1}{2}d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$
$$x = d\left(\sqrt{\tfrac{5}{12}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$$
$$x = d\left(\sqrt{\tfrac{5}{12}} - \sqrt{\tfrac{1}{12}}\right)$$
$$x = \tfrac{1}{2}d\left(\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \tfrac{1}{2}d\,\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$$

Und dieses ist die Flächenseite des Dodekaedrons.

V)



V) Es sey MN (= d) der Durchmesser. Es seyen die Sehnen AB, EC so gezogen, daß sie senkrecht auf MN stehen, und daß AF = FG = 2FD, so ist AM (= x) die Flächenseite des Fünfecks, das im Zirkel eingeschrieben ist, der AF zum Halbmesser hat (§. 16.) und zugleich die Flächenseite jedes Dreyecks im Ikosaedron. Es kömmt also bloß darauf an, daß wir AM oder k algebraisch ausdrücken.

Es ist bewiesen worden (§. 17.) daß

$$AF^2 = \tfrac{1}{5} MN^2$$

Nun ist

$$MF,\ AF :: AF,\ FN$$
$$MF,\ AF :: AF,\ (MN - MF)$$
$$AF^2 = MF.\ (MN - MF)$$
$$AF^2 = MF.\ MN - MF^2.$$

da auch $AF^2 = \frac{1}{5}MN^2$

so ist $\frac{1}{5}MN^2 = MF.\ MN - MF^2$

oder $MF^2 - MN.\ MF = -\frac{1}{5}MN^2$

$$MF^2 - MN.\ MF + \tfrac{1}{4}MN^2 = (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5})\ MN^2$$

$$= \tfrac{1}{20}\ MN^2$$

$$MF - \tfrac{1}{2}MN = MN \sqrt{\tfrac{1}{20}}$$

$$MF \ldots = \tfrac{1}{2}MN + MN. \sqrt{\tfrac{1}{20}}$$

$$MF^2 = \tfrac{1}{4}MN^2 + MN^2 \sqrt{\tfrac{1}{20}} + \tfrac{1}{20}\ MN^2$$

$$= \tfrac{5}{20}\ MN^2 + MN^2 \sqrt{\tfrac{1}{20}}$$

$$= MN^2\ (\tfrac{3}{10} + \sqrt{\tfrac{1}{20}})$$

Nun ist

$$AM^2 = AF^2 + MF^2$$

$$= \tfrac{1}{5}MN^2 + \tfrac{3}{10}\ MN^2 + MN^2 \sqrt{\tfrac{1}{20}}$$

$$= \tfrac{1}{2}MN^2 + MN^2.\ \sqrt{\tfrac{1}{20}}$$

$$= MN^2\ (\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{20}})$$

$$AM = MN. \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{20}})}$$

$$k = d. \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{20}})}$$

§. 24.

Aufgabe.

Die ganze Oberfläche jedes regulären Körpers berechnen.

Auflösung. Nachdem die Seiten der Flächen gefunden worden, so können die Flächen selbst berechnet werden.

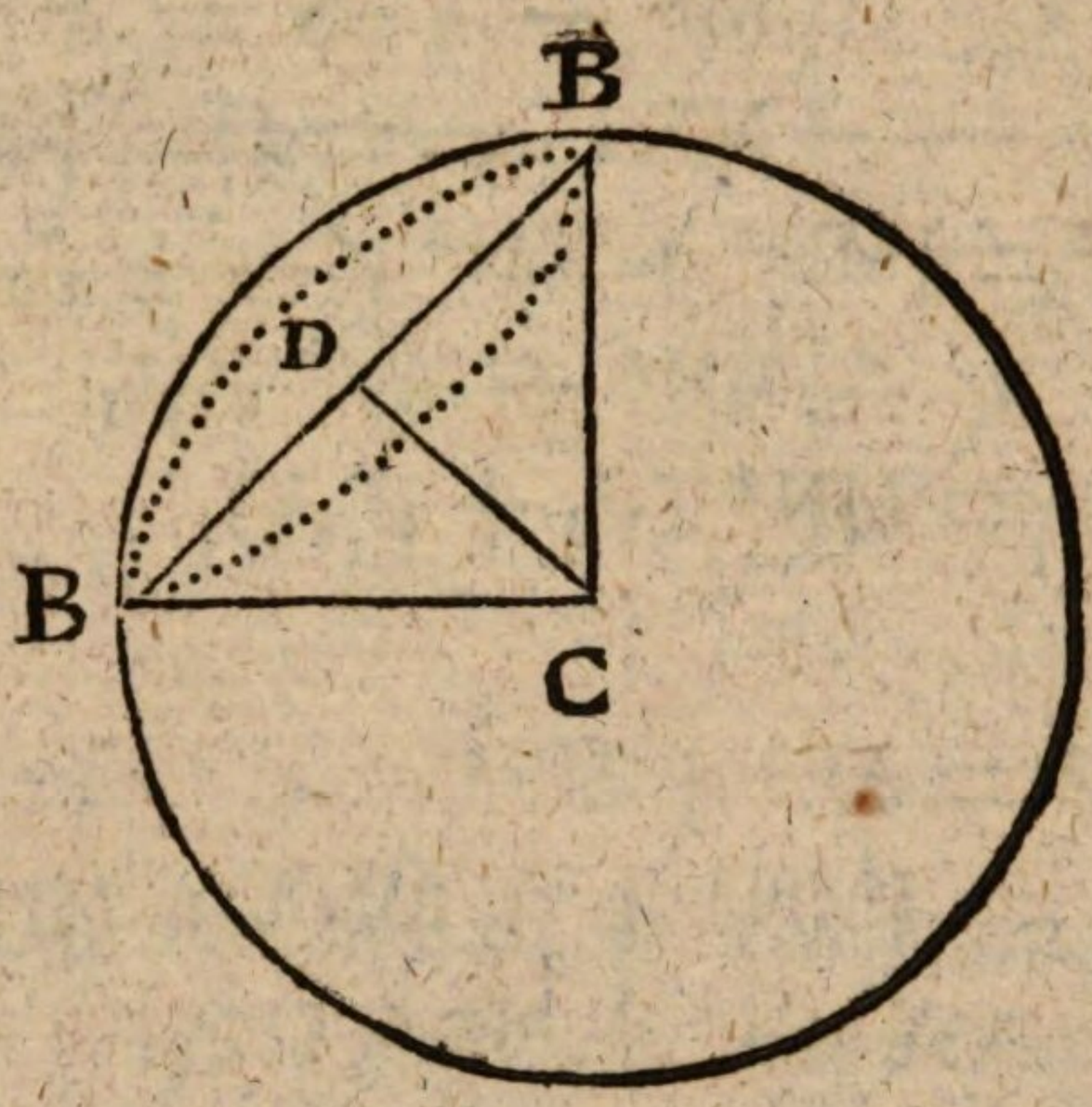
Wird nun eine Fläche mit der Anzahl aller Flächen multipliziret, so bekömmt man die ganze Oberfläche des Körpers.

§. 25.

§. 25.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines regulären Körpers finden.



Auflösung. Nachdem die Flächenseite gefunden worden, so läßt sich der Durchmesser oder der Halbmesser des Zirkels berechnen, worin jede Fläche eingeschrieben werden kann.

Ein solcher Durchmesser sey BB, oder der Halbmesser BD, so läßt sich im rechteckigten Dreyecke CDB, die Linie CD aus den bekannten BC und BD bestimmen.

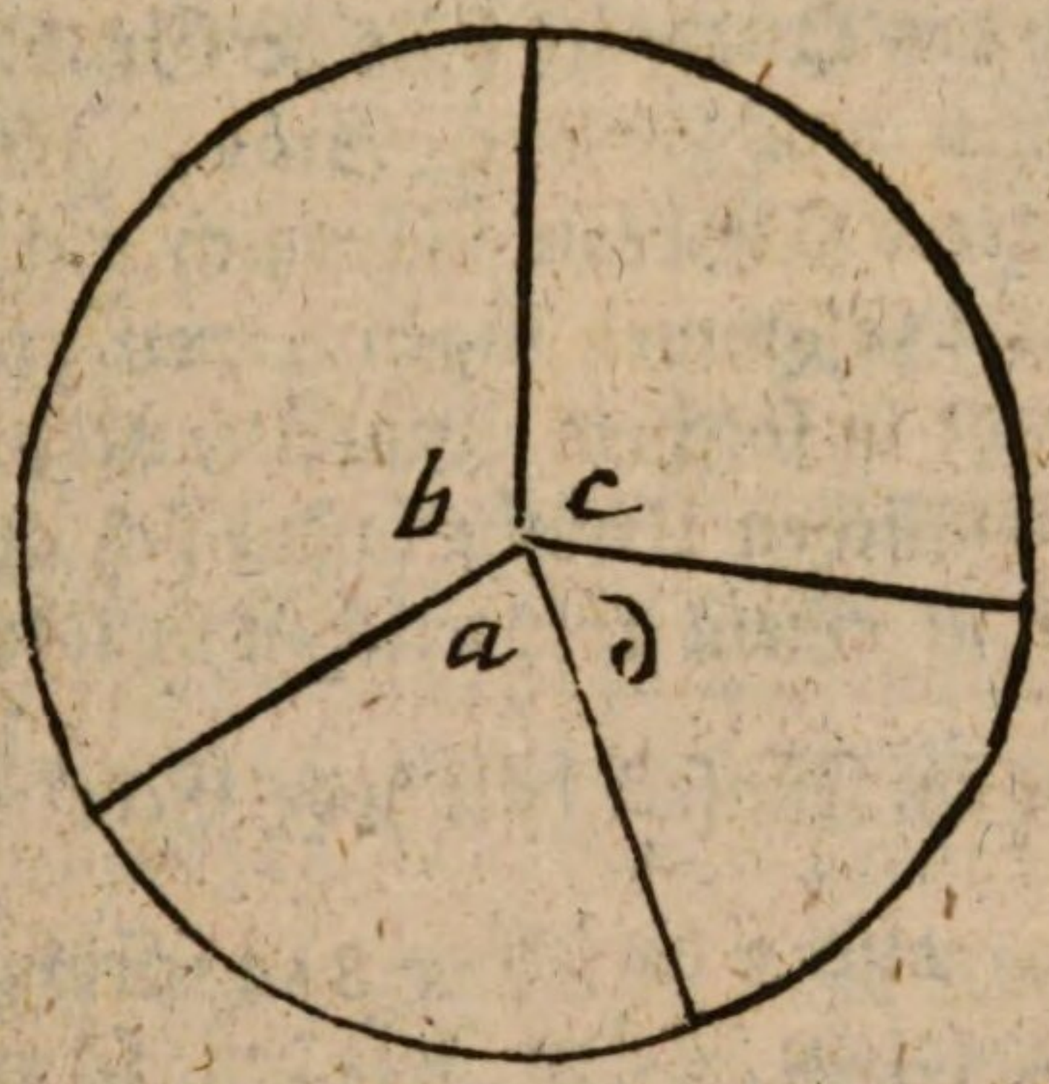
Diese CD ist die senkrechte Höhe einer Pyramide die im Mittelpunkte der Kugel ihre Spitze und eine Fläche des Körpers zur Grundfläche hat.

Und da der Körper so viel dergleichen Pyramiden enthält als Flächen sind, so darf man nur erstlich die ganze Oberfläche des Körpers berechnen, und dieselbe mit dem dritten Theile der Höhe CD multipliziren, um den Inhalt aller Pyramiden oder des ganzen Körpers zu haben.

§. 26.

§. 26.

Wir könnten noch verschiedene Aufgaben vorschlagen, welche sich anf die fünf regulären Körper beziehen. Weil aber wenig Nutzen damit verknüpfet ist, so bleibet uns noch übrig zu beweisen, daß nicht mehr als fünf reguläre Körper möglich sind.



Man merke erstlich dieses, daß die Ecken oder ebenen Winkel, welche zusammen einen körperlichen Winkel bilden, nothwendig eine Summe ausmachen, die kleiner als 4 Rechte oder 360 Grad ist. Denn wann einige Ecken als *a*, *b*, *c*, *d* in einer Ebne liegen, so machen sie zusammen 360 Grad, und sie bilden keinen körperlichen Winkel. Wird aber von einer oder der andern etwas abgenommen, so können sie dermaßen zusammengefügt werden, daß ein holer Raum, oder ein körperlicher Winkel entstehe. Es muß also etwas an 360 Graden fehlen, wann drey oder mehrere Ecken einen Winkel machen sollen.

Im regulären Dreyeck ist jede Ecke = 60 Grad. Drey solche Ecken können zusammengefüget werden, und machen 180 Grad, wie in den Winkeln des Tetraedrons. Vier Ecken zu 60 Grad können auch zusammengefüget wer-

den

den und machen 240 Grad, wie im Oktaedron. Fünf Ecken zu 60 Grad können auch noch zusammengefüget werden, und machen 300 Grad, wie im Ikosaedron. Mehr als 5 Ecken zu 60 Grad, lassen sich nicht in einem körperlichen Winkel zusammen fügen, weil sie entweder 360 Grad oder mehr ausmachen würden. Also läßt sich aus regulären Dreyecken keine Oberfläche mehr zusammensetzen.

Jede Ecke des Quadrats hält 90 Grad. Drey solche Ecken zusammen machen 270 Grad, wie im Würfel. Vier oder mehrere Quadrate lassen sich nicht in einem körperlichen Winkel zusammen fügen, weil 360 Grade oder noch mehr Grade in solchem Winkel entstehen würden.

Aus der nemlichen Ursache lassen sich auch nicht mehr als 3 Fünfecke in einem körperlichen Winkel an einander fügen. Denn im Fünfeck hält jede Ecke $\frac{(5-2)\,180}{5}$ = 108 Grad, also 3 derselben 324 Grad, wie im Dodekaedron. 4 solche Ecken würden schon 432 Grad ausmachen.

Im regulären Sechseck hält jede Ecke $\frac{(6-2)\,180}{6}$ = 120 Grad. Drey solche Ecken würden schon 360 Grad ausmachen, welches keinen körperlichen Winkel geben kann. Noch weniger können mehr als 3 Ecken von 120 Graden an einander gefüget werden.

Noch viel weniger können mehr als zwey Siebenecke, Achtecke, u. s. f. an einander gefügt werden, und einen körperlichen Winkel bilden.

Woraus man siehet, daß keine andere reguläre Körper statt finden können als solche, wo jeder körperliche Winkel entweder von 3, 4, 5 Dreyecken, oder von 3 Vierecken, oder von 3 Fünfecken gebildet wird; und dieses sind die fünf bekannten regulären Körper.

§. 27.

Wir wollen nun die verschiedenen Ausmessungen der regulären Körper dem Leser in einer Tafel kürzlich vor den Augen legen; wie sie durch die vorhergehenden Lehrsätze, und zum Theile noch bequemer durch die Trigonometrie berechnet werden können.

Körper	Tetraed.	Hexaed.	Oktaed.	Dodek.	Ikosaed.
Anz. der Flächen	4 IIIecke	6 IVecke	8 IIIecke	12 Veck.	20 IIIeck.
der Flächenseiten	6	12	12	30	30
der ebn. Winkel	12	24	24	60	60
d. körperl. Wink.	4	8	6	20	12
Neig. d. Flächen	70g 32′	90g	109g 28′	116g 34′	138g 10′
Halbm. d. Kugel	1	1	1	1	1
die Flächenseite	1;6330	1;1547	1;4142	0;7136	1;0514
Hbm. d. umges. ⊙	0;9426	0;8164	0;8164	0;6070	0;6070
Entfern. vom Pol	1;1742	0;9192	0;9192	0;6408	0;6408
ganze Oberfläche	4;6188	8;0000	6;9282	10;5146	9;5745
körp. Inhalt	0;1513	1;5396	1;3333	2;7851	2;5360

Da die fünf letzten Zahlen in jeder Kolumne für eine Kugel berechnet sind, die 1 zum Halbmesser hat, so muß man, wenn der Halbmesser a ist, die Flächenseite, den Halbmesser des umgeschriebenen Zirkels, und die Entfernung vom Pole, mit a multipliziren, die Oberfläche des Körpers aber mit a^2, und den körperlichen Inhalt mit a^3.

Zusatz I. Will man, daß die fünf Körper alle die nemliche Flächenseite bekommen sollen, so sage man: wie sich die Flächenseite in der Tafel zur gegebenen verhält, so verhält sich der Halbmesser 1 zum verlangten; und diese Proporzion wiederhole man für jeden Körper. Oder kürzer, man dividire die gegebene Flächenseite durch diejenige die in der Tafel stehet, um für jeden Körper den Halbmesser der umgeschriebenen Kugel zu bekommen. Auf eine ähnliche Weise müste man verfahren, wenn der Halbmesser des umgeschriebenen Zirkels, oder die Entfernung vom Pole, in allen Körpern die nemliche seyn sollte.

Zusatz II. Sollen alle fünf Körper die nemliche Oberfläche *c* haben, so sage man: wie sich die Oberfläche in der Tafel zur Oberfläche *c* verhält, so verhält sich 1^2 oder 1, zum Quadrate des gesuchten Halbmessers, für jeden Körper. Aus den gefundenen Quadratzahlen ziehe man die Wurzeln.

Zusatz III. Sollen die Körper einerley körperlichen Inhalt *d* haben, so sage man bey jedem: wie sich der Inhalt in der Tafel zum gegebenen *d* verhält, so verhält sich 1^3 oder 1 zum Kubus des verlangten Halbmessers, woraus dann jedesmal die Kubikwurzel gezogen werden muß.

Diese drey Zusätze beruhen darauf, daß in ähnlichen Körpern ähnlich gezogene Linien im nemlichen Verhältnisse stehen, die Flächen aber sich verhalten wie die Quadrate der ähnlichen Linien, und die körperlichen Größen wie die Würfel derselben.

Eilftes Hauptstück.

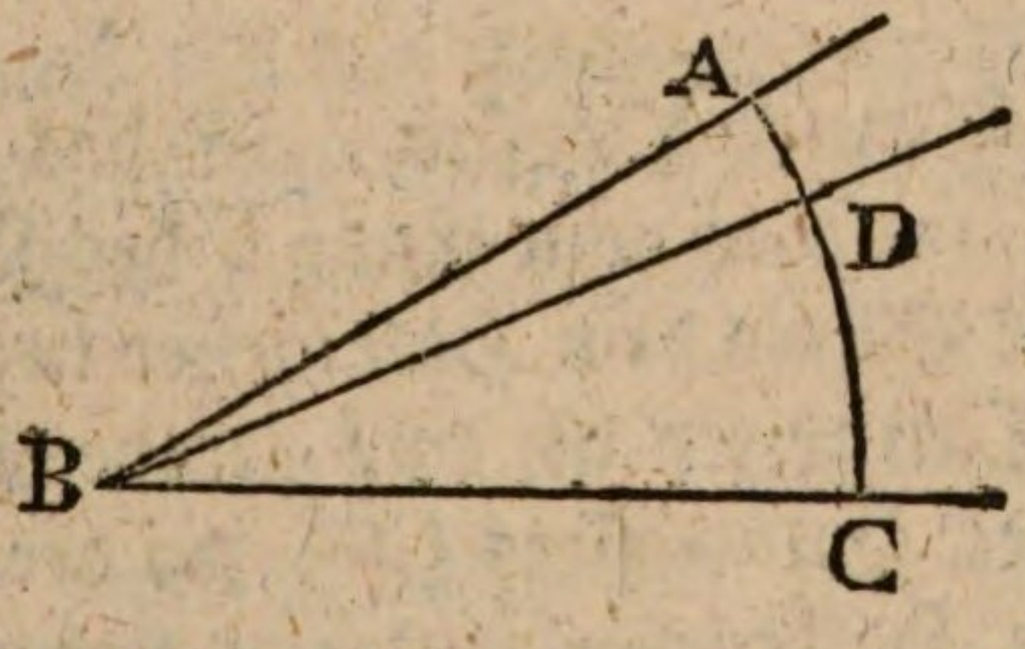
Von den Linien, wodurch die Größe der Winkel bestimmt wird.

§. 1.

In allen vorigen Hauptstücken ist schon manches von den geradlinichten Winkeln und deren Eigenschaften erwähnt worden. Wir wollen jetzt lehren, wie die Größe der Winkel genauer, vermittelst der Zirkelbogen und verschiedener geraden Linien, bestimmt werden kann.

§. 2.

Man vergleichet am bequemsten die verschiedene Größe der Winkel, wenn man aus ihren Scheiteln mit gleichen Halbmessern Bogen beschreibt, die sich an den Schenkeln endigen. Da dann allemal größere Winkel auch größere Bogen, und größere Bogen größere Winkel geben.



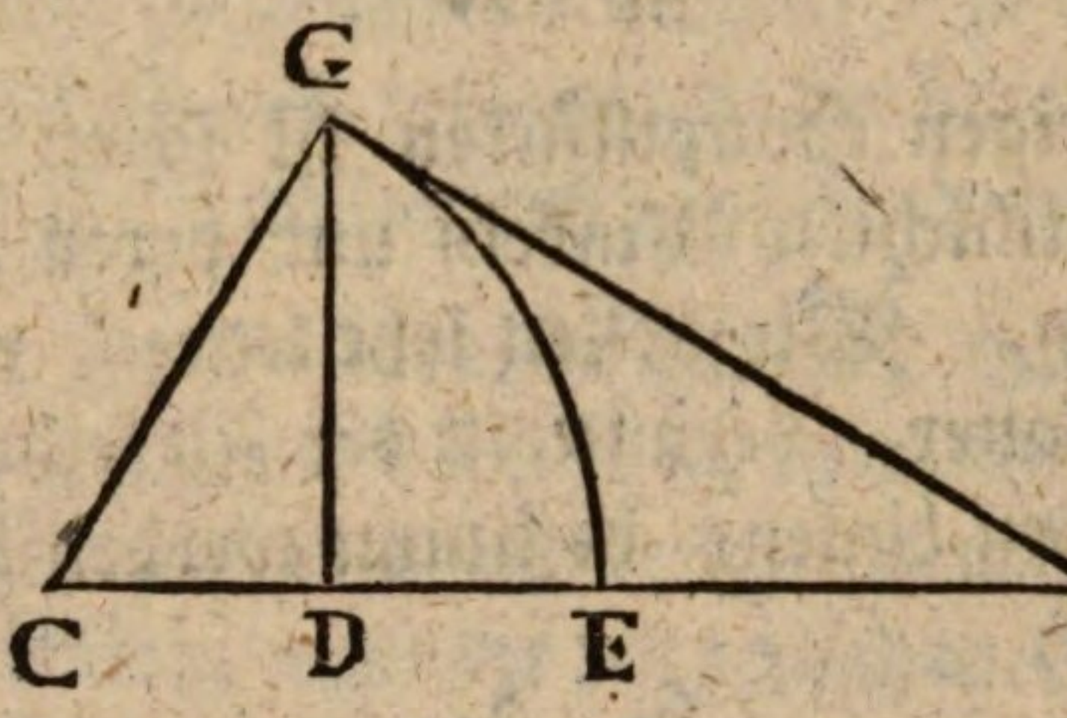
Z. E. wenn aus dem Scheitel B der Winkel *ABC* und DBC die Bogen AC und DC beschrieben werden, so faßt der größere Winkel ABC den größeren Bogen AC, und der kleinere Winkel DBC faßt den kleineren Bogen DC.

Ist nun der Halbmesser BC oder BD oder BA, nebst den Bogen DC und AC bestimmt, so ist auch die Größe der Winkel bestimmt.

Man erinnere sich überhaupt bey dieser Gelegenheit, was im VI. Hauptstücke §. 33 bis 43. von den Zirkelbogen gesagt worden, in so fern sie die Winkel bestimmen.

§. 3.

Ist nun der Halbmesser als bekannt angenommen, so werden ferner die Bogen und die dazu gehörigen Winkel, vermittelst gewisser geraden Linien bestimmt.



Es sey CE oder CG der Halbmesser, GCE ein gewisser Winkel, und EG der dazu gehörige Bogen, so sind folgende Linien zu merken:

1) Der Sinus des Bogens EG oder des Winkels GCE, ist die Linie GD, die von einem Ende des Bogens auf den gegenüberstehenden Halbmesser oder Schenkel CE senkrecht fällt.

2) Der Sinus-Versus, ist das Stück DE des Halbmessers, welches vom Ende E des Bogens bis in D gehet, wo der Sinus dem Halbmesser begegnet.

3) Die Tangente ist eine gerade Linie GF, welche am Ende G des Halbmessers CG, wo der Bogen anfängt, auf demselben Halbmesser senkrecht stehet, und bis zum Punkte F gehet, wo sie die Verlängerung EF des andern Halbmessers CE trift.

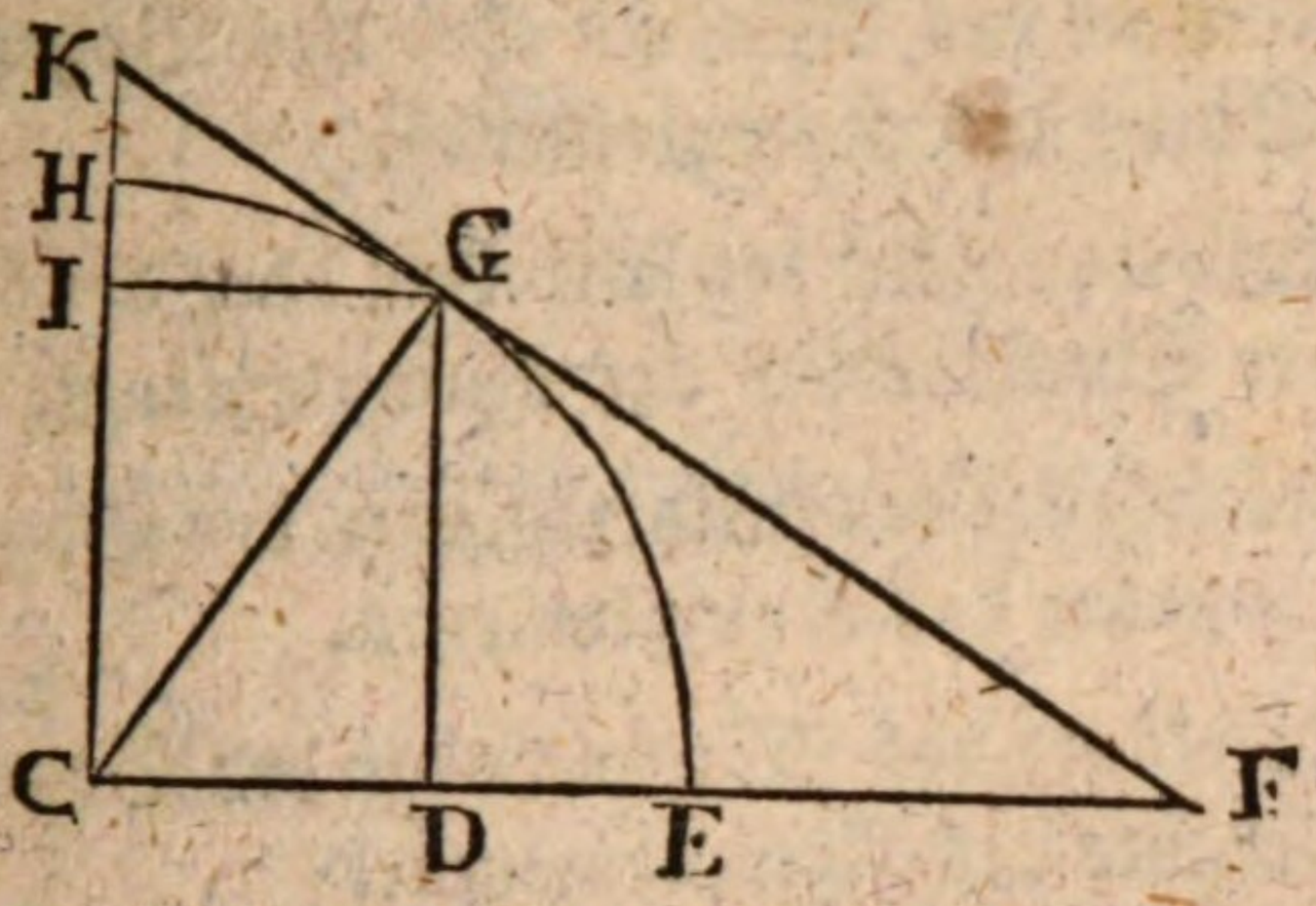
4) Die Sekante ist die gerade Linie CF, welche vom Mittelpunkte C bis zum äußersten Ende F der Tangente gehet.

5) Den Halbmesser CG oder CE pfleget man in der Lehre von den Winkeln, auch den Sinus-Totus, zu nennen.

§. 4.

§. 4.

Man ziehe auf CE die senkrechte CH, und beschreibe mit vorigem Halbmesser CG nach dem Bogen GH, so heißt



der Winkel HCG, welcher mit dem vorigen GCE einen Rechten machet, das Komplement des Winkels GCE, und der Bogen HG ist das Komplement des Bogens EG. Dieses Komplement hat nun wiederum seinen Sinus GI, seinen Sinusversus IH, seine Tangente GK, und seine Sekante CK. Die Namen dieser Linien bekommen aber noch die Anfangssylbe Ko, wenn man gedachte Linien als Mittel betrachtet, wodurch der erste Winkel GCE bestimmt wird.

Es ist demnach GI der Kosinus des Winkels GCE, IH der Kosinusversus desselben, GK die Kotangente desselben, CK die Kosekante desselben.

§. 5.

Die Linien, deren Namen wir jetzt erkläret haben, heißen Zirkelgrößen oder trigonometrische Linien. Das Natürlichste wäre wohl, wenn man sie Winkellinien nennte. Wir wollen in der Folge die Namen derselben mit einzelnen Buchstaben anzeigen.

R oder *r* sey der Radius, Halbmesser oder Sinustotus.

S *x*, der Sinus des Winkels *x* oder des Bogens *x*.

Vx, der Sinusverſus des Winkels x oder des Bogens x.

Tx, die Tangente des Winkels oder des Bogens x.

ßx, die Sekante des Winkels oder des Bogens x.

S'x, der Koſinus des Winkels oder des Bogens x, das iſt, der Sinus des Komplements.

V'x, der Koſinusverſus des Winkels oder des Bogens x, das iſt, der Sinusverſus des Komplements.

T'x, die Kotangente des Winkels oder des Bogens x, das iſt, die Tangente des Komplements.

ß'x, Die Koſekante des Winkels oder des Bogens x, das iſt, die Sekante des Komplements.

§. 6.

Wenn vor gemeldeten Zeichen ein A ſtehet, ſo ſoll dieſes den Bogen oder den Winkel bedeuten, welcher durch den folgenden Sinus, Koſinus u. ſ. f. beſtimmt wird. Alſo iſt

ASx, der Bogen oder der Winkel, welcher die Linie x zum Sinus hat.

AVx, der Bogen oder der Winkel, welcher die Linie x zum Sinusverſus hat.

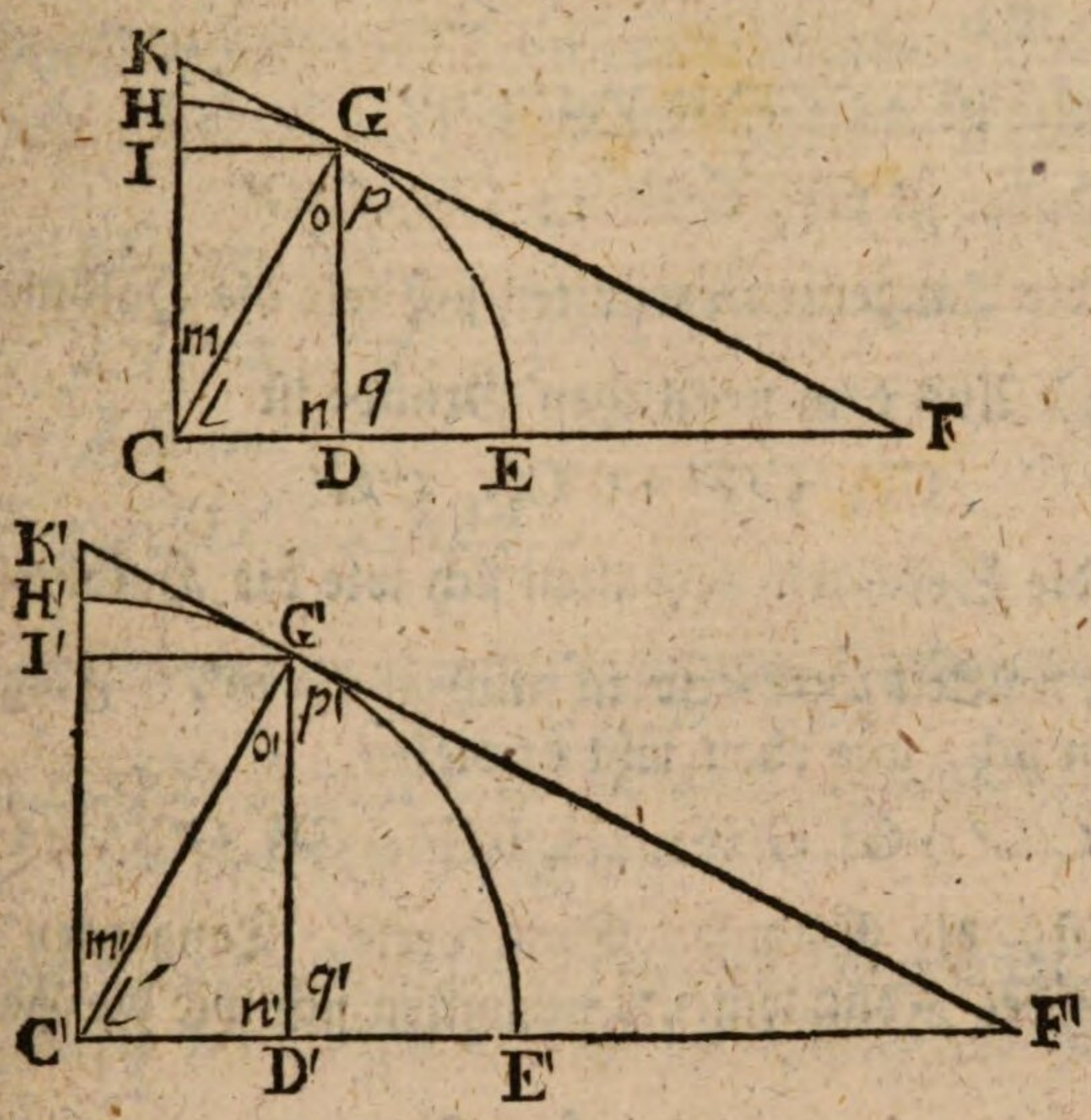
ATx, Aßx, AS'x, AV'x, AT'x, Aß'x, der Bogen, der x zur Tangente, oder zur Sekante, oder zum Koſinus, oder zum Koſinusverſus, oder zur Kotangente, oder zur Koſekante hat.

Der Buchſtabe A ſtellet eigentlich das lateiniſche Wort Arkus oder Angulus vor, das heißt, ein Bogen oder ein Winkel.

§. 7.

Wenn die Winkel gleich und folglich die Bogen ähnlich ſind, ſo verhalten ſich die Sinuſſe und alle übrige gleich-

gleichnamige Linien, die den Bogen und den Winkel bestimmen, wie die Halbmesser.



1) Es sey $\angle l = \angle l'$, so ist in den Dreyecken CDG und C′D′G′, $\angle l = \angle l'$, $\angle n = \angle n'$ (I. §. 37.) folglich auch $\angle o = \angle o'$.

Daher ist DG, D′G′ :: CG, C′G′.

das ist, die Sinusse DG und D′G′ verhalten sich wie die Halbmesser CG und C′G′.

2) Daraus folget auch

CD, C′D′ :: CG, C′G′
oder CD, C′D′ :: CE, C′E′
oder CD, CE :: C′D′, C′E′
und (CE — CD), CE :: (C′E′ — C′D′), C′E′
oder DE, CE :: D′E′, C′E
oder DE, D′E′ :: CE, C′E′ :: CG, C′G′

das heißt, die Sinusverſen verhalten sich wie die Halbmesser.

3) In den Dreyecken CGF und C′G′F′ ist $\angle l = \angle l'$ und $\angle (o + p) = \angle (o' + p')$ weil beyde rechte sind. (I. §. 37).

Also ist $\triangle$CGF $\backsim$ $\triangle$C′G′F′

Daher ist GF, G′F′ :: CG, C′G′

oder die Tangenten verhalten sich wie die Halbmesser.

4) Aus dem nemlichen Grunde ist

CF, C′F′ :: CG, C′G′

oder die Sekanten verhalten sich wie die Halbmesser.

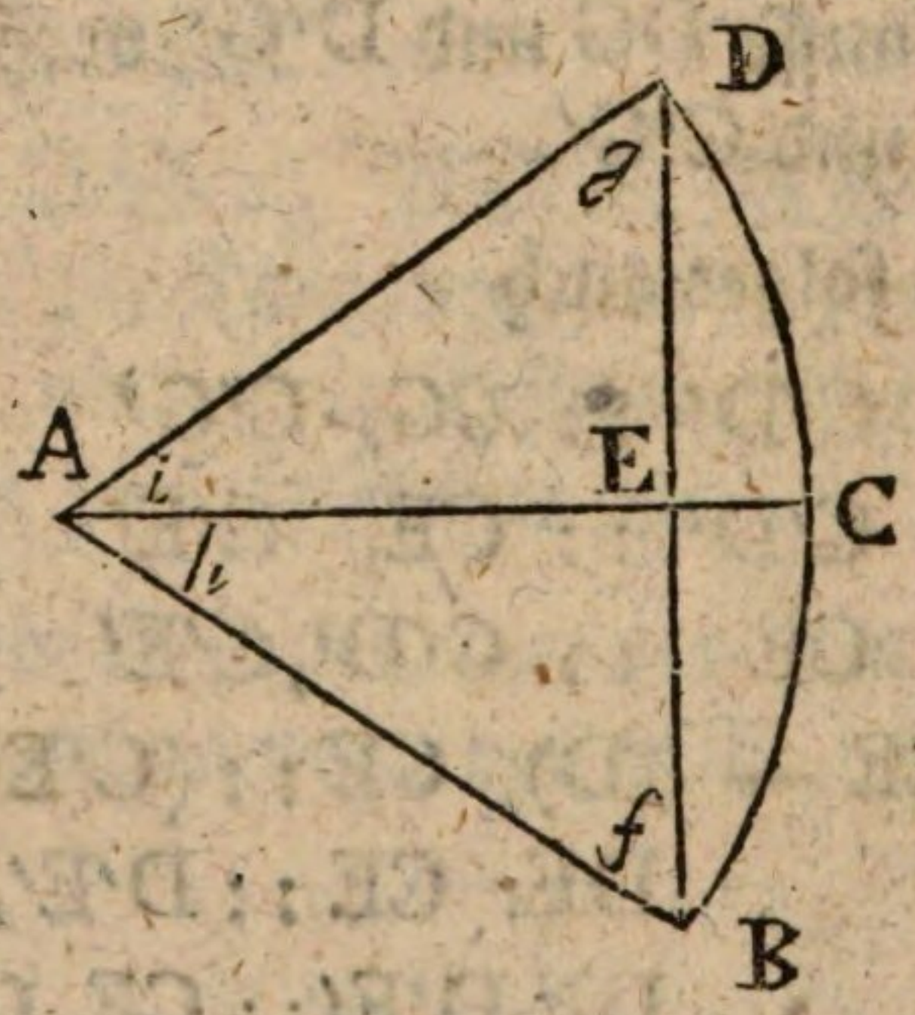
5) Weil $l = l'$ so ist auch $m = m'$. Folglich verhalten sich, wie eben jetzt bewiesen,

CG, C′G′ :: GI, G′I′ :: IH, I′H′ :: GK, G′K′ :: CK, C′K′

das ist, die Sinusse, Sinusverse, Tangenten und Sekanten des Komplements verhalten sich wie die Halbmesser.

§. 8.

Die halbe Sehne eines Bogens ist der Sinus des halben Bogens, und der doppelte Sinus eines Bogens ist die Sehne des doppelten Bogens.



I. Es sey DC die Hälfte des Bogens DCB, A der Mittelpunkt, AD, AC, AB der Halbmesser, DB die Sehne des Bogens DCB.

Im

Im Dreyecke DAB ist BA = AD, folglich $\angle f = \angle g$.

In den Dreyecken AEB und AED ist also $\angle f = \angle g$. Es ist auch $\angle h = \angle i$, weil BC = CD (VI. §. 37).

Da nun AD = AB

$\angle f = \angle g$

$\angle h = \angle i$

so ist $\triangle AED \cong \triangle AEB$.

Also ist DE = BE, oder beyde sind die Hälften der BD.

Weil $\triangle AED \cong \triangle AEB$ so sind auch beyde Winkel bey E gleich. Also ist DE senkrecht auf AC.

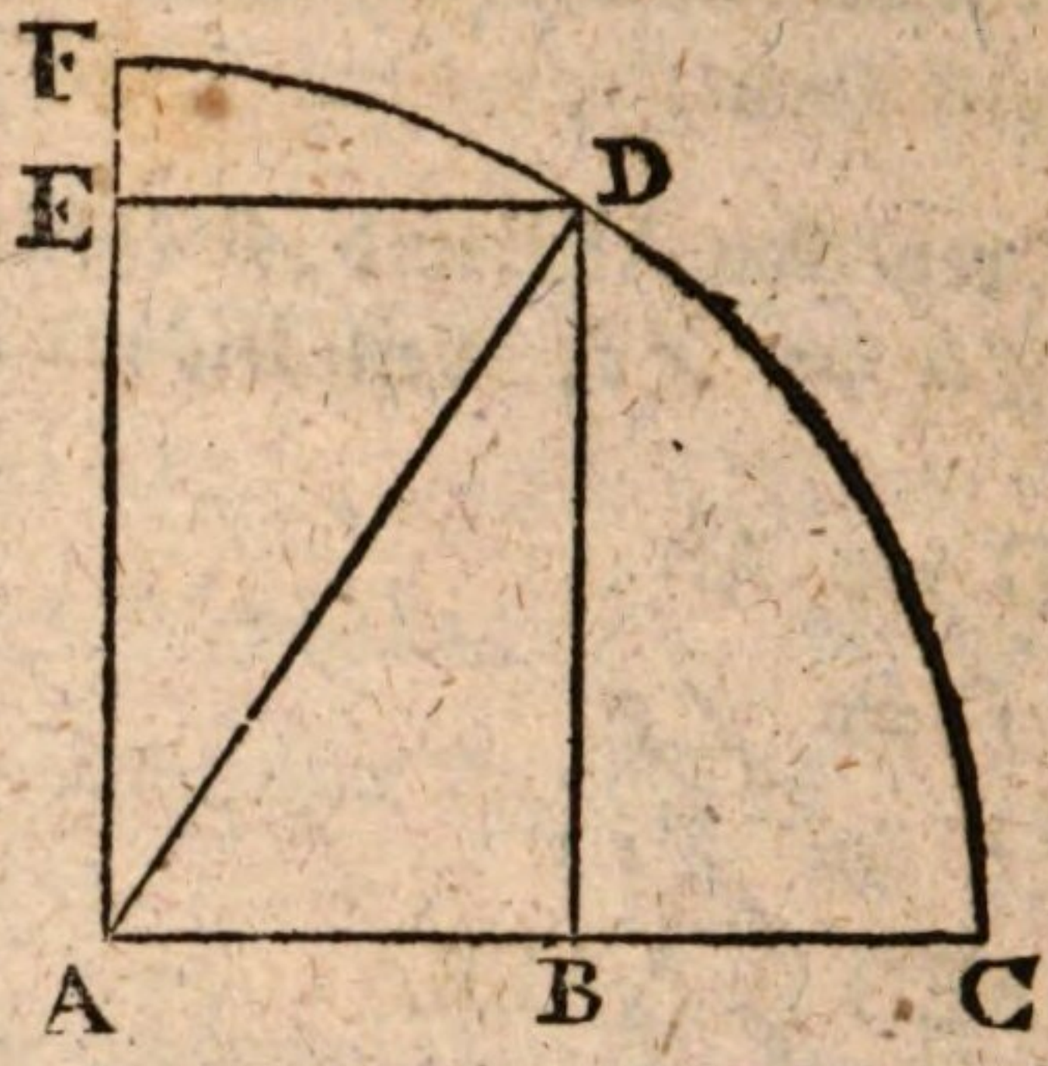
Folglich ist DE der Sinus des halben Bogens DC, das ist, die Hälfte der Sehne DB ist der Sinus des halben Bogens.

II. Nimmt man den Sinus DE des Bogens DC als bekannt an, so ist der doppelte Sinus DB die Sehne des doppelten Bogens DCB.

§. 9.

Die Summe des Kosinus und des Sinusversus, oder des Sinus und des Kosinusversus ist dem Halbmesser gleich.

(Siehe die folgende Figur.)



1) Es sey DB der Sinus und DE der Kosinus des Bogens CD.

DB und EA sind parallel, weil sie beyde auf AB senkrecht stehen.

DE und AB sind parallel, weil beyde auf AE senkrecht stehen.

Also ist $AB = ED$. (II. §. 39.)

Es ist aber

$$AB + BC = AC$$

also auch $ED + BC = AC$.

2) Weil ED mit AB und DB mit EA parallel sind, wie eben jetzt bewiesen worden, so ist

$$EA = DB$$

Es ist aber

$$EA + EF = AF$$

also auch $DB + EF = AF$

§. 10.

Der Kosinus ist die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Summe und der Differenz des Halbmessers und des Sinus. Der Sinus ist auch die mittlere Proporzional-Linie

linie zwischen der Summe und der Differenz des Halbmessers und des Kosinus.

(Siehe die vorhergehende Figur.)

Das Dreyeck *A*BD hat einen rechten Winkel in B, also ist (III. §. 36.)

(AD — DB), AB :: AB, (AD + DB)

desgleichen

(AD — AB), BD :: BD, (AD + AB)

oder weil AB = ED, so ist

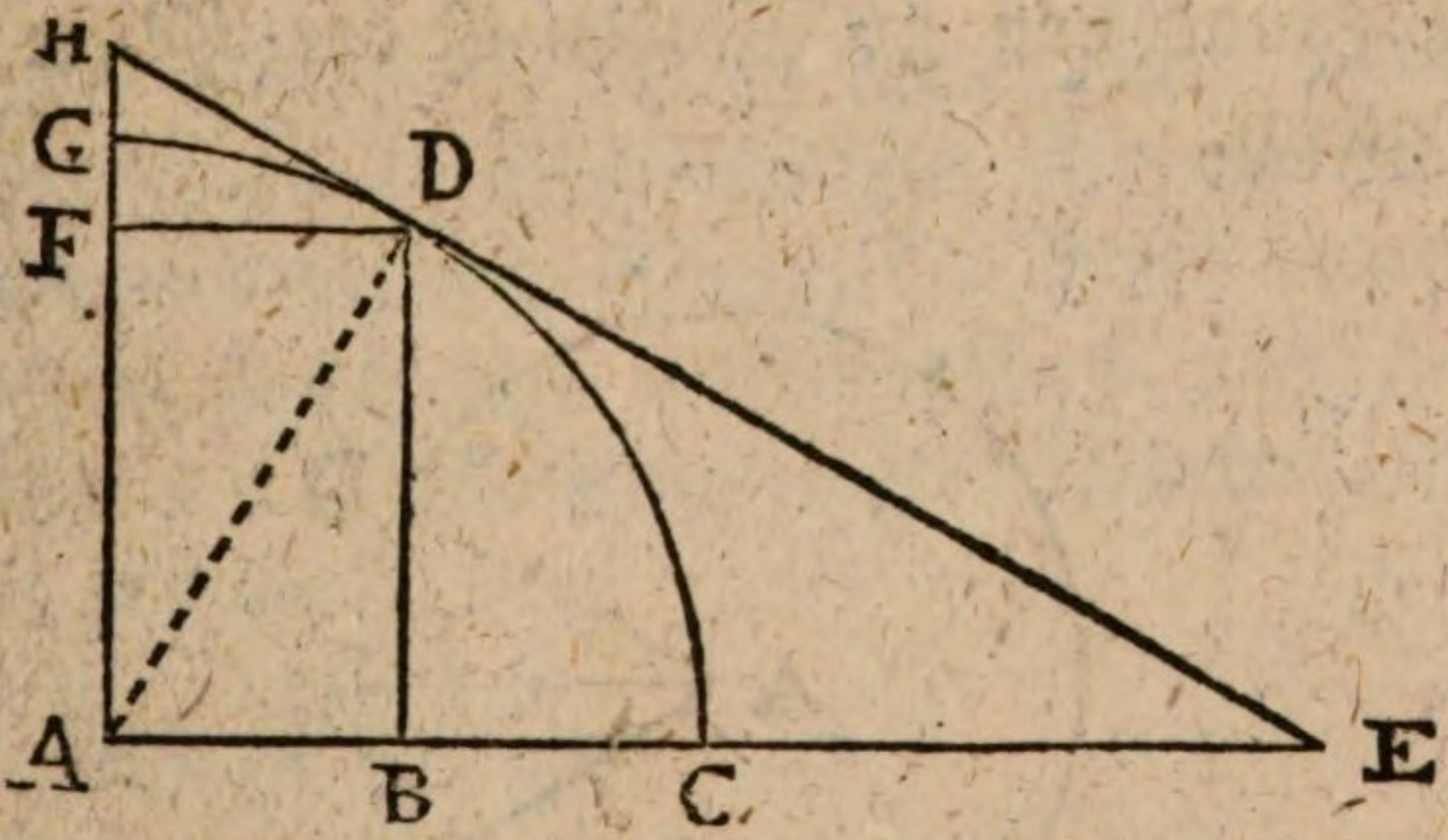
(AD — DB), ED :: ED, (AD + DB)

(AD — DE), BD :: BD, (AD + DE)

Zusatz. Das Quadrat des Halbmessers ist gleich der Summe der Quadrate des Sinus und des Kosinus. Dieses folget aus vorigen Proporzionen, oder auch aus dem IVten Hauptst. §. 27.

§. 11.

Der Kosinus verhält sich zum Sinus wie der Halbmesser zur Tangente, und der Sinus verhält sich zum Kosinus wie der Halbmesser zur Kotangente.



Das Dreyeck ADE hat einen rechten Winkel in D, und DB ist senkrecht auf AE. Also ist (III. §. 34).

△ABD ∽ △ADE

daher ist AB, BD :: AD, DE

oder FD, BD :: AD, DE.

Aus

Aus dem nemlichen Grunde ist

$$\triangle AFD \sim \triangle ADH$$

und AF, FD :: AD, DH

oder BD, FD :: AD, DH.

§. 12.

Der Halbmesser ist die mittlere Proporzional-Linie zwischen dem Kosinus und der Sekante, oder zwischen dem Sinus und der Kosekante.

(Siehe die vorhergehende Figur.)

I. Das Dreyeck ADE hat einen rechten Winkel in D, und es ist DB senkrecht auf AE. Also ist (III. §. 35.)

AB, AD :: AD, AE

oder FD, AD :: AD, AE

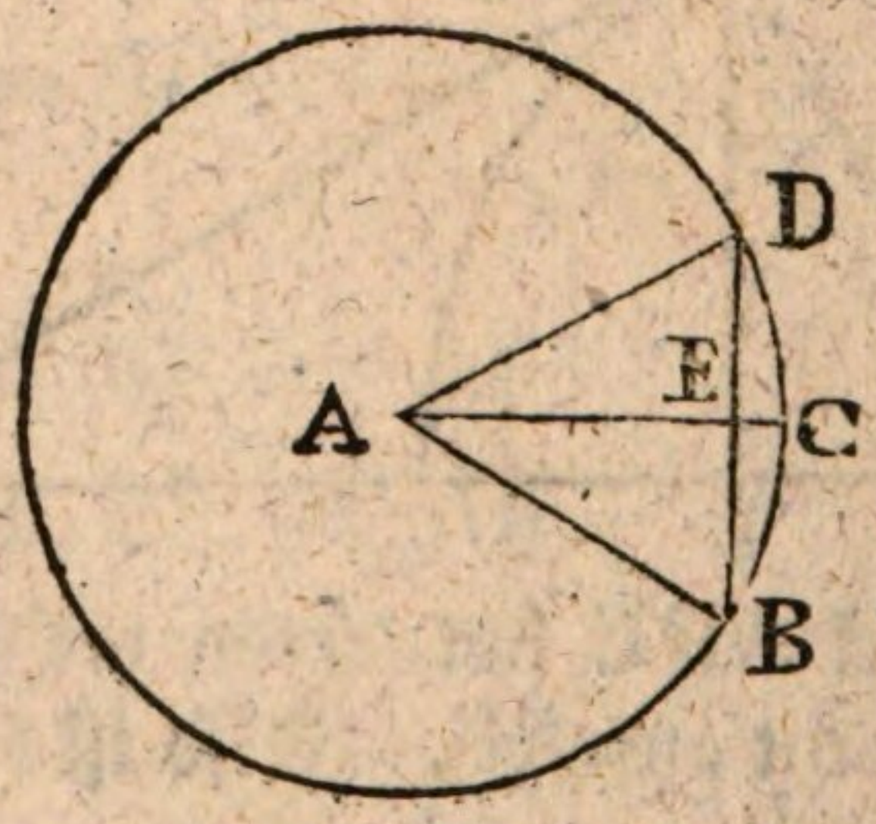
II. Im Dreyecke ADH, welches in D einen rechten Winkel hat, ist ebenfalls

AF, AD :: AD, AH

oder BD, AD :: AD, AH.

§. 13.

Der Sinus von 30 Graden ist der Hälfte des Halbmessers gleich.



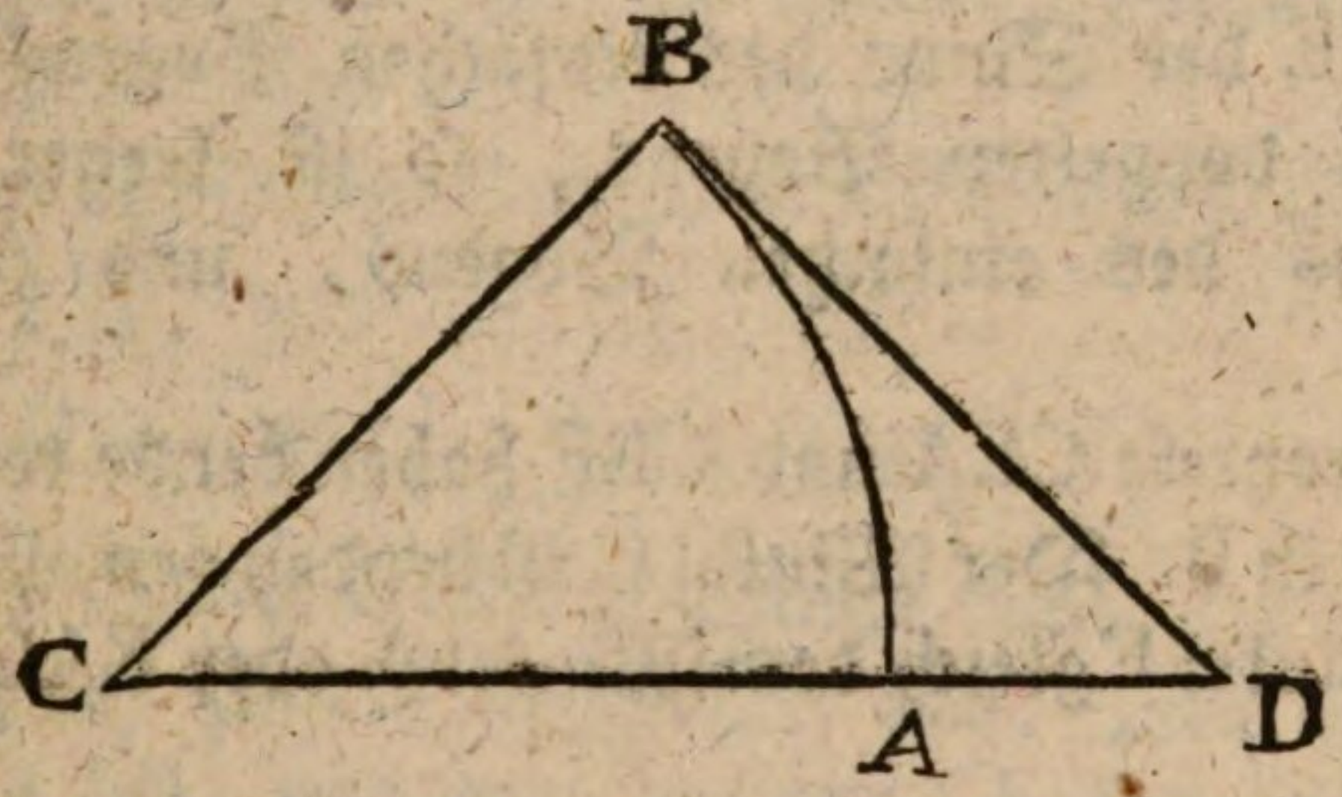
Es sey DC ein Bogen von 30 Grad. Nimm CB=DC, so ist DCB ein Bogen von 60 Grad, und DAB ein

ein Winkel von 60 Grad. Ziehe die Sehne DB, so ist DE die Hälfte derselben, und der Sinus von 30 Grad (§. 8).

Weil der Bogen DCB von 60 Grad ist, so ist er der sechste Theil des Umkreises, folglich ist DB die Seite des regulären eingeschriebenen Sechsecks. Folglich ist DB dem Halbmesser gleich (V. §. 22) und DE der Hälfte des Halbmessers.

§. 14.

Die Tangente von 45 Grad ist dem Halbmesser gleich.



Es sey der Bogen AB von 45 Gr., so ist ∠C = 45 Gr. das ist, die Hälfte eines rechten Winkels. Der Winkel B ist ein rechter. Da nun die drey Winkel C, B und D zusammen zweyen rechten gleich seyn müssen (III. §. 32), so bleibet für ∠D noch die Hälfte eines rechten Winkels, das heißt ∠D = 45 Grad.

Also ist ∠C = ∠D

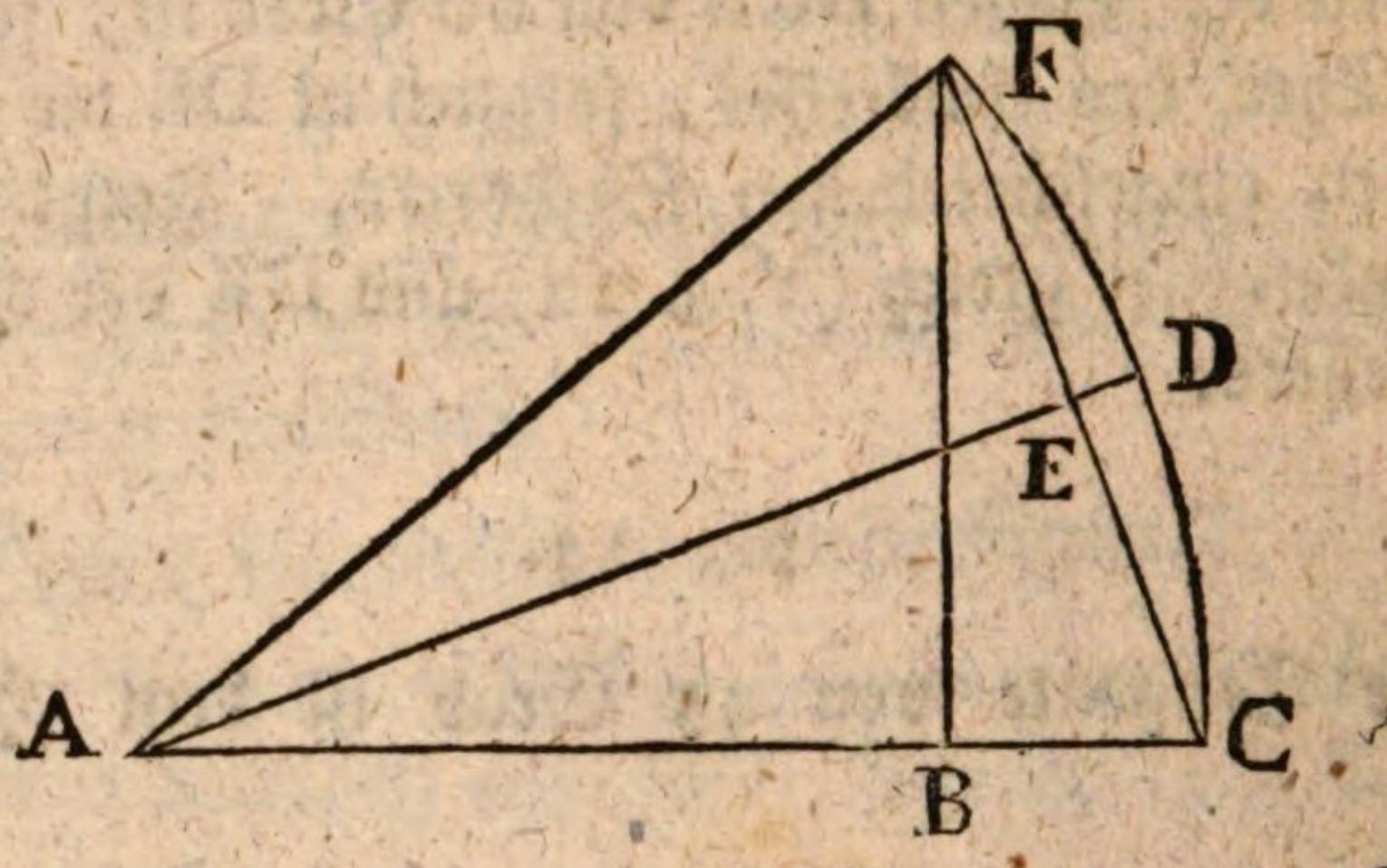
folglich ist auch BD = BC (II. §. 25).

das ist, die Tangente von 45 Grad ist dem Halbmesser gleich.

§. 15.

§. 15.

Der Halbmesser verhält sich zum Kosinus eines Bogens, wie der doppelte Sinus zum Sinus des doppelten Bogens.



Es sey CD der Bogen, CDF der doppelte Bogen, CE oder FE der Sinus des einfachen Bogens, FB der Sinus des doppelten Bogens; so ist ferner ED der Sinusversus des einfachen Bogens, und AE dessen Kosinus.

Die Dreyecke CEA und CBF haben beyde rechte Winkel in E und in B. Der Winkel C ist beyden gemein. Also ist auch der Winkel F gleich dem Winkel A oder EAC.

Also ist

$$AC, AE :: FC, FB$$

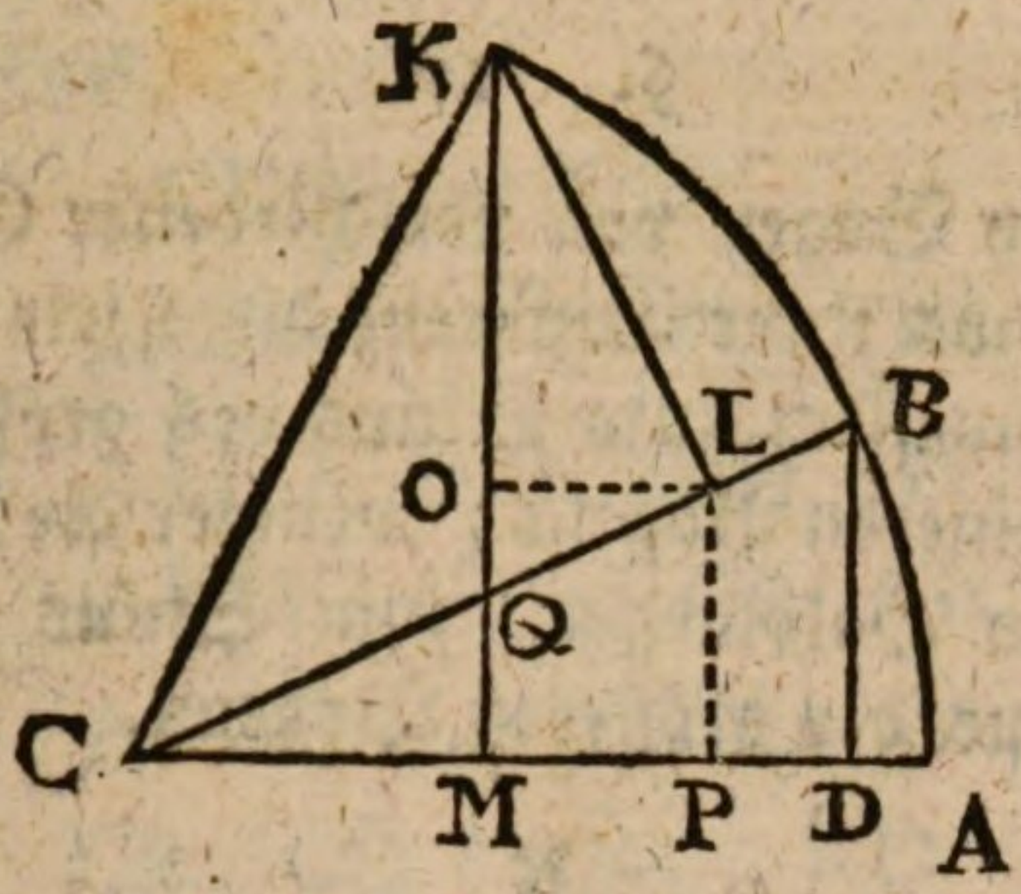
oder weil $FC = 2CE$

$$AC, AE :: 2CE, FB$$

§. 16.

Der Sinus der Summe zweyer Bogen bestehet aus zwei Stücken. Das erste ist die vierte Proporzional-Linie zum Halbmesser, zum Sinus des ersten Bogens und zum Kosinus des anderen Bogens. Das zweite Stück ist die vierte Proporzional-Linie zum Halbmesser, zum Kosinus des ersten Bogens und zum Sinus des zweyten Bogens.

Es



Es sey der erste Bogen AB, der zweyte BK, so ist deren Summe ABK. Der Sinus dieser Summe ist KM. Der Sinus des ersten Bogens ist BD und dessen Kosinus ist CD. Der Sinus des anderen Bogens ist KL und dessen Kosinus ist CL.

Ziehe LP parallel mit BD und LO parallel mit MP, so ist LO = MP und OM = LP.

In den ähnlichen Dreyecken CPL und CDB ist

CB, BD :: CL, LP

oder CB, BD :: CL, OM.

Also ist das Stück OM des Sinus KM, die vierte Proporzional-Linie zum Durchmesser CB, zum Sinus BD des Bogens AB, und zum Kosinus CL des Bogens BK.

Das Dreyeck CDB ist ähnlich mit dem Dreyecke KOL.

Denn es ist $\triangle CBD \sim \triangle CQM$ (III. §. 27)

$\triangle CQM \sim \triangle LQO$ (IV. §. 9)

$\triangle LQO \sim \triangle LKO$ (III. §. 34)

daher ist $\triangle CDB \sim \triangle KLO$ (V. §. 12)

Folglich ist

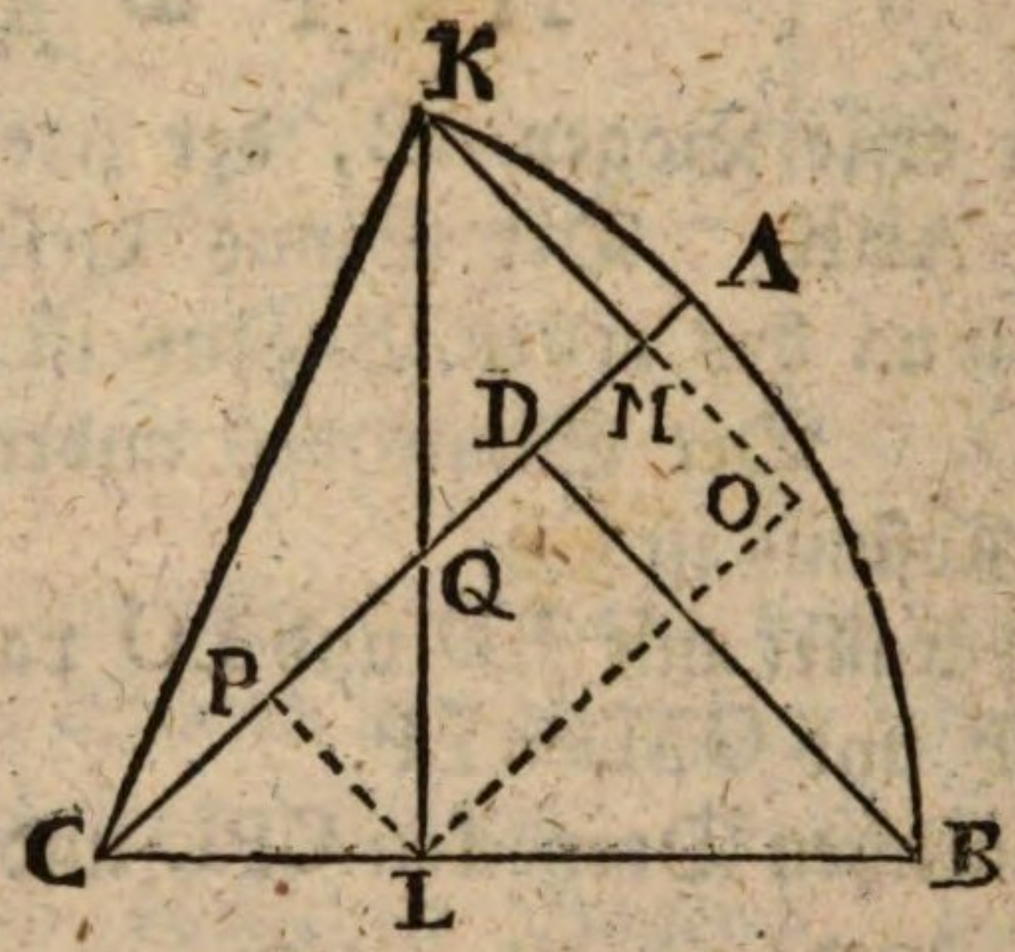
CB, CD :: KL, KO

das heißt, der Durchmesser CB verhält sich zum Kosinus CD des Bogens AB, wie der Sinus KL des andern Bogens KB zum Stücke KO des Sinus KM.

§. 17.

§. 17.

Wenn zwey Bogen von verschiedener Größe sind, so enthält der Sinus ihrer Differenz die vierte Proporzional-Linie zum Halbmesser, zum Sinus des größeren und zum Kosinus des kleineren Bogens; weniger die vierte Proporzional-Linie zum Halbmesser, zum Sinus des kleineren, und zum Kosinus des größeren Bogens.



Es sey BK der größere, und AB der kleinere Bogen, so ist KA die Differenz, KL ist der Sinus und CL der Kosinus des größeren Bogens, BD ist der Sinus und CD der Kosinus des kleineren Bogens, KM ist der Sinus der Differenz AK.

Ziehe LP parallel mit BD, verlängere KM in MO, ziehe LO parallel mit PM, so ist MO = LP.

Nun ist $\triangle CBD \sim \triangle CLP$

daher ist CB, BD :: CL, LP

oder weil LP = OM, so ist

CB, BD :: CL, OM.

Es ist ferner

$$\triangle CDB \sim \triangle CPL$$
$$\triangle CPL \sim \triangle LPQ \quad \text{(III. §. 34.)}$$
$$\triangle LPQ \sim \triangle KMQ \quad \text{(IV. §. 9.)}$$
$$\triangle KMQ \sim \triangle KOL \quad \text{(III. §. 27.)}$$

folgl. $\triangle CDB \sim \triangle KOL$

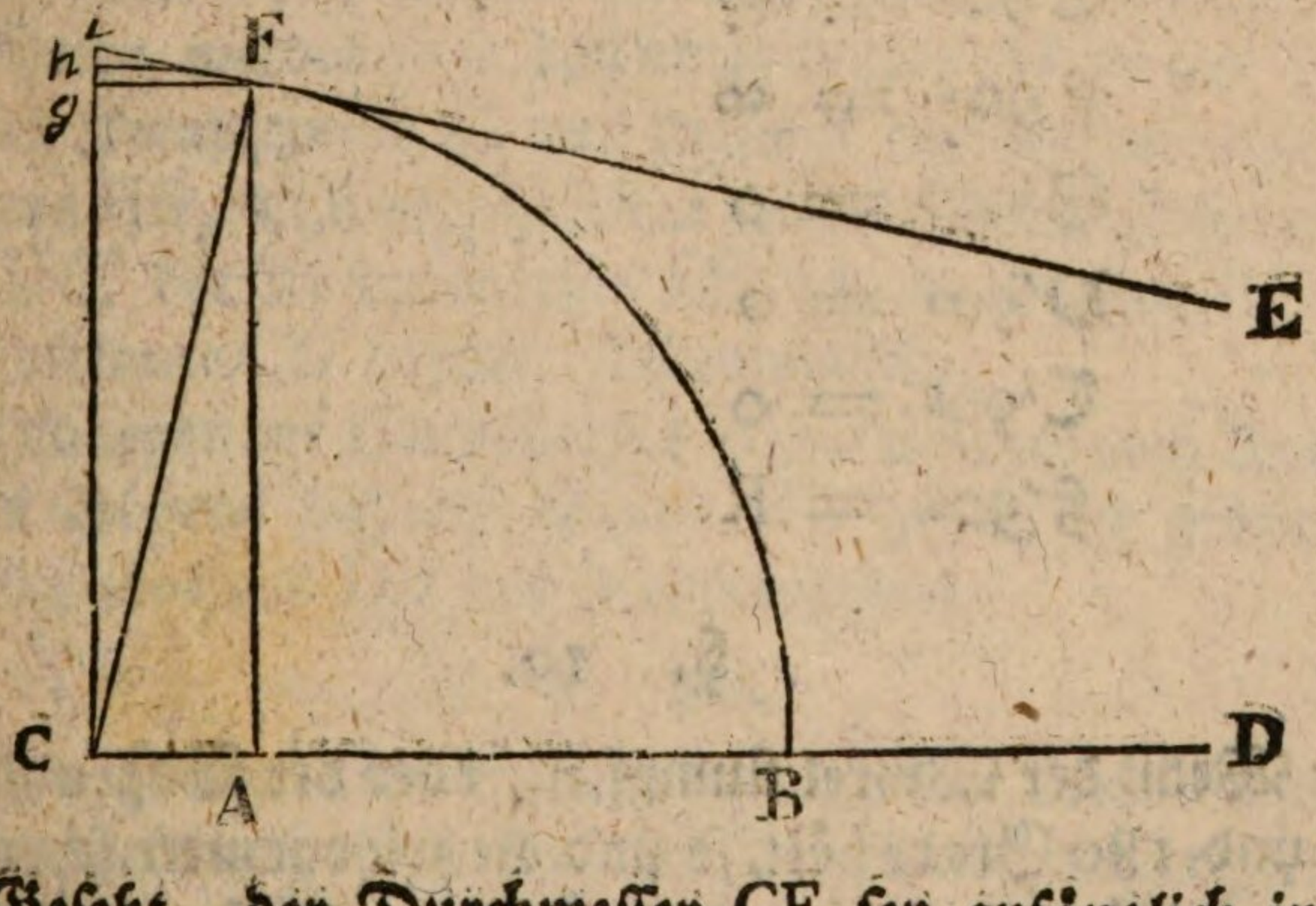
und $CB, CD :: KL, KO$

das ist, der Halbmesser CB verhält sich zum Kosinus CD des kleineren Winkels AB, wie der Sinus KL des größeren Winkels sich verhält zu KO.

Von dieser Linie KO, muß nun OM abgezogen werden, so bleibet KM, der Sinus der Differenz AK.

§. 18.

Bey einem rechten Winkel sind der Sinus, der Sinusversus, und die Kosekante, jede dem Halbmesser gleich; der Kosinus, der Kosinusversus und die Kotangente sind null oder nichts; die Tangente und die Sekante sind unendlich.



Gesetzt, der Durchmesser CF sey anfänglich in der Lage CB, und er bewege sich um den Mittelpunkt C, bis

er in die Lage C*h* komme, so daß er einen Viertelzirkel und einen rechten Winkel beschrieben habe. Gesetzt, er sey der Lage C*h* schon sehr nahe in CF, so nähern sich der Sinus AF, der Sinusversus BA und die Kosekante C*i*, je mehr und mehr der Größe des Durchmessers *h*C oder CB.

Der Kosinus F*g* oder AC, der Kosinusversus *gh*, und die Kotangente F*i* werden immer kleiner und kleiner, oder sie nähern sich dem Nichts.

Die Tangente FE und die Sekante CD verlängern sich je mehr und mehr, und nähern sich der parallelen Lage, wo sie einander nicht mehr schneiden können, sondern ohne Ende fortlaufen. Sie nähern sich also der Unendlichkeit.

Nimmt man nun an, daß CF ganz in die Lage C*h* komme, so werden alle vorige Näherungen zur Wirklichkeit, und es findet alles Statt, was im Lehrsatze gesagt worden.

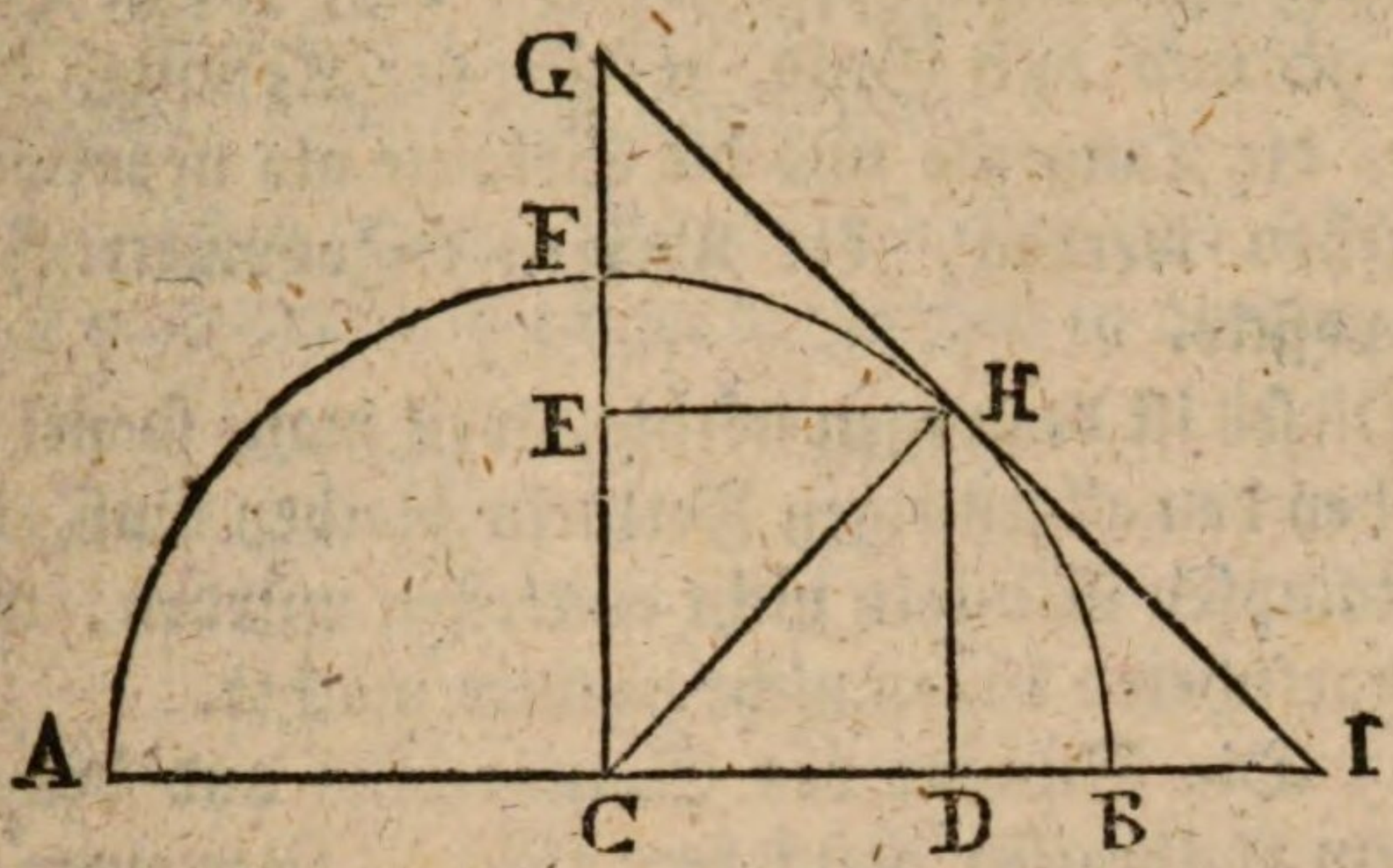
Zusatz. Es ist demnach, wenn R den Halbmesser und ∞ das Unendliche anzeiget.

$$\mathfrak{S}\,90^g = R$$
$$\mathfrak{V}\,90^g = R$$
$$\mathfrak{T}\,90^g = \infty$$
$$\mathfrak{ß}\,90^g = \infty$$
$$\mathfrak{S}'90^g = 0$$
$$\mathfrak{V}'90^g = 0$$
$$\mathfrak{T}'90^g = 0$$
$$\mathfrak{ß}'90^g = R$$

§. 19.

Wenn der Winkel stumpf ist, oder der Bogen zwischen 90 und 180 Grade hält, so sind die trigonometrischen Linien die nemlichen, als bey dem spitzigen Nebenwinkel, oder bey dem Bogen, der mit dem gegebenen 180 Grad machet, aus:

ausgenommen, daß der Sinus-Versus des stumpfen Winkels größer ist als bey dem spitzigen.



Es sey ACH der stumpfe Winkel, so kann der Sinus HD nicht anders gezogen werden, als von Ende H des Bogens AH senkrecht auf dem verlängerten Halbmesser AC, und dieser Sinus gehöret zugleich zum spitzigen Nebenwinkel HCB oder zum Bogen HB, der mit dem gegebenen AH einen halben Zirkel machet. Dem zufolge werden die Tangente HI und die Sekante CI (welches aus dem Mittelpunkte C entspringen muß) auch beyden Nebenwinkeln zugehören.

Das Komplement des Bogens AH oder des Winkels ACH, kann nicht anders als rückwärts von H nach F zu genommen werden, so daß übrig bleibe AF = 90 Grad. Dieses Komplement ist nun zugleich das Komplement des Bogens HB, und also gehören wiederum der Kosinus HE oder DC, der Kosinusversus EF, die Kotangente HG und die Kosekante CG beyden Nebenwinkeln.

Hingegen der Sinusversus AD, welcher vom Anfange A des Bogens bis zum Sinus HD gehet, ist größer als der Sinusversus DB des Nebenwinkels.

§. 20.

Die Summe der Sinusversen zweyer Nebenwinkel ist dem doppelten Halbmesser oder dem Durchmesser gleich.

(Siehe die vorige Figur.)

Denn AD + DB = AB = 2 AC.

§. 21.

Bey einem stumpfen Winkel oder einem Bogen zwischen 90 und 180 Grad, müssen der Kosinus, die Kotangente, die Tangente und die Sekante als negative Größen angesehen werden, die übrigen trigonometrischen Linien sind positiv.

Dieses ist deswegen nöthig, weil man, so viel als möglich, bey den allgemeinen Formeln bleiben muß, diese aber bey stumpfen Winkeln nicht eintreffen würden, wenn man die angeführten Linien nicht negativ machte.

1) Die Summe des Sinusversus und des Kosinus, soll dem Halbmesser gleich seyn (§. 9.). Bey einen stumpfen Winkel ist aber der Sinusversus weniger den Kosinus dem Halbmesser gleich. Z. E. (letzte Fig.) AD—DC=AC. Soll demnach die allgemeine Formel gelten, so muß der Kosinus negativ seyn. Alsdann ist in der That

$$\mathfrak{v} + (-\mathfrak{S}') = R$$

oder eigentlich $\mathfrak{v} - \mathfrak{S}' = R$

2) Ist der Kosinus negativ, so ist auch die Kotangente negativ, denn es ist (§. 11.)

$$\mathfrak{S}, \mathfrak{S}' :: R, \mathfrak{T}'$$

oder, wenn der Kosinus negativ ist,

$$\mathfrak{S}, -\mathfrak{S}' :: R, \mathfrak{T}' \left(= -\frac{R.\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}\right)$$

3) Ebenfalls die Tangente, weil (§. 11.)

$$-\mathfrak{S}', \mathfrak{S} :: R, \mathfrak{T} \left(= -\frac{R.\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'}\right)$$

4) Auch die Sekante, weil (§. 12.)

$$-\mathfrak{S}', R :: R, \mathfrak{ß} \left(= -\frac{RR}{\mathfrak{S}'}\right)$$

Bey

Bey den übrigen Linien, die einen stumpfen Winkel bestimmen, ist keine Ursach vorhanden, warum sie negativ seyn sollten; sie bleiben also positiv, da jede Größe an sich selbst betrachtet, positiv oder wirklich ist.

Zusatz. Bey einem Bogen zwischen 90 und 180 Grad, hat man demnach folgende Zeichen zu beobachten.

+ S	— S′
+ V	+ V′
— T	— T′
— ß	+ ß′

§. 22.

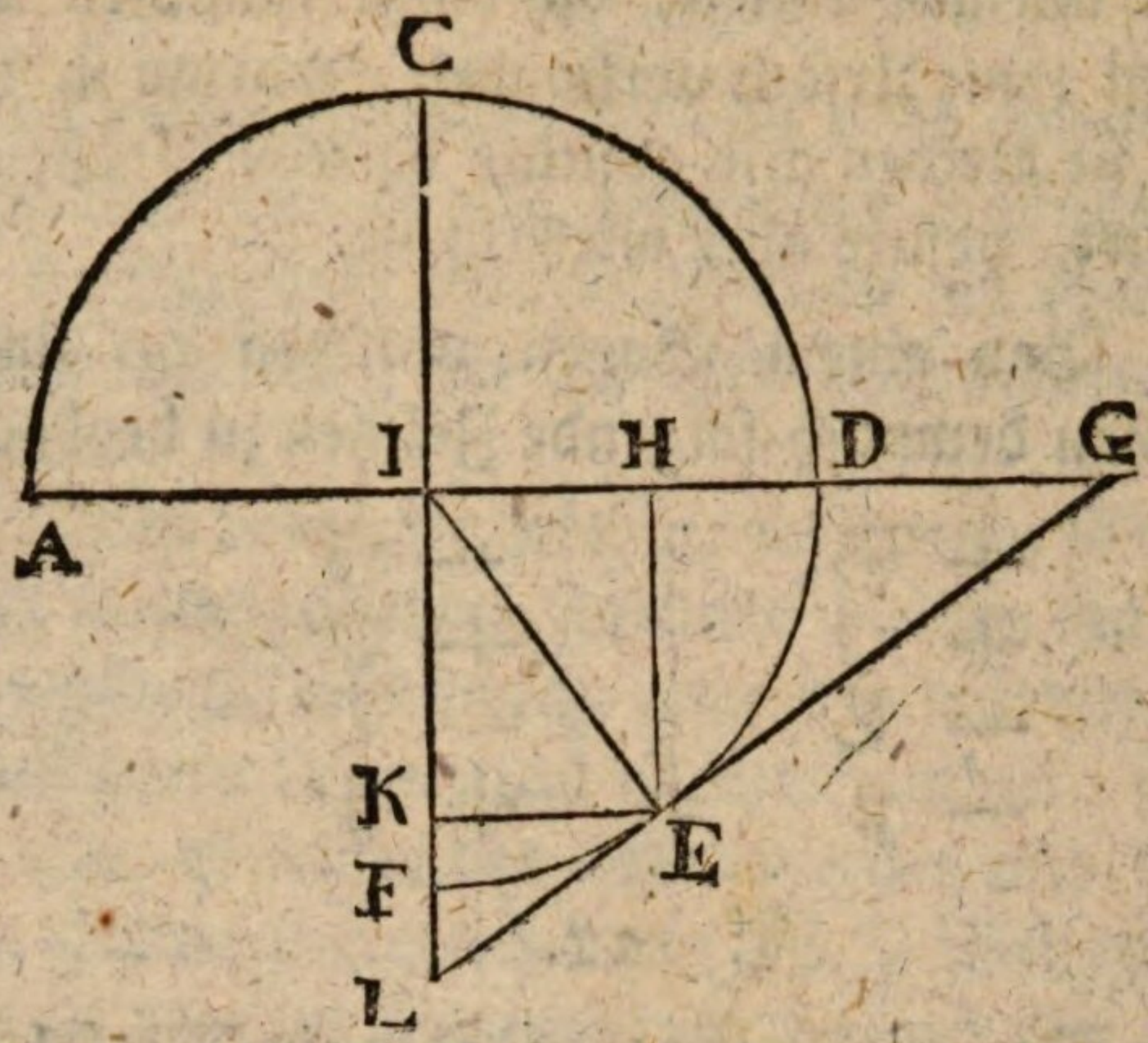
Wenn ein Bogen 180 Graden, oder ein Winkel zweyen Rechten gleich wird, so bekommen die bestimmenden Linien folgende Werthe

S = + 0	S′ = — R
V = + 2 R	V′ = + R
T = — 0	T′ = — ∞
ß = — R	ß′ = + ∞

Dieses kann man sich am besten erklären, wenn man einen Bogen nimmt, der die 180 Grad schon beynahe erreichet hat, wie wir bey dem Bogen von 90 Grad gethan haben (§. 18). Wir haben die nemlichen Zeichen + und — beybehalten, welche die Linien vorher hatten, da sie sich den angeführten Werthen näherten, sonst kann man auch meistens die eingebildeten Größen 0 und ∞ sowohl positiv als negativ annehmen.

§. 23.

Bey einem Bogen von 180 bis 270 Grad, sind die bestimmenden Linien die nemlichen, als bey dem selbigen Bogen, nachdem er um 180 Grad vermindert worden, außer daß der Sinusversus nnd der Kosinusversus größer sind.



Es sey ACDE ein Bogen zwischen 180 und 270 Graden. Ziehe den Durchmesser AID, so ist ACD ein halber Zirkel oder ein Bogen von 180 Grad, der vom Bogen ACDE abgeschnitten ist, und es bleibet der Bogen DE.

Der Sinus EH, die Tangente EG, die Sekante IG, der Kosinus EK oder HI, die Kotangente EL, die Kosekante IL bestimmen nun sowohl den Bogen ACDE, als auch den Bogen DE, der um 180 Grad kleiner ist.

Hingegen der Sinusversus AH und der Kosinusversus CK sind größer als DH und KF.

§. 24.

Der Sinusversus eines Bogens zwischen 180 und 270 Grad, samt dem Sinusversus des um 180 Grad verkleinerten Bogens, desgleichen der Kosinusversus des einen und des andern Bogens, machen eine Summe, die dem doppelten Halbmesser oder dem Durchmesser gleich ist.

Es ist nemlich $AH + HD = AD = 2R$.

eben so ist $CK + KF = CF = 2R$.

§. 25.

Wenn ein Bogen zwischen 180 und 270 Grad hält, so sind der Sinus, der Kosinus, die Sekante und die Kosekante negative Größen; die übrigen trigonometrischen Linien sind positiv.

1) Es

1) Es muß der Kosinusversus nebst dem Sinus den Halbmesser ausmachen, oder es muß seyn (§. 9.)

$$\mathfrak{V}' + \mathfrak{S} = R$$

das ist $$CK + HE = R$$

oder $$CK + IK = CI$$

welches unmöglich ist, sobald nicht IK oder der Sinus negativ ist. Die allgemeinen Formeln zu behalten, mache man also den Sinus negativ, dann ist

$$\mathfrak{V}' - \mathfrak{S} = R$$

oder $$CK - IK = R$$

welches seine Richtigkeit hat.

2) Es muß der Sinusversus, nebst dem Kosinus den Halbmesser ausmachen (§. 9.). Es muß also seyn

$$\mathfrak{V} + \mathfrak{S}' = R$$

$$AH + IH = R$$

welches nur alsdann möglich und wirklich wird, wann der Kosinus negativ ist, dann ist

$$\mathfrak{V} - \mathfrak{S}' = R$$

oder $$AH - IH = R$$

3) Die Sekante und Kosekante sind negativ, denn die Proporzionen geben (§. 12.)

$$-\mathfrak{S}', r :: r, \mathfrak{k}\ \left(= -\frac{rr}{\mathfrak{S}'}\right)$$

$$-\mathfrak{S}, r :: r, \mathfrak{k}'\ \left(= -\frac{rr}{\mathfrak{S}}\right)$$

4) Die Tangente und Kotangente bleiben positiv, wegen der Proporzionen (§. 11.)

$$-S', -S :: r, T\left(= \frac{-r.S}{-S'} = +\frac{r.S}{S'}\right)$$

$$-S, -S' :: r, T'\left(= \frac{-r.S'}{-S} = +\frac{r.S'}{S}\right)$$

Zusatz. Für einen Bogen zwischen 180 und 270 Grad bekömt man also folgende Zeichen:

$-S$	$-S'$
$+V$	$+V'$
$+T$	$+T'$
$-\beta$	$-\beta'$

§. 26.

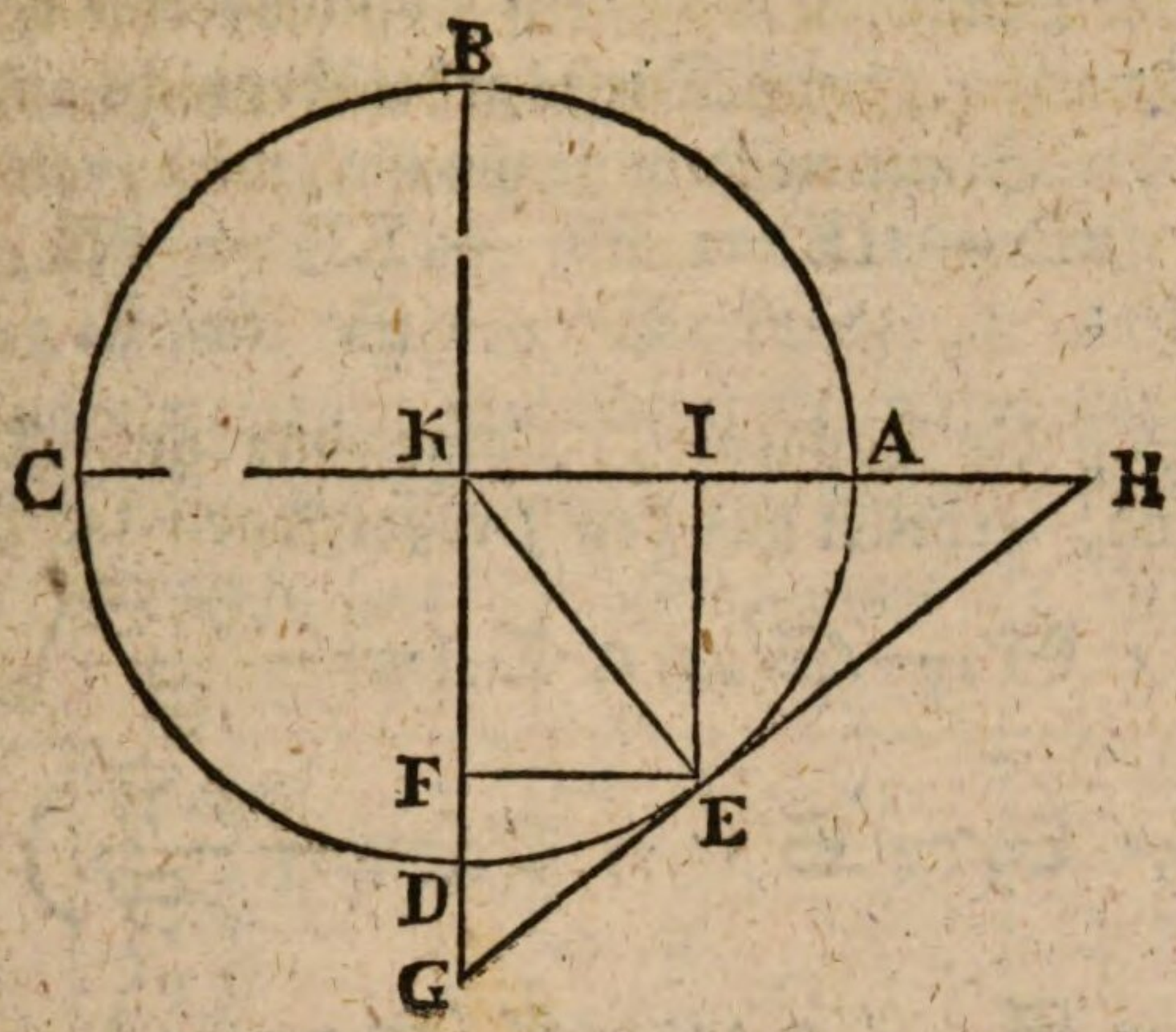
Wenn ein Bogen die Größe von 270 Grad erreichet hat, so bekommen die trigonometrischen Linien folgende Werthe:

$S = -R$	$S' = -0$
$V = +R$	$V' = +2R$
$T = +\infty$	$T' = +0$
$\beta = -\infty$	$\beta' = -0$

Die Zeichen sind geblieben, wie sie von 180 Grad an gewesen. Die Wahrheit aber der angeführten Werthe erfährt man, wie in §. 18., wenn man einen Bogen nimmt der den 270 Graden schon sehr nahe ist.

§. 27.

Wenn ein Bogen zwischen 270 und 360 Grade hält, so wird er durch die nemlichen trigonometrischen Linien bestimmet, als der kleinere Bogen, der mit ihm 360 Grad machet, ausgenommen, daß der Kosinusversus größer ist.



Es sey ABCDE ein Bogen zwischen 270 und 360 Grad, so hat er die nemlichen trigonometrischen Linien, als der Bogen EA, welcher den Umkreis oder die 360 Grade ausfüllet. Es gehöret nemlich zu beyden Bogen der Sinus EI, der Sinusversus AI, die Tangente EH, die Sekante KA, der Kosinus EF oder IK, die Kotangente EG, die Kosekante KG.

Hingegen der Kosinusversus FB gehöret nur zum größeren Bogen, aber nicht zum kleineren.

§. 28.

Der Kosinusversus eines Bogens zwischen 270 und 360 Grad, machet mit dem Kosinusversus des Bogens, der an den 360 Graden mangelt, die Größe des doppelten Halbmessers oder des Durchmessers.

Denn es ist $BF + FD = BD = 2R$.

§. 29.

Bey einem Bogen zwischen 270 und 360 Graden sind der Sinus, die Tangente, die Kotangente, und Kosekante negative Größen, die übrigen trigonometrischen Linien sind positiv.

1) Der Sinus soll nebst dem Kosinusversus den Halbmesser ausmachen. (§. 9.) Dieses gehet aber nicht anders an, als wenn der Sinus negativ genommen wird, alsdann ist

$$BF - IE = BF - KF = BK$$

das ist

$$\mathfrak{V}' - \mathfrak{S} = R.$$

2) Daß die Tangente, Kotangente und Kosekante negativ sind, erhellet aus den Proporzionen (§. 11. 12.)

$$\mathfrak{S}', -\mathfrak{S} :: r, \mathfrak{T} \left(= -\frac{r.\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}'}\right)$$

$$-\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S}' :: r, \mathfrak{T}' \left(= -\frac{r.\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}\right)$$

$$-\mathfrak{S}, \quad r :: r, \mathfrak{ß}' \left(= -\frac{r\,r}{\mathfrak{S}}\right)$$

3) Die Sekante bleibet positiv, weil keine Ursach vorhanden ist, warum der Kosinus negativ seyn sollte. Es ist also

$$\mathfrak{S}', r :: r, \mathfrak{ß} \left(= +\frac{r\,r}{\mathfrak{S}'}\right)$$

Zusatz. Die Zeichen bey einem Bogen zwischen 270 und 360 Grad, sind demnach folgende:

$-\mathfrak{S}$	$+\mathfrak{S}'$
$+\mathfrak{V}$	$+\mathfrak{V}'$
$-\mathfrak{T}$	$-\mathfrak{T}'$
$+\mathfrak{ß}$	$-\mathfrak{ß}'$

§. 30.

Wenn der Bogen 360 Grad erreichet hat, so bekommen die trigometrischen Linien folgende Werthe:

$\mathfrak{S} = -o$	$\mathfrak{S}' = +R$
$\mathfrak{V} = +o$	$\mathfrak{V}' = +R$
$\mathfrak{T} = -o$	$\mathfrak{T}' = -\infty$
$\mathfrak{ß} = +R$	$\mathfrak{ß}' = -\infty$

Der Beweis ist wiederum wie bey §. 18.

§. 31.

§. 31.

Nimmt man alles vorige zusammen, so lassen sich die Veränderungen der Zeichen in folgende Tabelle bringen. Die Buchstaben S, V, S′ u. s. f. sollen sich eigentlich auf einen Bogen beziehen, der kleiner ist als 90 Grad. Dieses vorausgesetzt, soentstehen die trigometrischen Linien in den vier Vierteln des Umkreises folgendermaßen:

Von 0g bis 90g	Von 90g bis 180g	Von 180g bis 270g	Von 270g bis 360g
+ S	+ S	− S	− S
+ V	+ (2R − V)	+ (2R − V)	+ V
+ T	− T	+ T	− T
+ ß	− ß	− ß	+ ß
+ S′	− S′	− S′	+ S′
+ V′	+ V′	+ (2R − V′)	+ (2R − V′)
+ T′	− T′	+ T′	− T′
+ ß′	+ ß′	− ß′	− ß′

Für den Anfang und das Ende jedes Viertels hat man folgende Werthe.

	Für 90g	Für 180g	Für 270g	Für 360g oder für 0g
S	+ R	+ 0	− R	− 0
V	+ R	+ 2R	+ R	+ 0
T	+ ∞	− 0	+ ∞	− 0
ß	+ ∞	− R	− ∞	+ R
S′	+ 0	− R	− 0	+ R
V′	+ 0	+ R	+ 2R	+ R
T′	+ R	− ∞	+ 0	− ∞
ß′	+ R	+ ∞	− 0	− ∞

Anmerkung. Zum leichteren Gebrauche dieser Tafeln, und zur Hülfe des Gedächtnisses merke man: daß
die Kotangente und Tangente
die Sekante und der Kosinus
die Kosekante und der Sinus
allemal die nemlichen Zeichen haben.

§. 32.

Trigonometrische Tafeln oder Sinus- und Tangententafeln sind Bücher, worin die Sinusse und Tangenten, auch wohl die Sinusverse und Sekanten der Bogen oder Winkel wenigstens von Minute zu Minute, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt sind. Meistens werden, der Kürze halben, die Sinusverse und Sekanten weggelassen, theils weil sie weniger gebrauchet werden, theils auch weil man sie aus den Sinussen und Tangenten leicht berechnen kann (§. 9. 12.)

Die Zahl die den Halbmesser ausdrücket, ist willkürlich. In den gewöhnlichen Tafeln wird angenommmen, der Halbmesser sey 100000, das ist, er enthalte 100000 gleiche Theile. Die Zahlen der Tafeln zeigen an, wie viel dergleichen Theile auf jeden Sinus, jede Tangente u. s. f. gehen. Außer den ganzen Theilen pflegen auch noch, zu mehrerer Genauigkeit, zwey Dezimalziffern angehänget zu werden; das übrige, was noch an der vollkommenen Richtigkeit der Zahlen mangelt, wird aus der Acht gelassen, weil es gar wenig beträgt.

Die Tafeln zeigen also im Grunde weiter nichts an, als das Verhältniß des Halbmessers zu jedem Sinus u. s. f. Und da dieses Verhällniß in allen Zirkeln bey ähnlichen Bogen das nemliche ist (§. 7.), so können die Verhältnisse die man in den Tafeln findet, auf alle mögliche Zirkel angewandt werden.

Ob nun gleich die Tafeln schon längst verfertiget sind und gebraucht werden, so muß man doch einen Begriff von deren Berechnung haben. Dazu dienen folgende Aufgaben.

§. 33.

Aufgabe.

Aus dem Sinus eines Bogens den Kosinus und die übrigen trigonometrischen Linien berechnen.

Auflö-

Auflösung. Man bediene sich folgender Formeln, worin x einen jeden beliebigen Bogen und r den Halbmesser anzeiget.

I) $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}^2)}$, das heißt: man multiplizire den Halbmesser mit sich selbst oder quadrire ihn, man quadrire auch den Sinus, die letzte Quadratzahl ziehe man von der ersteren ab, und aus dem übrigen ziehe man die Quadratwurzel, so erhält man den Kosinus. Denn es ist (§. 10.)

$$(r - \mathfrak{S}), \mathfrak{S}' :: \mathfrak{S}', (r + \mathfrak{S})$$

oder

$$r^2 = \mathfrak{S}^2 + \mathfrak{S}'^2$$

daher $\mathfrak{S}'^2 = r^2 - \mathfrak{S}^2$

und $\mathfrak{S}' = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}^2)}$

II) $\mathfrak{V}\mathfrak{S} = r - \mathfrak{S}'x$, das heißt, der Sinusversus wird gefunden, wenn man den Kosinus vom Halbmesser subtrahirt. Denn es ist (§. 9.)

$$\mathfrak{V}x + \mathfrak{S}'x = r$$

also $\mathfrak{V}x = r - \mathfrak{S}'x$

III) $\mathfrak{V}'x = r - \mathfrak{S}x$, das heißt, der Kosinusversus wird gefunden, wenn man den Sinus vom Halbmesser subtrahiret. Denn es ist (§. 9.)

$$\mathfrak{V}'x + \mathfrak{S}x = r$$

folglich $\mathfrak{V}'x = r - \mathfrak{V}x$

IV) $\mathfrak{T}x = \frac{r.\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$. Denn es ist (§. 11.)

$$\mathfrak{S}'x, \mathfrak{S}x :: r, \mathfrak{T}\left(= \frac{r.\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}\right)$$

Es wird demnach der Halbmesser mit dem Sinus multipliziret und das Produkt durch den Kosinus dividiret, der Quozient giebt die Tangente.

$$V)\ \mathfrak{T}'x = \frac{r.\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x},\ \text{weil (§. 11.)}$$

$$\mathfrak{S}x,\ \mathfrak{S}'x :: r,\ \mathfrak{T}'x \left(= \frac{r.\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}\right)$$

Also wird der Halbmesser mit dem Kosinus multiplizirt, und das Produkt durch den Sinus dividiret. Der Quozient giebt die Kotangente.

$$VI)\ \beta x = \frac{rr}{\mathfrak{S}'x},\ \text{weil (§. 12.)}$$

$$\mathfrak{S}'x,\ r :: r,\ \beta x \left(= \frac{rr}{\mathfrak{S}'x}\right)$$

Also wird der Halbmesser mit sich selbst multiplizirt, und das Produkt durch den Kosinus dividiret, um die Sekante zu erhalten.

$$VII)\ \beta'x = \frac{rr}{\mathfrak{S}x},\ \text{weil (§. 12.)}$$

$$\mathfrak{S}x,\ r :: r,\ \beta'x \left(= \frac{rr}{\mathfrak{S}x}\right)$$

Nemlich es wird der Halbmesser mit sich selbst multiplizirt und das Produkt durch den Sinus dividirt. Der Quozient giebt die Kosekante.

§. 34.

Aufgabe.

Aus dem Sinus eines Bogens den Sinus des doppelten Bogens berechnen.

Auflö-

Auflösung. Wenn der Sinus bekannt ist, so kann auch der Kosinus als bekannt angenommen werden, da $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$ (§. 33.). Dieses vorausgesetzt, so ist

$$\mathfrak{S}2x = \frac{2\mathfrak{S}x.\,\mathfrak{S}'x}{r}$$

weil (§. 15.) bewiesen worden, daß

$$r,\ \mathfrak{S}'x :: 2\mathfrak{S}x,\ \mathfrak{S}2x \left(= \frac{2\mathfrak{S}x.\,\mathfrak{S}'x}{r}\right)$$

§. 35.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Sinus eines Bogens den Sinus des halben Bogens berechnen.

Vorbereitung.

In voriger Gleichung war

$$\mathfrak{S}2x = \frac{2\mathfrak{S}x.\,\mathfrak{S}'x}{r}$$

man nehme an es sey $\mathfrak{S}2x$ bekannt und $\mathfrak{S}x$ unbekannt. Man verändere die Gleichung folgendermaßen:

$$r.\,\mathfrak{S}2x = 2\mathfrak{S}x.\,\mathfrak{S}'x$$

$$\tfrac{1}{2}r.\,\mathfrak{S}2x = \mathfrak{S}x.\,\mathfrak{S}'x$$

oder weil $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$

$$\tfrac{1}{2}r.\,\mathfrak{S}2x = \mathfrak{S}x.\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$$

quadrire beyderseits

$$\tfrac{1}{4}r^2.\,(\mathfrak{S}2x)^2 = \mathfrak{S}x^2\,(r^2 - \mathfrak{S}x^2)$$

oder $\tfrac{1}{4}r^2.\,(\mathfrak{S}2x)^2 = r^2\,\mathfrak{S}x^2 - \mathfrak{S}x^4$

oder $\mathfrak{S}x^4 - r^2\,\mathfrak{S}x^2 = -\tfrac{1}{4}r^2.\,(\mathfrak{S}2x)^2$

addire

addire beyderseits $\frac{1}{4} r^4$

$$\mathfrak{S}x^4 - r^2 \mathfrak{S}x^2 + \tfrac{1}{4} r^4 = \tfrac{1}{4} r^4 - \tfrac{1}{4} r^2 . \mathfrak{S}2x^2$$
$$= \tfrac{1}{4} r^2 (r^2 - \mathfrak{S}2x^2)$$

nimm die Quadratwurzel beyderseits

$$\mathfrak{S}x^2 - \tfrac{1}{2} r^2 = \pm \tfrac{1}{2} r \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}2x^2)}$$

oder da $\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}2x^2)} = \mathfrak{S}'2x$, so ist

$$\mathfrak{S}x^2 - \tfrac{1}{2} r^2 = \pm \tfrac{1}{2} r . \mathfrak{S}'2x$$

$$\mathfrak{S}x^2 \ldots = \tfrac{1}{2} r^2 \pm \tfrac{1}{2} r \, \mathfrak{S}'2x$$

$$= \frac{r (r \pm \mathfrak{S}'2x)}{2}$$

$$\mathfrak{S}x \ldots = \sqrt{\left[\frac{r (r \pm \mathfrak{S}'2x)}{2}\right]}$$

Es ist aber $r \pm \mathfrak{S}'2x = \mathfrak{V}2x$, nemlich das Zeichen — gilt von 0 bis 90^g und von 270 bis 360^g, das Zeichen + aber von 90 bis 180^g, und von 180^g bis 270^g. Also ist

$$\mathfrak{S}x = \sqrt{\frac{r . \mathfrak{V}x}{2}}$$

oder $\mathfrak{S}x = \sqrt{(r . \frac{1}{2} \mathfrak{V}2x)}$

Setzet man z anstatt $2x$, so wird $x = \frac{1}{2} z$, und es ist

$$\mathfrak{S}\tfrac{1}{2} z = \sqrt{(r . \tfrac{1}{2} \mathfrak{V} z)}$$

Auflösung. Es sey der ganze Bogen z und der halbe $\frac{1}{2} z$, so ist, wie eben jetzt gefunden worden

$$\mathfrak{S}\tfrac{1}{2} z = \sqrt{(r . \tfrac{1}{2} \mathfrak{V} z .)}$$

Das ist, es muß der halbe Sinusversus mit dem Halbmesser multipliziret und aus dem Produkt die Quadratwurzel gezogen werden, so bekömmt man den Sinus des halben Bogens.

Oder

Oder es wird zwischen dem Halbmesser und dem halben Sinusversus die mittlere Proporzional-Linie gesucht.

§. 36.

Aufgabe.

Es sind die Sinusse und Kosinusse zweier Bogen gegeben. Man soll den Sinus ihrer Summe oder ihrer Differenz finden.

Auflösung. Es sey der größere Bogen x, der kleinere z, so bekömmt man

$$\text{I)}\quad S(x+z) = \frac{Sx.S'z}{r} + \frac{S'x.Sz}{r}$$

$$= \frac{Sx.S'z + Sz.S'x}{r}$$

$$\text{II)}\quad S(x-z) = \frac{Sx.S'z}{r} - \frac{S'x.Sz}{r}$$

$$= \frac{Sx.S'z - Sz.S'x}{r}$$

Diese Formeln erhellen aus §. 16. und §. 17.

Nimmt man beyde zusammen, so hat man diese allgemeine Formel

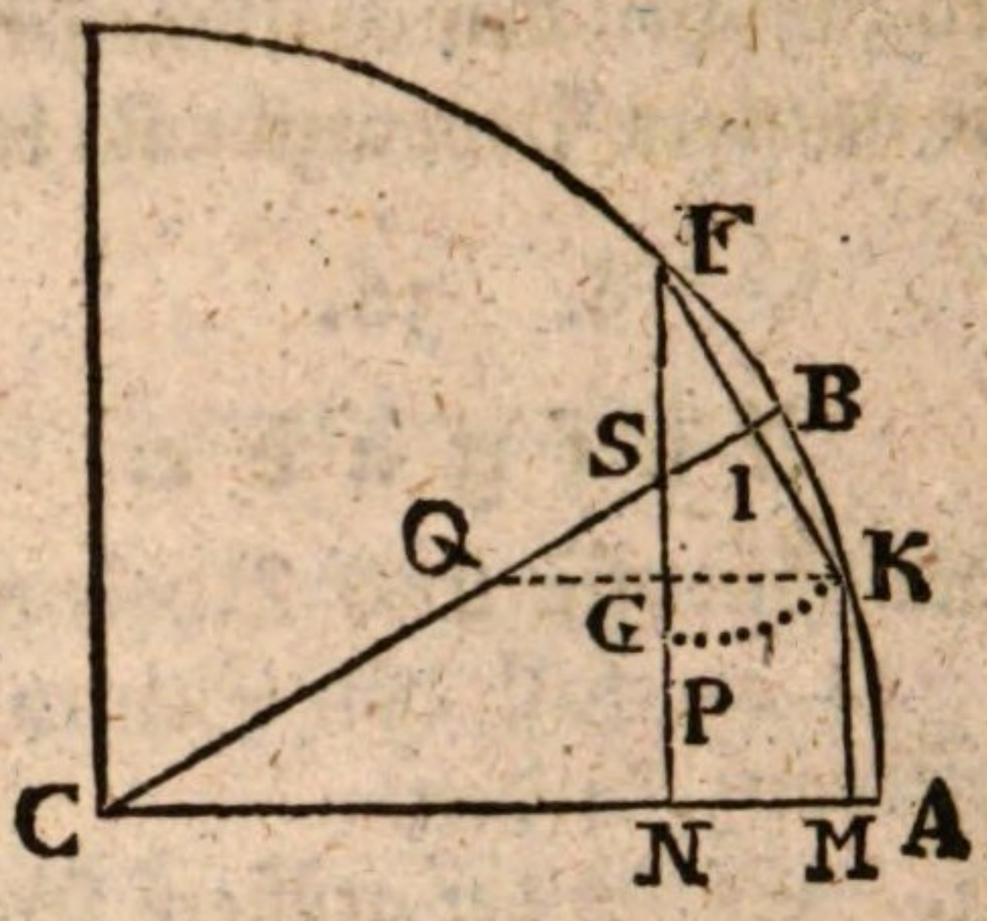
$$S(x \pm z) = \frac{Sx.S'z \pm Sz.S'x}{r}$$

§. 37.

Aufgabe.

Es werden die Sinusse der Bogen von 0 bis 30^g als bekannt angenommen, und es sollen aus denselben die Sinusse von 30 bis 60 Grad berechnet werden.

(Siehe die folgende Figur.)



Vorbereitung.

Es sey AK ein Bogen zwischen o und 30^g, AB der Bogen von 30 Grad, also KB der Unterschied zwischen AB und AK, oder KB = (30^g — AK). Es werde genommen BF = KB, und gezogen KF, so ist KI oder FI der Sinus von KB oder BF (§. 8.). Es werde gezogen FN, der Sinus von AF, und KQ parallel mit AC.

Die Dreyecke SIF und SQG sind ähnlich, weil die Winkel in S Scheitelwinkel, und in I und G rechte Winkel sind. Also ist auch ∠F = ∠Q.

Es ist aber ∠C = ∠Q = ∠F = 30^g. Man beschreibe aus F mit dem Halbmesser FK einen Bogen KP, so ist GK der Sinus solches Bogens, oder des Winkels F. Der Sinus von 30 Grad ist aber die Hälfte des Halbmessers (§. 13.) Also ist GK die Hälfte von FK oder GK = KI. Nun ist (IV. §. 27.)

(FK — GK), FG :: FG, (FK + KG.)

Anstatt FK setze 2IK und anstatt GK setze IK, so kömmt

IK, FG :: FG, 3IK

Daher, wenn die Linien in Zahlen ausgedrückt sind, ist

$$FG^2 = 3IK^2$$
$$\text{und } FG = \sqrt{3IK^2}$$
$$= \sqrt{(IK \times 3IK)}$$
$$GN + FG = GN + \sqrt{(IK \times 3IK)}$$
$$FN \ldots = GN + \sqrt{(IK + 3IK)}$$

Es

Es sey x (= AF) ein Bogen zwischen 30 und 60 Grad. Man subtrahire 30 Grad (= AB) vom gegebenen Bogen, so bleibt $x - 30^g$ (= FB = BK). Hiervon wird nun der Sinus (= IK = IF) als bekannt angenommen und also kann durch die Rechnung gefunden werden

$$\sqrt{(IK + 3IK)}$$

oder $\sqrt{3IK^2}$

oder $IK\sqrt{3}$

Von 30 Grad (= AB) subtrahire die vorige Differenz, nemlich $x - 30^g$ (= BK), so bleibt

$$30^g - (x - 30^g) \; (= KA)$$

oder $60^g - x$ (= KA)

Hiervon ist nun auch der Sinus bekannt, nemlich KM = GN. Addiret man diesen Sinus zum vorigen, so bekömmt man

$$FN = GN + \sqrt{(IK.\, 3IK)} = GN + IK\sqrt{3}$$

Auflösung. Wenn der Bogen x zwischen 30 und 60 Grad ist, so hat man

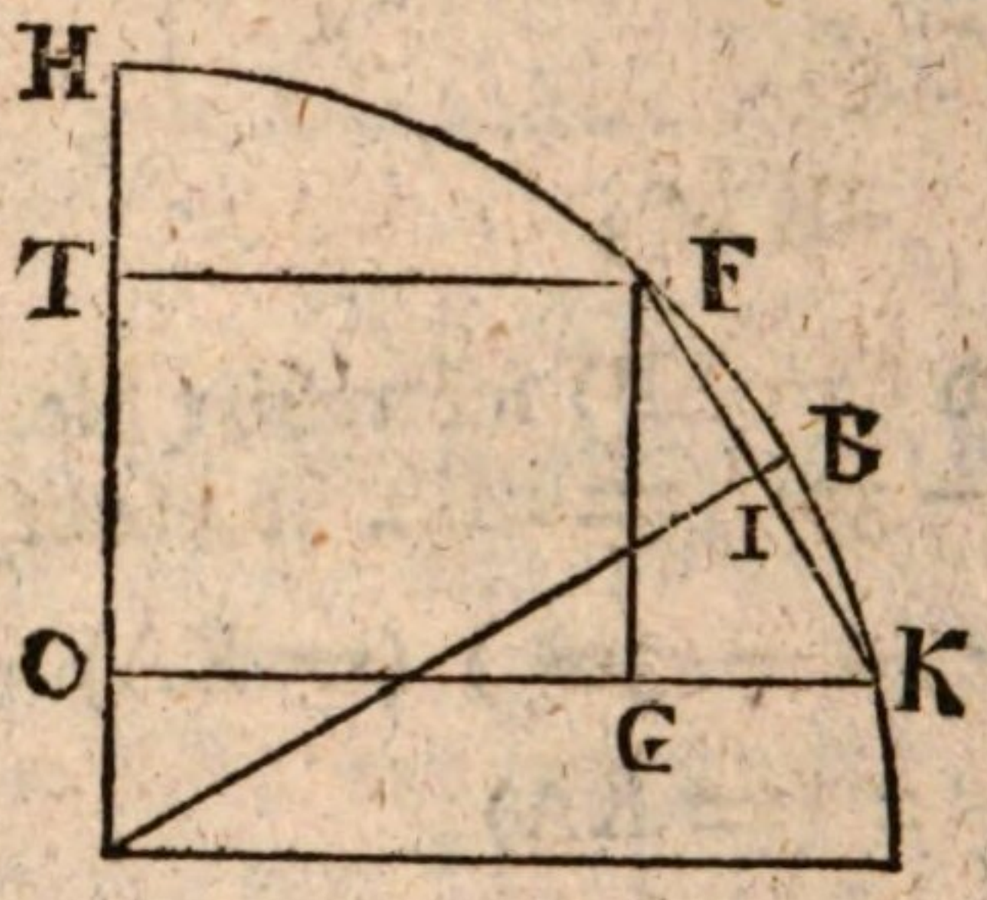
$$Sx = S(60^g - x) + S(x - 30^g).\sqrt{3}$$

Das heißt, man subtrahire die Grade des gegebenen Bogens von 60 Grad, und merke den Sinus der übrigen Grade. Man subtrahire auch 30 Grad von den Graden der gegebenen Bogens, und multiplizire den zum Reste gehörigen Sinus mit $\sqrt{3}$. Man addire das Produkt zum erstgefundenen Sinus, so bekömmt man den verlangten Sinus.

§. 38.

Aufgabe.

Es werden die Sinusse der Bogen von 0 bis 60g als bekannt angenommen, und aus denselben sollen die Sinusse von 60 bis 90g berechnet werden.



Vorbereitung.

Es sey HK ein Bogen zwischen 60 und 90g, HB der Bogen von 60g. Subtrahire 60 Grad von den Graden des gegebenen Bogens KH, so bleibt BK. Nimm BF = BK. Ziehe FK, so ist KI oder FI der Sinus von BK oder FB.

Ziehe FT und KO, Sinusse der Bogen HF und HK. Ziehe auch FG senkrecht auf OK.

Es ist im vorigen Paragraph bewiesen worden, daß GK = IK. Nun ist

$$OK = OG + GK$$
$$= OG + IK$$

und weil . . . OG = FT, so ist

$$OK = FT + IK$$

Es sey der Bogen HK = x, so ist

$$BK = x - 60^g$$
$$IK = S(x - 60^g)$$

Ferner

Ferner ist

$$\begin{aligned} HF &= HB - BF \\ &= HB - BK \\ &= 60^g - (x - 60^g) \\ &= 120^g - x \\ FT &= S(120^g - x) \end{aligned}$$

Setzet man diese Werthe von IK und FT in die Gleichung $OK = IK + FT$, so ist

$$OK = Sx = S(x - 60^g) + S(120^g - x)$$

Auflösung. Man gebrauche die letztgefundene Formel, nemlich

$$Sx = S(x - 60^g) + S(120^g - x)$$

Die Vorbereitung erkläret hinlänglich diese Formel und deren Gebrauch.

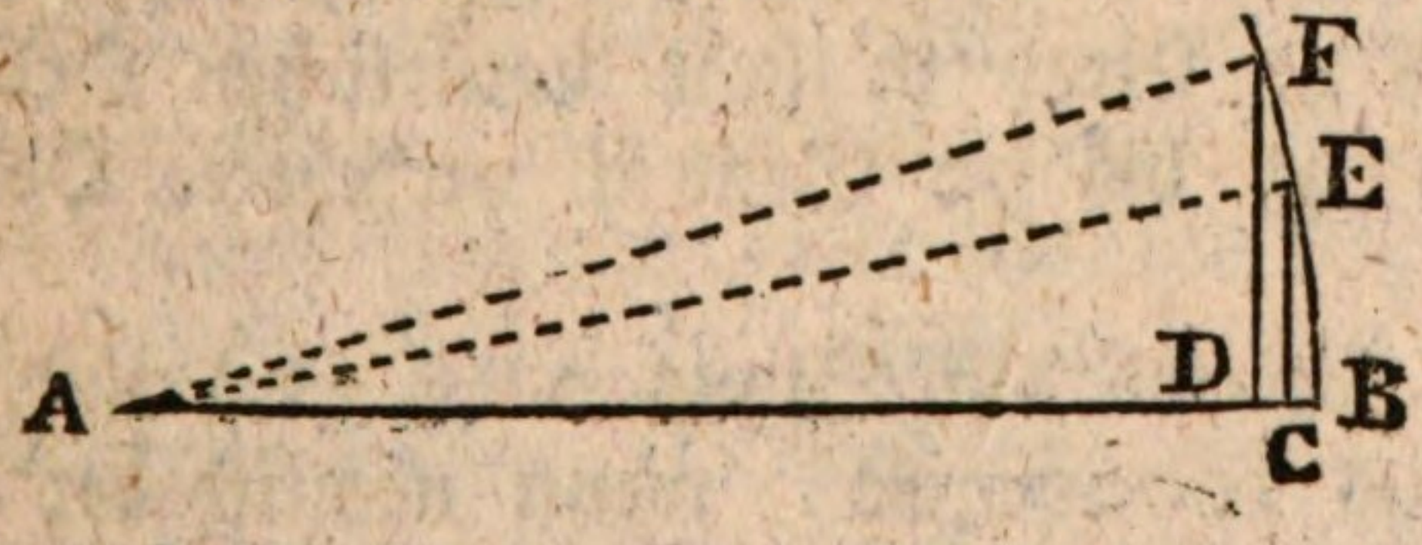
§. 39.

Aufgabe.

Den Sinus von 1 Sekunde berechnen.

Auflösung. Es ist bekannt, (§. 13.) daß die Hälfte des Halbmessers den Sinus von 30 Grad ausmacht. Folglich, wenn man beständig den Bogen halbirt (§. 35.), so bekömmt man nach und nach den Sinus von 15^g, von $7^g\frac{1}{2}$, von $3^g\frac{3}{4}$, und nach 12 Operazionen den Sinus von $0^g0'52''44'''3''''\frac{3}{4}$, welchen wir *a* nennen wollen.

Wen nun die Bogen sehr klein sind, so kann man annehmen, daß die Sinusse sich verhalten wie die Bogen.



Denn es seyen BE, BF zwey sehr kleine Bogen, und EC, FD ihre Sinusse, so kann FB für eine gerade Linie gelten, und dann sind die Dreyecke BCE, BDF ähnlich, so daß CE, DF : : BE, BF.

Dieses vorausgesetzt, so suche man den Sinus von einer Minute vermöge der Regel Detri, also:

Wie $52''44'''3''''\frac{3}{4}$ zu $60''$
so ist a

zu S $60''$ oder S $1'$

oder, wenn man alles in Quarten berechnet

wie $189843''''\frac{3}{4}$ zu $216000''''$
so ist a

zu S $1'$

§. 40.

Aufgabe.

Trigonometrische Tafeln verfertigen, für alle Bogen unter 90^g, von Minute zu Minute.

Auflösung. Spalte einige Blätte Papier von oben nach unten zu in zwey Kolumnen.

Am Rande der ersten Kolumne schreibe linker Hand die Grade und Minuten der Bogen nach einander in gehöriger Ordnung von 0 an bis 45 Grad.

Jedem Bogen gegenüber schreibe am Rande der anren Kolumne sein Komplement, das ist, was ihm zu 90^g fehlet.

So werden beyde Kolumnen alle Bogen von 0 bis 90^g von Minute zu Minute enthalten, doch so, daß die Zahlen von 0 bis 45 Grad in ihrer natürlichen Ordnung, hingegen von 45 bis 90 Grad in verkehrter Ordnung folgen.

Neben 0^g schreibe den Sinns 0 (§. 31.) und neben 90^g den Sinus 100000;00, wenn nemlich der Halbmesser = 100000 angenommen wird. §(.31.)

Berechne vermöge §. 39. den Sinus von 1 Minute, und daraus (§. 33.) auch den Kosinus oder den Sinus von $89^g 59'$. Schreibe beyde Sinusse neben ihren Bogen.

Ist der Sinus von 1 Minute, nebst dem Kosinus oder dem Sinus von $89^g 59'$ bekannt, so findet man daraus den Sinus von 2' (§. 34.), folglich auch den Kosinus oder den Sinus von $59^g 58$ (§. 33.).

Ferner, aus dem Sinus und Kosinus von 2' und von 1' findet man den Sinus von 3' (§. 36.). Eben so von 4 Minuten, von 5', u. s. f. indem der Bogen immer um eine Minute zunimmt.

Ist man bis 30^g gekommen, so kann man die Sinusse bis 60^g auf eine kürzere Art vermöge §. 37. berechnen, da dann die Sinustafeln fertig sind, weil die Sinusse über 60^g schon als Kosinusse der Bogen unter 30^g berechnet worden.

Sonst kann man die Richtigkeit der Sinusse über 60 Grad auch nach §. 38. untersuchen.

Da nun die Tafeln alle Sinusse und Kosinusse der Bogen unter 90^g enthalten, so können die Sinusverse, Tangenten und Sekanten nach den gehörigen Formeln (§. 33.) auch gefunden werden. Gewöhnlich begnüget man sich mit den Sinussen und Tangenten.

§. 41.

Gesetzt nun man hat fertige Tafeln bey der Hand, und es sollen daraus die bestimmenden Linien eines Bogens oder eines Winkels gefunden werden, der in Graden gegeben ist; so verfährt man folgendermaßen:

I) Ist der gegebene Bogen unter 90^g so suchet man ihn am Rande der Tafeln, nemlich vorwärts von o bis 45^g oder ruckwärts von 45 bis 90^g. Ist nun die Zahl der Grade und Minuten gefunden, so stehet dabey der Sinus und die Tangente. Will man den Kosinus und die Kotangente haben, so muß man solche in der anderen Kolumne gegenüber suchen, wo allemal das Komplement

Bogens nebst dessen Sinus und Tangente zu finden ist. Eben so verfährt man mit dem Sinusversus und der Sekante, wenn solche in den Tafeln stehen.

II) Ist der gegebene Bogen zwischen 90^g und 180^g, so subtrahire 90^g von demselben. Alsdann bleibt seine Ergänzung zu 180^g, und zu dieser werden die trigonometrischen Linien in den Tafeln gesucht. Nur muß das Zeichen — vor der Tangente, der Sekante, dem Kosinus und der Kotangente gesetzt werden. (§. 31.) Der Sinusversus, wenn er in den Tafeln stehet, muß vom doppelten Halbmesser subtrahiret werden (§. 31.).

III) Ist der Bogen zwischen 180 und 270^g, so ziehe man erstlich 180^g davon ab, und suche dann die trigonometrischen Linien in den Tafeln, beobachte aber dabey die Veränderungen, sowohl der Zeichen als des Sinusversus und Kosinusversus die im §. 31. vorgeschrieben worden.

IV) Ist der Bogen zwischen 270 und 360^g, so ziehe man ihn von 360^g ab, und suche zu dem übrigen die trigonometrischen Linien in den Tafeln, mit Beobachtung dessen was §. 31. angemerkt worden.

Anmerkung. Die beyden letzten Fälle sind selten, und kommen nur in der Astronomie vor. Die beyden ersten aber werden beständig gebrauchet.

§. 42.

Ist der Fall umgekehret, und es wird der Sinus gegeben, so suchet man denjenigen, der ihm in den Tafeln am nächsten kömmt, und merket die Grade des Bogens, die dabey stehen. Was daran fehlet, wird aus der Acht gelassen. Eben so verfährt man mit den Tangenten, auch Sekanten und Sinusversen, wenn dergleichen vorhanden sind. Nur beobachte man zugleich, daß die nemliche trigonometrische Linie so wohl einen Bogen x bestimmet, den man in den Tafeln findet, als auch die Bogen von $180^g - x$, $180^g + x$ und $360^g - x$, entweder mit dem nemlichen Zeichen oder mit verändertem Zeichen.

Was

Was die Sinusverse betrift, so muß man, wenn ein Sinusversus gegeben ist, der den Halbmesser übertrifft, ihn erstlich vom doppelten Halbmesser subtrahiren, zum übrigen aber den Bogen suchen. Dieser Bogen sey x, so ist der verlangte Bogen $180^g - x$ oder auch $180^g + x$ Dieses alles beruhet auf §. 31.

Wird der Kosinus, die Kotangente, u. s. f. gegeben, so suchet man sie wie vorher, nimmt aber nicht die dabey stehende Bogenzahl, sondern die gegenüberstehende. Uebrigens gelten hier wiederum vorige Anmerkungen, auch in Betrachtung des Kosinusversus.

§. 43.

Die Tafeln, deren Gebrauch jetzt beschrieben worden, pfleget man natürliche Sinus- und Tangententafeln zu nennen. Künstliche Tafeln hingegen nennet man diejenigen, worin anstatt der Zahlen, welche die trigonometrischen Linien ausdrücken, nur die Logarithmen dieser Zahlen aufgeschrieben werden. Sie haben den Nutzen, welchen die Logarithmen überhaupt in Rechnungen leisten, daß nemlich dadurch die Rechnungen um ein merkliches verkürzet werden.

§. 44.

Aufgabe.

Aus den natürlichen trigonometrischen Tafeln, künstliche Tafeln verfertigen.

Auflösung. Man berechne die Logarithmen aller Sinusse von 1 bis 90^g, auch die Logarithmen der Sinusversen, wenn man sie haben will, und schreibe sie an der Stelle der Sinusse oder Sinusverse selbst.

Die Logarithmen der Tangenten und Sekanten lassen sich leichter finden. Denn weil

$$Tx = \frac{r.Sx}{S'x}$$

$$\text{so ist } LTx = Lr + LSx - LS'x$$

Und weil

$$\beta x = \frac{rr}{S'x}$$

$$\text{so ist } L\beta x = 2Lr - LS'x$$

Anmerkung. In solchen künstlichen Tafeln pfleget man die gemeinen oder Briggischen Logarithmen zu gebrauchen, deren Basis 10 ist. Ist also der Halbmesser 100000, so ist dessen Logarithmus 5. Hingegen muß man wissen, daß die ersten Sinustafeln für einen Halbmesser von 10000000000 Theilen berechnet worden, dessen Logarithmus also 10 war. Daher ist in den gebräuchlichen künstlichen Tafeln der Logarithmus allemal um 5 Einheiten größer, als er vermöge der gewöhnlichen natürlichen Tafeln seyn sollte. Dieses hindert aber nicht in den Rechnungen, die mit lauter Logarithmen geschehen, weil das arithmetische Verhältniß derselben doch allemal einerley bleibet. Die jetzigen Tafeln sind nur Abkürzungen der alten, welche, wegen der mehreren Dezimalbrüche, genauer, aber auch viel weitläuftiger und kostbarer waren.

Aumerkung II. Man findet in verschiedenen Büchern beyderley Tafeln vereiniget, so daß z E. neben jedem Sinus zugleich dessen Logarithmus stehet. In den meisten Fällen sind aber die künstlichen Tafeln allein hinlänglich.

Anmerkung III. Da die künstlichen Tafeln eben so eingerichtet und abgetheilet sind, wie die natürlichen, so wollen wir uns bey deren Gebrauche nicht aufhalten, welcher aus §. 41. 42. leicht abgenommen werden kann.

§. 45.

In den Rechnungen wird oft angenommen, daß der Halbmesser des Zirkels = 1 sey, wodurch dieselben

selben weit bequemer werden. Will man nun dasjenige, was in dieser Voraussetzung gefunden worden, mit den natürlichen Sinustafeln vergleichen, wo der Halbmesser = 100000 ist, so erinnere man sich, daß ähnliche trigonometrische Linien sich allemal verhalten, wie die Halbmesser der Zirkel. Da nun der Halbmesser 100000, zehntausendmal größer ist, als der Halbmesser 1, so sind auch die trigonometrischen Linien in den Tafeln 100000 mal größer als diejenigen, die man für den Halbmesser findet, und diese sind 100000 mal kleiner als jene.

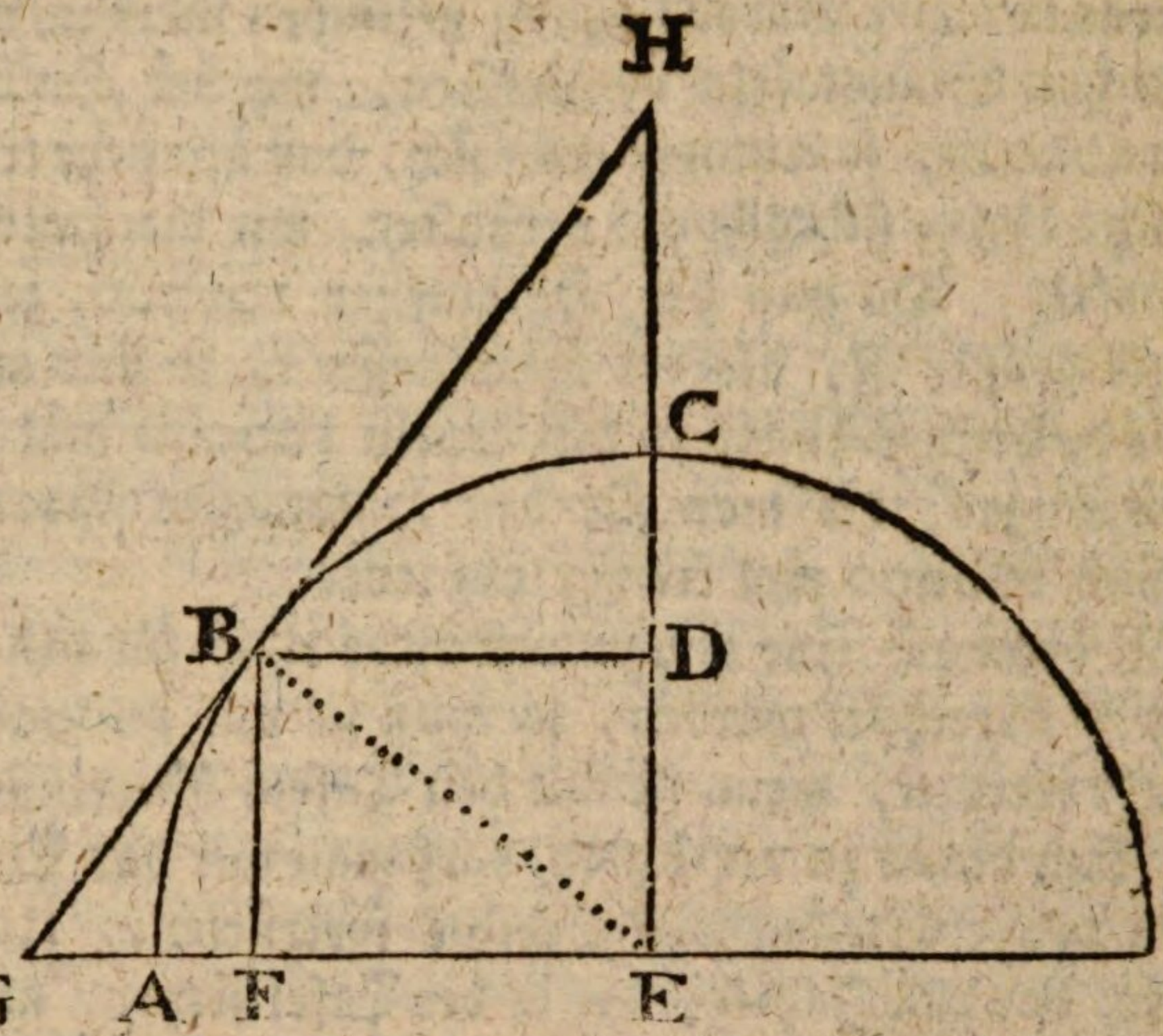
Ist demnach eine trigonometrische Linie für den Halbmesser 1 berechnet worden, so muß sie mit 100000 multipliziret werden, wenn sie mit den Tafeln übereinstimmen soll. Um dieses zu verrichten, darf man nur das Dezimalzeichen um 5 Stellen weiter rechts fortrücken. Und umgekehrt, bey den Zahlen, die in der Tafel stehen, muß das nemliche Zeichen um 5 Stellen weiter links gerücket werden, wenn der Halbmesser 1 seyn soll.

§. 46.

Was wir bisher von den trigonometrischen Linien gelehret haben, kann von jedem Anfänger verstanden werden, der nur einige Kenntnisse von der gemeinen Algebra hat. Hingegen erfordern die übrigen Säße dieses Hauptstückes einen mehr geübten Algebristen. Wer also noch nicht sehr weit in der Rechenkunst gekommen ist, muß sich mit dem vorhergehenden Theile dieses Hauptstückes begnügen, und sogleich zum folgenden Hauptstücke schreiben, welches schon aus den vorigen Säßen verstanden werden kann.

§. 47.

Alle Linien, die die Größe der Zirkelbogen bestimmen, hängen so von einander ab, daß, wenn eine derselben bekannt ist, die übrigen mit leichter Mühe gefunden werden, voraus-



vorausgesetzt, daß auch der Halbmesser des Zirkels bestimmet sey. Es sey der Halbmesser $= r$, und der Bogen $AB = x$.

Es sey gegeben BF oder $\mathfrak{S}x$, so ist

1) $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$. Denn im rechtwinklichen Dreyeck EFB ist $FE (= BD = \mathfrak{S}'x) = \sqrt{(BE^2 - BF^2)} = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$.

2) $\mathfrak{V}x = r - \mathfrak{S}'x = r - \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$.
Denn $AF (= \mathfrak{V}x) = AE - FE = AE - BD = r - \mathfrak{S}'x$, und weil $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$ so ist $\mathfrak{V}x = r - \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$.

3) $\mathfrak{V}'x = r - \mathfrak{S}x$.
Denn $DC (= \mathfrak{V}'x) = CE - ED = CE - BF = r - \mathfrak{S}x$.

4) $$\mathfrak{T}x = \frac{r\,\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x} = \frac{r\,\mathfrak{S}x}{\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x)}}$$

Denn

Denn das rechtwinkliche Dreyeck GBE wird durch die winkelrechte Linie BF in zwey ähnliche Dreyecke GFB und BFE getheilet, also ist

FE, BE :: BF, BG

$$\mathfrak{S}'x, r :: \mathfrak{S}x, \mathfrak{T}x$$

daher ist $\mathfrak{T}x = \frac{r\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$

oder weil $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$, so ist

$$\mathfrak{T}x = \frac{r\mathfrak{S}x}{\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}}$$

5) $\mathfrak{T}'x = \frac{r\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x} = \frac{r\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}}{\mathfrak{S}x}$

Denn das rechtwinkliche Dreyeck EBH wird durch die winkelrechte Linie BD wiederum in 2 ähnliche Dreyecke getheilet, und machet diese Proporzion

ED (=BF), EB :: BD, BH oder

$$\mathfrak{S}x, r :: \mathfrak{S}'x, \mathfrak{T}'x \left(= \frac{r\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x} = \frac{r\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}}{\mathfrak{S}x}\right)$$

6) $\mathfrak{ß}x = \frac{r^2}{\mathfrak{S}'x} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}}$

Denn weil das rechtwinkliche Dreyeck GBE durch die winkelrechte Linie BF getheilet wird, so ist

FE, EB :: EB, GE

$$\mathfrak{S}'x, r :: r, \mathfrak{ß}x \left(= \frac{r^2}{\mathfrak{S}'x} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}}\right)$$

7) $\mathfrak{ß}'x = \frac{r^2}{\mathfrak{S}x}$

Denn

Denn im rechtwinklichen Dreyecke EBH ist wie vorher

$$DE(=BF),\ EB :: EB,\ EH$$

$$\mathfrak{S}x,\ r,\ ::\ r,\ \mathfrak{ß}'x\ \left(=\frac{r^2}{\mathfrak{S}x}\right)$$

Anmerkung. Diese Verhältnisse sind zwar schon alle in §. 9. 10. 11. 12. und §. 33. enthalten. Diese kurz wiederholten Beweise werden aber dem Anfänger vermuthlich angenehmer seyn, als die bloße Anführung der erwähnten Stellen.

§. 48.

Nimmt man $\mathfrak{S}'x$ als bekannt an, so ist

1) $\mathfrak{S}x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}$

Denn im rechtwinklichen Dreyecke BDE ist $DE(=BF) = \sqrt{(BE^2 - BD^2)}$

oder $\mathfrak{S}x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}$

2) $\mathfrak{V}x = r - \mathfrak{S}'x$, wie schon vorher bewiesen (§. 47.).

3) $\mathfrak{V}'x = r - \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}$

Denn es ist bewiesen (§. 47.), daß $\mathfrak{V}'x = r - \mathfrak{S}x$, es ist aber $\mathfrak{S}x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}$, also $\mathfrak{V}'x = r - \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}$

4) $\mathfrak{T}x = \frac{r\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}}{\mathfrak{S}'x}$

Denn es ist $\mathfrak{T}x = \frac{r\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x}$, und $\mathfrak{S}x = \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}$

5) $\mathfrak{T}'x = \frac{r\mathfrak{S}'x}{\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}}$, weil $\mathfrak{T}'x = \frac{r\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x}$

6) $\mathfrak{ß}x = \frac{r^2}{\mathfrak{S}'x}$. Siehe oben (§. 47.).

7) $\mathfrak{ß}'x = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}'x^2)}}$, weil $\mathfrak{ß}'x = \frac{r^2}{\mathfrak{S}x}$

§. 49.

§. 49.

Wenn man $\mathfrak{T}x$ als bekannt annimmt, so wird

1) $\mathfrak{T}'x = \frac{r^2}{\mathfrak{T}x}$.

Denn im rechtwinklichen Dreyecke GEH, welches durch die winkelrechte Linie EB geschnitten wird, ist

GB, BE :: BE, BH

$$\mathfrak{T}x,\ r\ ::\ r,\ \mathfrak{T}'x\ \left(=\frac{r^2}{\mathfrak{T}x}\right)$$

2) $\mathfrak{S}x = \frac{r\mathfrak{T}x}{\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}$

Denn im rechtwinklichen Dreyecke GBE ist $GE = \sqrt{(BE^2 + GB^2)}$. Ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke GBE und BFG

GE, BE :: GB, BF

$\sqrt{(BE^2+GB^2)}$, BE :: GB, BF

$$\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)},\ r\ ::\ \mathfrak{T}x,\ \mathfrak{S}x\left(=\frac{r\mathfrak{T}x}{\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}\right)$$

3) $\mathfrak{S}'x = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}$

Denn im rechtwinklichen Dreyecke GBE, welches von der winkelrechten Linie BF getheilet wird, ist BE die mittlere Proporzional-Linie zwischen GE und FE. Es ist aber $GE = \sqrt{(BE^2 + BG^2)}$, also ist

GE, EB :: EB, FE

$\sqrt{(EB^2+BG^2)}$, EB :: EB, FE

$$\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)},\ r\ ::\ r,\ \mathfrak{S}'x\ \left(=\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}\right)$$

4)

4) $\mathfrak{V}x' = r - \frac{r^2}{\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}$

Denn es ist AF = AE — FE = $r - \mathfrak{S}'x$

oder $\mathfrak{V}x = r - \frac{r^2}{\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}$

5) $\mathfrak{V}'x = r - \frac{r\mathfrak{T}x}{\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}$

Denn es ist DC = CE — ED = CE — BF

$= r - \mathfrak{S}x = r - \frac{r\mathfrak{T}x}{\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}$

6) $\mathfrak{B}x = \sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}$

Denn es ist $GE = \sqrt{(EB^2+BG^2)} = \sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}$

7) $\mathfrak{B}'x = \frac{r\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}{\mathfrak{T}x}$

Denn es ist in den ähnlichen Dreyecken GBE und EBH

GB, GE :: BE, EH

$\mathfrak{T}x, \sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)} :: r, \mathfrak{B}'x \left(= \frac{r\sqrt{(r^2+\mathfrak{T}x^2)}}{\mathfrak{T}x}\right.$

§. 50.

Laßt uns $\mathfrak{T}'x$ als bekannt annehmen, so finden wir folgende Verhältnisse.

1) $\mathfrak{T}x = \frac{r^2}{\mathfrak{T}'x}$

weil HB, BE :: BE, BG.

$\mathfrak{T}'x, :: r, \mathfrak{T}x \left(= \frac{r^2}{\mathfrak{T}'x}\right)$

2) $\mathfrak{S}x = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \mathfrak{T}'x^2)}}$

weil im Dreyeck EBH

HE, BE :: BE, ED(=BF).

3) $\mathfrak{S}'x = \frac{r\mathfrak{T}'x}{\sqrt{(r^2 + \mathfrak{T}'x^2)}}$

weil im Dreyecke EBH

HE, EB :: BH, BD

4) $\mathfrak{V}x\,(= r - \mathfrak{S}'x) = r - \frac{r\mathfrak{T}'x}{\sqrt{(r^2 + \mathfrak{T}'x^2)}}$

5) $\mathfrak{V}'x\,(= r - \mathfrak{S}x) = r - \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \mathfrak{T}'x^2)}}$

6) $\mathfrak{f}x = \frac{r\sqrt{(r^2 + \mathfrak{T}'x^2)}}{\mathfrak{T}'x}$

Denn im Dreyecke GEH iſt

BH, BE :: HE, EG.

7) $\mathfrak{f}'x = \sqrt{(r^2 + \mathfrak{T}'x^2)}$

weil im Dreyecke EBH

$EH = \sqrt{(EB^2 + BH^2)}$

§. 51.

Wir wollen jetzt $\mathfrak{f}x$ als bekannt annehmen, ſo iſt

1) $\mathfrak{f}'x = \frac{r\mathfrak{f}x}{\sqrt{(\mathfrak{f}x^2 - r^2)}}$

Denn es iſt GB, BE :: GE, EH

$\sqrt{(GE^2 - EB^2)}$, BE :: GE, EH.

2) $\mathfrak{T}x = \sqrt{(\mathfrak{f}x^2 - r^2)}$.

3) $\mathfrak{T}'x = \frac{r^2}{\sqrt{(\mathfrak{ß}x^2 - r^2)}}$

Denn es ist GB, BE :: BE, BH.

4) $\mathfrak{S}x = \frac{r\sqrt{(\mathfrak{ß}x^2 - r^2)}}{\mathfrak{ß}x}$

Denn es ist GE, EB :: GB, BF.

5) $\mathfrak{S}'x = \frac{r^2}{\mathfrak{ß}x}$

Denn im rechtwinklichen Dreyecke GBE ist GE, EB :: EB, EF (=BD).

6) $\mathfrak{V}x (= r - \mathfrak{S}'x) = r - \frac{r^2}{\mathfrak{ß}x}$

$= \frac{r\mathfrak{ß}x - r^2}{\mathfrak{ß}x}$

$= \frac{r(\mathfrak{ß}x - r)}{\mathfrak{ß}x}$

7) $\mathfrak{V}'x = r - \mathfrak{S}x = r - \frac{r\sqrt{(\mathfrak{ß}x^2 - r^2)}}{\mathfrak{ß}x}$

§. 52.

Es sey $\mathfrak{ß}'x$ bekannt, so wird

1) $\mathfrak{ß}x = \frac{r\mathfrak{ß}'x}{\sqrt{(\mathfrak{ß}'x^2 - r^2)}}$

weil BH, BE :: HE, EG.

2) $\mathfrak{T}x = \frac{r^2}{\sqrt{(\mathfrak{ß}'x^2 - r^2)}}$

Denn es ist BH [$=\sqrt{(HE^2 - BE^2)}$] BE :: BE, BG.

3) $\mathfrak{T}'x = \sqrt{(\mathfrak{ß}'x^2 - r^2)}$

weil im Dreyeck HBE, $BH = \sqrt{(HE^2 - BE^2)}$

4) $\mathfrak{S}x = \frac{r^2}{\mathfrak{ß}'x}$

weil im Dreyecke HBE

HE, EB :: EB, ED(=BF).

5) $\mathfrak{S}'x = \frac{r\sqrt{(\mathfrak{ß}'x^2 - r^2)}}{\mathfrak{ß}'x}$

weil im Dreyecke HBE

HE, EB :: BH, BD.

6) $\mathfrak{V}x\ (= r - \mathfrak{S}'x) = r - \frac{r\sqrt{(\mathfrak{ß}'x^2 - r^2)}}{\mathfrak{ß}'x}$

7) $\mathfrak{V}'x\ (= r - \mathfrak{S}x) = r - \frac{r^2}{\mathfrak{ß}'x} = \frac{r(\mathfrak{ß}'x - r)}{\mathfrak{ß}'x}$

§. 53.

Es sey als bekannt angenommen $\mathfrak{V}x$, so wird

1) $\mathfrak{V}'x = r - \sqrt{(2r\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}$

Denn es ist $FE = r - \mathfrak{V}x$

$BF(=DE) = \sqrt{(BE^2 - FE^2)}$

$= \sqrt{[r^2 - (r - \mathfrak{V}x)^2]}$

$= \sqrt{(2r\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}$

Ferner ist $CD = CE - DE$

$= r - \sqrt{(2r\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}$

2) $\mathfrak{S}x = \sqrt{(2r\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}$

Denn es ist eben jetzt bewiesen worden, daß

$BF = \sqrt{(2r\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}$.

3) $\mathfrak{S}'x = r - \mathfrak{V}x$

Denn es ist FE = AE — AF

4) $\mathfrak{T}x = \frac{r\sqrt{(2r\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}}{r - \mathfrak{V}x}$

Denn es ist FE, BF :: EB, BG

od. $(r-\mathfrak{V}x), \sqrt{(2r\mathfrak{V}x-\mathfrak{V}x^2)} :: r, \mathrm{BG}(= \frac{r\sqrt{(2r\mathfrak{V}x-\mathfrak{V}x^2)}}{r-\mathfrak{V}x}$

5) $\mathfrak{T}'x = \frac{r(r-\mathfrak{V}x)}{\sqrt{(2r\mathfrak{V}x-\mathfrak{V}x^2)}}$

Denn es ist im Dreyeck EBH

DE(= BF), BD (= FE) :: EB, BH

6) $\mathfrak{ß}x = \frac{r^2}{r-\mathfrak{V}x}$

Denn es ist FE, BE :: BE, EG.

7) $\mathfrak{ß}'x = \frac{r^2}{\sqrt{(2r\mathfrak{V}x-\mathfrak{V}x^2)}}$

Denn DE(= BF), EB :: EB, EH.

§. 54.

Wenn $\mathfrak{V}'x$ als bekannt angenommen wird, so ist

1) $\mathfrak{V}x = r - \sqrt{(2r\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}$

Denn es ist DE = CE — CD = $r - \mathfrak{V}'x$ und im Dreyeck EDB ist

$\mathrm{BD}(= \mathrm{FE}) = \sqrt{(\mathrm{BE}^2 - \mathrm{DE}^2)}$

$= \sqrt{[r^2 - (r - \mathfrak{V}'x)^2]}$

$= \sqrt{(2r\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}$

Es ist aber AF = AE — FE

$= r - \sqrt{(2r\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}$

2) $\mathfrak{S}x = r - \mathfrak{V}'x$

Denn es ist DE ($=$ BF) $=$ CE $-$ CD.

3) $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(2r\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}$.

Denn es ist kurz vorher bewiesen worden, daß

$$BD = \sqrt{(2r\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}$$

4) $\mathfrak{T}x = \dfrac{r(r - \mathfrak{V}'x)}{\sqrt{(2r\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}}$

Denn es ist im Dreyeck EBG

FE ($=$ BD), BF :: EB, BG.

5) $\mathfrak{T}'x = \dfrac{r\sqrt{(2r\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}}{r - \mathfrak{V}'x}$

Denn im Dreyeck EBH ist

DE, DB :: EB, BH.

6) $\mathfrak{ß}x = \dfrac{r^2}{\sqrt{(2r\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}}$

Denn es ist im Dreyeck EBG

FE ($=$ DB), EB :: EB, EG.

7) $\mathfrak{ß}'x = \dfrac{r^2}{r - \mathfrak{V}'x}$

weil im Dreyeck EBH

DE ($=$ BF), EB :: EB, EH.

§. 55.

Zu mehrerer Bequemlichkeit in den Rechnungen pfleget man, wie schon erinnert worden (§. 45), den Halbmesser des Zirkels zum Maaße oder zur Einheit anzunehmen. In dieser Voraussetzung wird in allen vorhergehenden

Formeln $r = 1$, und gedachte Formeln werden etwas einfacher. Nemlich, man bekömmt folgende Verhältnisse.

I) Wenn $\mathfrak{S}x$ gegeben ist

$$\mathfrak{S}'x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$$

$$\mathfrak{V}x = 1-\mathfrak{S}'x = 1-\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}$$

$$\mathfrak{V}'x = 1-\mathfrak{S}x$$

$$\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{S}x}{\mathfrak{S}'x} = \frac{\mathfrak{S}x}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}$$

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}x} = \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}{\mathfrak{S}x}$$

$$\mathfrak{f}x = \frac{1}{\mathfrak{S}'x} = \frac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}x^2)}}$$

$$\mathfrak{f}x = \frac{1}{\mathfrak{S}x}$$

II) Wenn $\mathfrak{S}'x$ gegeben ist

$$\mathfrak{S}x = \sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}$$

$$\mathfrak{V}x = 1-\mathfrak{S}'x$$

$$\mathfrak{V}'x = 1-\sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}$$

$$\mathfrak{T}x = \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\mathfrak{S}'x}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}}$$

$$\mathfrak{f}x = \frac{1}{\mathfrak{S}'x}$$

$$\mathfrak{f}'x = \frac{1}{\sqrt{(1-\mathfrak{S}'x^2)}}$$

III)

III) Wenn $\mathfrak{T}x$ gegeben ist

$$\mathfrak{T}'x = \frac{1}{\mathfrak{T}x}$$

$$\mathfrak{S}x = \frac{\mathfrak{T}x}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}x^2)}}$$

$$\mathfrak{S}'x = \frac{1}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}x^2)}}$$

$$\mathfrak{V}x = 1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}x^2)}}$$

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \frac{\mathfrak{T}x}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}x^2)}}$$

$$\mathfrak{ß}x = \sqrt{(1+\mathfrak{T}x^2)}$$

$$\mathfrak{ß}'x = \frac{\sqrt{(1+\mathfrak{T}x^2)}}{\mathfrak{T}x}$$

IV) Wenn $\mathfrak{T}'x$ gegeben ist

$$\mathfrak{T}x = \frac{1}{\mathfrak{T}'x}$$

$$\mathfrak{S}x = \frac{1}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}'x^2)}}$$

$$\mathfrak{S}'x = \frac{\mathfrak{T}'x}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}'x^2)}}$$

$$\mathfrak{V}x = 1 - \frac{\mathfrak{T}'x}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}'x^2)}}$$

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}'x^2)}}$$

$$\mathfrak{ß}x = \frac{\sqrt{(1+\mathfrak{T}'x^2)}}{\mathfrak{T}'x}$$

$$\mathfrak{ß}'x = \sqrt{(1+\mathfrak{T}'x^2)}$$

V) Wenn $\mathfrak{F}x$ gegeben ist

$$\mathfrak{F}'x = \frac{\mathfrak{F}x}{\sqrt{(\mathfrak{F}x^2 - 1)}}$$

$$\mathfrak{T}x = \sqrt{(\mathfrak{F}x^2 - 1)}$$

$$\mathfrak{T}'x = \frac{1}{\sqrt{(\mathfrak{F}x^2 - 1)}}$$

$$\mathfrak{S}x = \frac{\sqrt{(\mathfrak{F}x^2 - 1)}}{\mathfrak{F}x}$$

$$\mathfrak{S}'x = \frac{1}{\mathfrak{F}x}$$

$$\mathfrak{V}x = 1 - \frac{1}{\mathfrak{F}x}$$

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \frac{\sqrt{(\mathfrak{F}x^2 - 1)}}{\mathfrak{F}x}$$

VI) Wenn $\mathfrak{F}'x$ gegeben ist

$$\mathfrak{F}x = \frac{\mathfrak{F}'x}{\sqrt{(\mathfrak{F}'x^2 - 1)}}$$

$$\mathfrak{T}x = \frac{1}{\sqrt{(\mathfrak{F}'x^2 - 1)}}$$

$$\mathfrak{T}'x = \sqrt{(\mathfrak{F}'x^2 - 1)}$$

$$\mathfrak{S}x = \frac{1}{\mathfrak{F}'x}$$

$$\mathfrak{S}'x = \frac{\sqrt{(\mathfrak{F}'x^2 - 1)}}{\mathfrak{F}'x}$$

$$\mathfrak{V}x = 1 - \frac{\sqrt{(\mathfrak{F}'x^2 - 1)}}{\mathfrak{F}'x}$$

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \frac{1}{\mathfrak{F}'x} = \frac{\mathfrak{F}'x - 1}{\mathfrak{F}'x}$$

VII) Wenn $\mathfrak{V}x$ gegeben ist

$$\mathfrak{V}'x = 1 - \sqrt{(2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}.$$

$$\mathfrak{S}x = \sqrt{(2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}$$

$$\mathfrak{S}'x = 1 - \mathfrak{V}x$$

$$\mathfrak{T}x = \frac{\sqrt{(2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}}{1 - \mathfrak{V}x}$$

$$\mathfrak{T}'x = \frac{1 - \mathfrak{V}x}{\sqrt{(2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}}$$

$$\mathfrak{ß}x = \frac{1}{1 - \mathfrak{V}x}$$

$$\mathfrak{ß}'x = \frac{1}{\sqrt{(2\mathfrak{V}x - \mathfrak{V}x^2)}}$$

VIII) Wenn $\mathfrak{V}'x$ gegeben ist:

$$\mathfrak{V}x = 1 - \sqrt{(2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}$$

$$\mathfrak{S}x = 1 - \mathfrak{V}'x$$

$$\mathfrak{S}'x = \sqrt{(2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}$$

$$\mathfrak{T}x = \frac{1 - \mathfrak{V}'x}{\sqrt{(2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}}$$

$$\mathfrak{T}'x = \frac{\sqrt{(2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}}{1 - \mathfrak{V}'x}$$

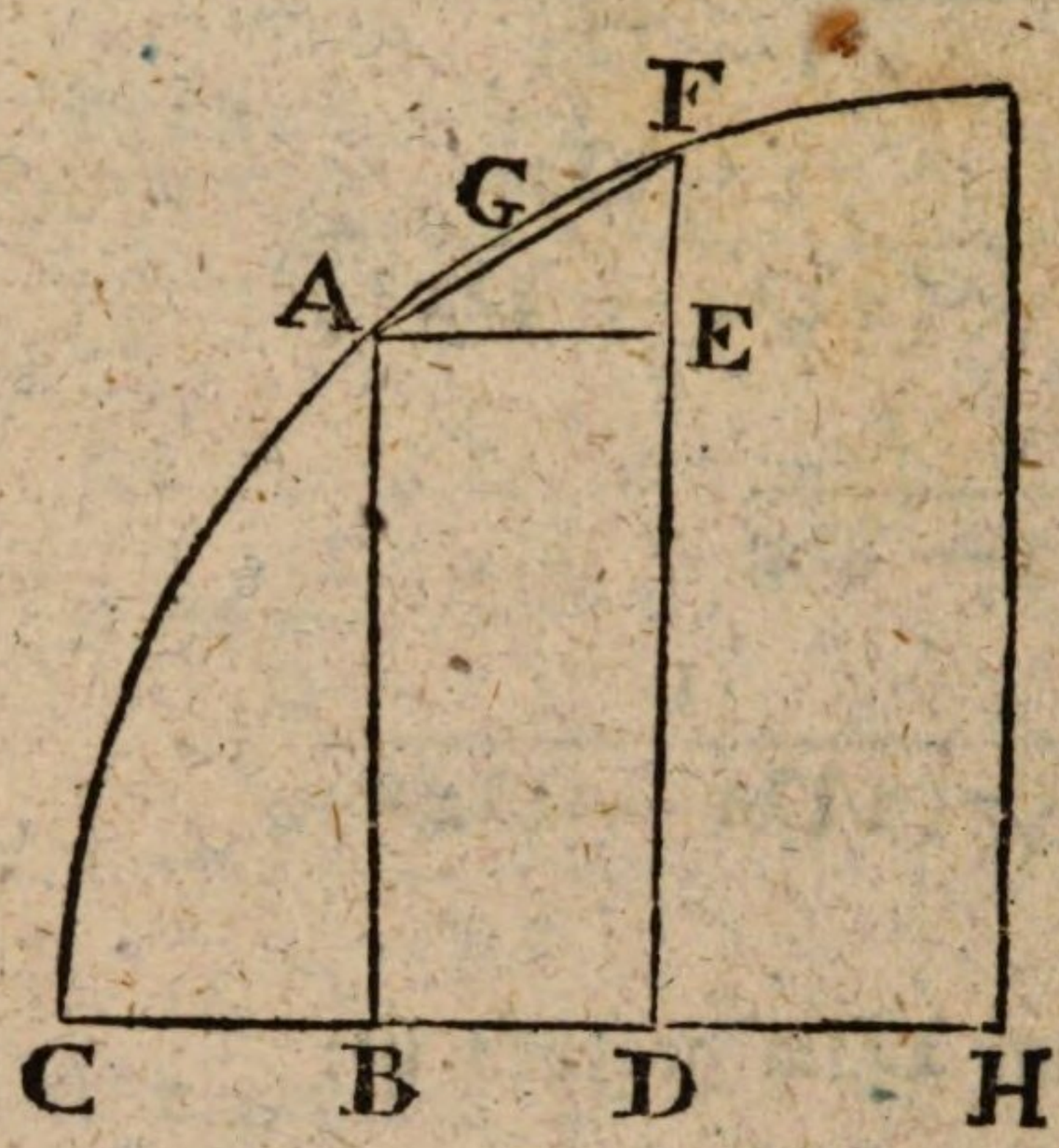
$$\mathfrak{ß}x = \frac{1}{\sqrt{(2\mathfrak{V}'x - \mathfrak{V}'x^2)}}$$

$$\mathfrak{ß}'x = \frac{1}{1 - \mathfrak{V}'x}$$

§. 56.

Aufgabe.

Aus den bekannten Sinus eines Bogens, den Bogen selbst berechnen.



Vorbereitung.

Es sey gegeben der Sinus AB des Bogens AC, und man solle diesen Bogen in einer Funktion seines Sinus ausdrücken, so daß man den Bogen allemal berechnen könne, sobald der Sinus AB nebst dem Halbmesser CH gegeben ist.

Gesetzt der Bogen werde größer, und nehme zu um AGF. Ziehe die Sehne AF, ziehe FD mit AB und AE mit BD oder CH parallel. So hat der Sinus um FE zugenommen, indem der Bogen um *A*GF zugenommen hat. Zugleich ist der Sinusversus um BD oder AE größer geworden.

Es sey der Sinus AB $= y$, der Sinusversus CB $= u$, so ist, wenn man die Zunahme dieser Größen durch das Zeichen Δ ausdrücket, FE $= \Delta y$, AE $(=$ BD$) = \Delta u$.

Nun ist im rechtwinklichen Dreyecke AEF

$$AF = \sqrt{(FE^2 + AE^2)}$$

also $AF = \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta u^2)}$

Je kleiner AE, FE, AF angenommen werden, desto mehr nähert sich die Sehne AF dem Bogen AGF, welcher die Zunahme des Bogens CA ist. Bedienet man sich demnach des Zeichens δ, um die Gränzen der Differenzen anzudeuten, so entstehet aus der letztangeführten Gleichung die folgende:

$$\delta AC = \sqrt{(\delta y^2 + \delta u^2)}$$

oder, weil $AC = \mathfrak{A}\mathfrak{S}y$,

$$\delta\mathfrak{A}\mathfrak{S}y = \sqrt{(\delta y^2 + \delta u^2)}$$

Weil man den Bogen in einer Funktion des Sinus allein haben will, so muß aus dieser Differenzialgleichung des Sinusversus u weggeschaffet worden. Es ist (§. 47).

$$\mathfrak{V}x = r - \sqrt{(r^2 - \mathfrak{S}x^2)}$$

oder im gegenwärtigen Falle, wo $\mathfrak{V}x = u$ und $\mathfrak{S}x = y$,

$$u = r - \sqrt{(r^2 - y^2)} = r - (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Nimmt man die Gränzen der Differenzen, das ist, differenziret man die Gleichung, so wird

$$\delta u = -\tfrac{1}{2}(r^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y\delta y$$

oder $\delta u = -(r^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} y\delta y$

oder $\delta u = \dfrac{-y\delta y}{\sqrt{(r^2 - y^2)}}$

daher $\delta u^2 = \dfrac{+y^2\delta y^2}{r^2 - y^2}$

Setzet

Setzet man diesen Werth von du in die Gleichung $d\mathfrak{AS}y = \sqrt{(dy^2 + du^2)}$ so kömmt

$$d\mathfrak{AS}y = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{y^2\,dy^2}{r^2 - y^2}\right)}$$

$$\text{oder } d\mathfrak{AS}y = \sqrt{\frac{r^2\,dy^2}{r^2 - y^2}}$$

$$\text{oder } d\mathfrak{AS}y = \frac{r\,dy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = (r^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} r\,dy$$

Entwickelt man die Wurzel $(r^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach der Newtonischen Regel in eine unendliche Reihe, und multipliziret solche Reihe mit $r\,dy$, so kömmt

$$d\mathfrak{AS}y = dy + \frac{y^2\,dy}{2r^2} + \frac{3y^4\,dy}{8r^4} + \frac{5y^6\,dy}{16r^6} + \frac{35y^8\,dy}{128r^8} + \text{etc.}$$

Wenn man nun jeden Satz integriret, so kömmt

$$\mathfrak{AS}y = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} + \text{etc.}$$

Wenn y, oder der Sinus, o oder nichts ist, so ist der Bogen auch o. Folglich ist in diesem Falle keine beständige Größe beym Integriren zuzusetzen.

Wenn man bemerket, wie die Zahlen in den Zählern und Nennern eine aus der andern entstehen, so findet man, daß sie folgende Reihen machen.

die Zähler: 1, 1·3, 1·3·5, 1·3·5·7, etc.

die Nenner: 2.3, 2.4.5, 2.4.6.7, 2.4.6.8.9, etc.

Auflösung. Also wird

$$\mathfrak{AS}y = y + \frac{1 \cdot y^3}{2.3r^2} + \frac{1 \cdot 3y^5}{2.4.5.r^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5y^7}{2.4.6.7\,r^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,y^9}{+2.4.6.8.9r^8} + \text{etc.}$$

Diese

Diese Reihe kann leicht so weit fortgesetzt werden als man will.

Wird der Halbmesser zur Einheit angenommen, so ist

$$\text{Asy} = y + \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot y^5}{2.4.5} + \frac{3.5\ y^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7\ y^9}{2.4.6.8.9} + \text{etc.}$$

Wird also y bestimmt, so ist auch der dazu gehörige Bogen bestimmt, und kann ausgerechnet werden, wenn man jeden Satz ausrechnet, und die Sätze addiret.

Anmerkung. Weil der Sinus nie größer werden kann als der Halbmesser, und folglich die Reihe in der letzten Formel meistens kleiner ist als 1, so nehmen die Sätze ziemlich geschwinde ab, so daß man nur einige brauchet, um den Bogen ziemlich genau zu haben.

§. 57.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser des Zirkels mit einem Bogen gegeben ist, der kleiner ist als der Viertelzirkel, den Sinus dieses Bogens finden.

Vorbereitung. Es sey z der Bogen, der zum Sinus y gehöret, so ist, wie bereits gefunden worden,

$$z = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35\ y^9}{1152\ r^8} + \text{etc.}$$

Man nehme an es sey

$$y = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 + \text{etc.}$$

Man setze nun diese Reihe und ihre Potenzen in voriger Gleichung anstatt y und dessen Potenzen. Man vergleiche die Koeffizienten, so wird man finden

$$A = 1$$

$$A = 1$$

$$B = \frac{-1}{6.r^2} = \frac{-1}{1.2.3.r^2}$$

$$C = \frac{+1}{120.r^4} = \frac{+1}{2.3.4.5.r^4}$$

$$D = \frac{-1}{5040.r^6} = \frac{-1}{2.3.4.5.6.7.r^6}$$

$$E = \frac{+1}{362880.r^8} = \frac{+1}{2.3.4.5.6.7.8.9.r^8}$$

$$F = \text{etc.}$$

Daher ist

$$y = \zeta - \frac{\zeta^3}{2.3.r^2} + \frac{\zeta^5}{2.3.4.5.r^4} - \frac{\zeta^7}{2.3.4.5.6.7.r^6} + \text{etc.}$$

Oder, wenn man den Halbmesser $r = 1$ annimmt,

$$y = \zeta - \frac{\zeta^3}{2.3} + \frac{\zeta^5}{2.3.4.5} - \frac{\zeta^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

oder

$$S\zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{2.3} + \frac{\zeta^5}{2.3.4.5} - \frac{\zeta^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

§. 58.

Wenn der Sinus eines Bogens als bekannt angenommen wird, so können die übrigen Linien, die zum Bogen gehören, auch mit leichter Mühe gefunden werden, weil sie alle Funktionen des Sinus sind. Nemlich man bekömmt folgende Reihen, wenn der Halbmesser $= 1$ angenommen wird.

I) $\mathfrak{S}\zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{2.3} + \frac{\zeta^5}{2.3.4.5} - \frac{\zeta^7}{2.3.4.5.6.7}$ + etc.

II) $\mathfrak{S}'\zeta = \sqrt{(1 - \mathfrak{S}\zeta^2)} = 1 - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4} - \frac{\zeta^6}{2.3.4.5.6}$ + etc.

Hier muß man anfänglich annehmen

$$\sqrt{(1 - \mathfrak{S}\zeta^2)} = A + B\zeta^2 + C\zeta^4 + D\zeta^6 + E\zeta^8 + \text{etc.}$$

Man quadriret beyderseits, seßet im ersten Gliede anstatt $\mathfrak{S}\zeta^2$ das Quadrat der Reihe $\zeta - \frac{\zeta^3}{2.3}$ + etc. welche $\mathfrak{S}\zeta$ ausdrücket, und vergleiche die Koeffizienten, so findet man die Reihe welche $\mathfrak{S}'x$ ausdrücket.

III) $\mathfrak{T}\zeta = \frac{\mathfrak{S}\zeta}{\mathfrak{S}'\zeta} = \frac{\zeta - \frac{\zeta^3}{2.3} + \frac{\zeta^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}}{1 - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4} - \text{etc.}}$

IV) $\mathfrak{T}'\zeta = \frac{\mathfrak{S}'\zeta}{\mathfrak{S}\zeta} = \frac{1 - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4} - \text{etc.}}{\zeta - \frac{\zeta^3}{2.3} + \frac{\zeta^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}}$

V) $\mathfrak{B}\zeta = \frac{1}{\mathfrak{S}'\zeta} = \frac{1}{1 - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4} - \text{etc.}}$

VI) $\mathfrak{B}'\zeta = \frac{1}{\mathfrak{S}\zeta} = \frac{1}{\zeta - \frac{\zeta^3}{2.3} + \frac{\zeta^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}}$

VII)

VII) $\mathfrak{V}\zeta = 1 - \mathfrak{S}'\zeta = \zeta^2 - \frac{\zeta^4}{2.3.4} + \frac{\zeta^6}{2.3.4.5.6}$ etc.

VIII) $\mathfrak{V}'\zeta = 1 - \mathfrak{S}\zeta = 1 - \zeta + \frac{\zeta^4}{2.3} - \frac{\zeta^5}{2.3.4.5} +$ etc.

§. 59.

Weil wir den Bogen durch eine Funktion des Sinus auszudrücken wissen, so können wir ihn auch durch eine Funktion jeder anderen Linie ausdrücken, die den Bogen bestimmt, weil der Sinus eine Funktion aller dieser Linien ist.

I) Wir haben gefunden, wenn $r = 1$,

$$\mathfrak{AS}y = y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

II) Wenn y der Kosinus ist, so wird der Sinus $= \sqrt{(1-y^2)}$, folglich der Bogen dieses Sinus oder des Kosinus y.

$$\mathfrak{AS}'y = (1-y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{2.3} + \frac{3.(1-y^2)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5} + \text{etc.}$$

oder

$$\mathfrak{AS}'y = (1-y^2)^{\frac{1}{2}}.\left(1 + \frac{(1-y^2)}{2.3} + \frac{3.(1-y^2)^2}{2.4.5} + \text{etc.}\right)$$

III) Wenn y die Tangente ist, so wird der Sinus $= \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}$, hiervon ist der Bogen

$$\mathfrak{AC}y = \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^3}{2.3(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3y^5}{2.4.5(1+y^2)^{\frac{5}{2}}} + \text{etc.}$$

oder

oder

$$\mathfrak{A}Ty = \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{y^2}{2.3(1+y^2)}+\frac{3.y^4}{2.4.5(1+y^2}\right.$$
$$\left.+\text{ etc.}\right)$$

IV) Es sey y die Kotangente, so wird der Sinus $= \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}$, und der Bogen

$$\mathfrak{A}T'y = \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2.3(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2.4.5\,(1+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$+\text{ etc.}$$

oder

$$\mathfrak{A}T'y = \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}.\left(1+\frac{1}{2.3.(1+y^2)}+\frac{3}{2.4.5(3+y^2)^2}\right.$$
$$\left.+\text{ etc.}\right)$$

V) Es sey y die Sekante, so wird der Sinus $\frac{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}{y}$ und der Bogen

$$\mathfrak{A}\beta y = \frac{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}{y}+\frac{(y^2-1)^{\frac{3}{2}}}{2.3.y^3}+\frac{3\,(y^2-1)^{\frac{5}{2}}}{2.4.5.y^5}$$
$$+\frac{3.5\,(y^2-1)^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.7\,y^7}+\text{ etc.}$$

oder

$$\mathfrak{A}\beta y = \frac{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}{y}.\left(1+\frac{(y^2-1)}{2.3.y^2}+\frac{3(y^2-1)^2}{2.4.5.y^4}+\text{etc.}\right)$$

VI) Es sey y die Kosekante, so wird der Sinus $\frac{1}{y}$, und folglich der Bogen

$$\mathfrak{A}\beta' y = \frac{1}{y}+\frac{1}{2.3.y^3}+\frac{3}{2.4.5.y^5}+\frac{3.5}{2.4.6.7.y^7}+\text{etc.}$$

VII) Es sey y der Sinusversus, so wird der Sinus $(2y - y^2)^{\frac{1}{2}}$, und der Bogen

$$\mathfrak{AB}y = (2y - y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(2y-y^2)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot 3} + \frac{3(2y - y^2)^{\frac{5}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}$$

oder

$$\mathfrak{AB}y = (2y - y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + \frac{(2y-y^2)}{2 \cdot 3} + \frac{3(2y-y^2)^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.})$$

VIII) Es sey y der Kosinusversus, so wird der Sinus $= 1 - y$, und der Bogen

$$\mathfrak{AB}'y = (1-y) + \frac{(1-y)^3}{2 \cdot 3} + \frac{3(1-y)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.}$$

§. 60.

Aufgabe.

Die Differenzialverhältnisse der trigonometrischen Linien finden.

Auflösung. Die verlangten Verhältnisse sind in folgenden Formeln enthalten, wo der Halbmesser $= 1$ angenommen wird.

I) $\delta \mathfrak{S}z = \delta z \cdot \mathfrak{S}'z$.

II) $\delta \mathfrak{S}'z = -\delta z \cdot \mathfrak{S}z$.

III) $\delta \mathfrak{T}z = \frac{\delta z}{\mathfrak{S}'z^2}$

IV)

IV) $\delta \mathfrak{T}' z = \frac{-\delta z}{\mathfrak{S} z^2}$

V) $\delta \mathfrak{k} z = \frac{\delta z \cdot \mathfrak{S} z}{\mathfrak{S}' z^2} = \frac{\delta z \cdot \mathfrak{T} z}{\mathfrak{S}' z}$

VI) $\delta \mathfrak{k}' z = \frac{-\delta z \cdot \mathfrak{S}' z}{\mathfrak{S} z^2} = \frac{-\delta z \cdot \mathfrak{T}' z}{\mathfrak{S} z}$

VII) $\delta \mathfrak{V} z = \delta z \cdot \mathfrak{S} z$

VIII) $\delta \mathfrak{V}' z = -\delta z \cdot \mathfrak{S}' z$

IX) $\delta \mathfrak{A} \mathfrak{S} z = \frac{\delta z}{\sqrt{(1 - z^2)}}$

X) $\delta \mathfrak{A} \mathfrak{S}' z = \frac{-\delta z}{\sqrt{(1 - z^2)}}$

XI) $\delta \mathfrak{A} \mathfrak{T} z = \frac{\delta z}{1 + z^2}$

XII) $\delta \mathfrak{A} \mathfrak{T}' z = \frac{-\delta z}{1 + z^2}$

XIII) $\delta \mathfrak{A} \mathfrak{k} z = \frac{\delta z}{z\sqrt{(z^2 - 1)}}$

XIV) $\delta \mathfrak{A} \mathfrak{k}' z = \frac{-\delta z}{z\sqrt{(z^2 - 1)}}$

XV) $\delta \mathfrak{A} \mathfrak{V} z = \frac{\delta z}{\sqrt{(2z - z^2)}}$

XVI) $\delta \mathfrak{A} \mathfrak{V}' z = \frac{-\delta z}{\sqrt{(2z - z^2)}}$

Beweis der Formeln.

I.

Man differenzire die Reihe die den Sinus ausdrückt, nemlich

$$Sz = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

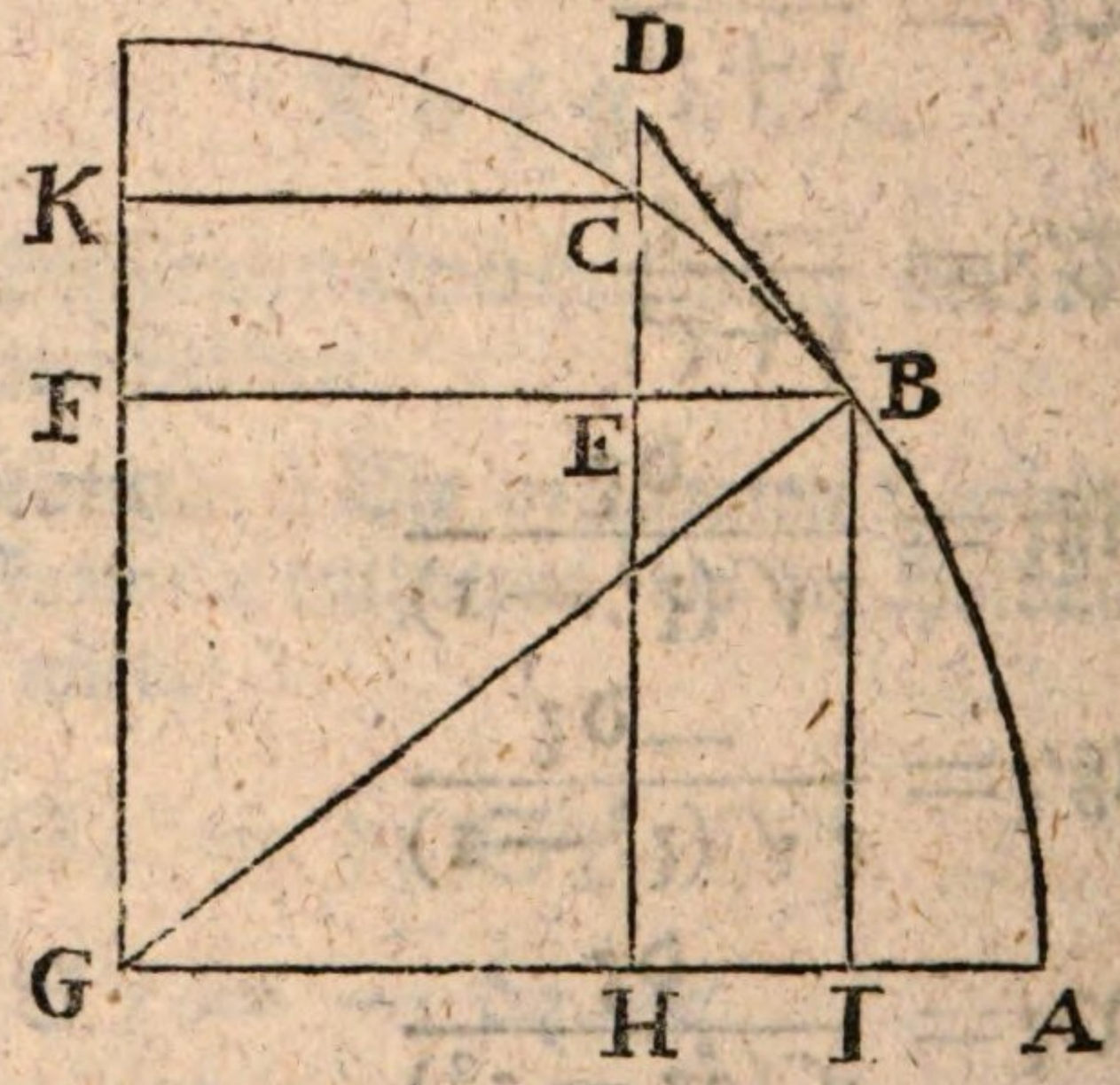
so kömmt

$$dSz = dz\,(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.})$$

oder, weil die Reihe, womit dz multipliziret ist, den Kosinus von z ausdrücket,

$$dSz = dz.\,S'z.$$

Diese erste Formel kann auch geometrisch bewiesen werden.



Es sey AB (= z) ein beliebiger Zirkelbogen. Dieser nehme zu um BC. Der Sinus von AB ist BI. Der Sinus von ABC ist CH. Der Unterschied ist CE.

Ziehe

Ziehe den Halbmesser GB, und BD senkrecht auf demselben. Verlängere HC in CD, so daß HD und BD einander schneiden in D.

So sind beyde Dreyecke GBF und BDE ähnlich, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht stehen (IV §. 10.). Es ist demnach GB zu *B*F, wie BD (senkrecht auf GB), zu DE (senkrecht auf BF), oder kurz, es ist

$$GB, BF :: BD, DF.$$

Nun ist GB der Halbmesser (= R), BF ist der Kosinus des Bogens AB (= z). Folglich ist

$$R, S'z :: BD, DE.$$

Je kleiner nun der Zuwachs BC angenommen wird, desto mehr nähert sich BD der BC, und DE der EC. Setzet man demnach in voriger Proporzion die Gränzen der veränderlichen Größen BD und DE, das ist, dz und dSz, so hat man

$$R, S'z :: dz, dSz$$

oder, wenn der Halbmesser = 1 ist,

$$1, S'z :: dz, dSz$$

daher ist $dSz = dz . S'z$

Diese Formel wird demnach desto genauer eintreffen, je kleiner BC angenommen wird.

II.

Man differenzire die unendliche Reihe, die den Kosinus von z ausdrücket, nemlich

$$S'z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

so kömmt

$$dS'z = -dz\left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)$$

oder, weil die Reihe, womit — dz multipliziret ist, den Sinus von z ausdrücket

$$dS'z = -dz.Sz.$$

Oder, man betrachte wiederum die vorhergehende Figur, so sind beyde Dreyecke BGI und BDE ähnlich, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht stehen (IV.§.10.). Also verhält GB zu BI, wie BD (senkrecht auf GB), zu BE (senkrecht auf BI); kurz es ist

GB, BI :: BD, BE

oder R, Sz :: BD, BE

Je kleiner nun der Zuwachs BC des Bogens angenommen wird, desto mehr nähert sich BD der BC oder der Differenz des Bogens *AB*. Hingegen bleibt allemal BE die Differenz des Kosinus. Denn es ist BF der Kosinus des Bogens AB, KC der Kosinus des vergrößerten Bogens ABC. Der Unterschied ist BE. Setzet man nun in der gefundenen Proporzion anstatt BD deren Gränze BC oder dz, so wird

R, Sz :: dz, dS'z

oder, wenn R = 1 ist

1, Sz :: dz, dS'z

daher ist $dS'z = dz.Sz$.

Wenn aber der Kosinus zunimmt, so nimmt der Bogen ab, folglich muß das Differenzial des Kosinus negativ genommen werden: es ist demnach

$$dS'z = -dz.Sz$$

III.

Weil $Tz = \frac{Sz}{S'z}$

so

so ist $\delta T_z = \frac{S'z \cdot \delta S_z - S_z \delta S_z}{S'z^2}$.

Setzet man nun $\delta z\, S'z$ anstatt δS_z, und $-\delta z\, S_z$ anstatt δS_z, so wird

$$\delta T_z = \frac{\delta z S'z^2 + \delta z . S_z^2}{S'z^2} = \frac{(S'z^2 + S_z^2)\delta z}{S'z^2}$$

Da nun das Quadrat des Kosinus nebst dem Quadrate des Sinus, dem Quadrate des Halbmessers gleich ist, so ist $S'z^2 + S_z^2 = R^2$, oder wenn der Halbmesser $= 1$, so ist $S'z^2 + S_z^2 = 1$, also wird

$$\delta T_z = \frac{1 . \delta z}{S'z^2} = \frac{\delta z}{S'z^2}$$

IV.

Weil $T'_z = \frac{S'z}{S_z}$

so ist $\delta T'z = \frac{S_z . \delta S'z - S'z . \delta S_z}{S_z^2}$

Setzet man $-\delta z\, S_z$ anstatt $\delta S'z$ und $d_z S'z$ anstatt δS_z, so wird

$$\delta T'z = \frac{-S_z^2 . \delta z - S'z^2 \delta z}{S_z^2} = \frac{-(S_z^2 + S'z)\delta z}{S_z^2}$$

und da $S_z^2 + S'z^2 = 1$, wie bey voriger Formel, so ist

$$\delta T_z = \frac{-\delta z}{S_z^2}$$

V.

$$\text{Weil } \beta z = \frac{1}{S'z}$$

$$\text{so ist } d\beta z = \frac{-dS'z}{S'z^2}$$

Man setze $-d_z S z$ anstatt $dS'z$, so wird

$$d\beta z = \frac{+d_z . Sz}{S'z^2} = \frac{d_z . Tz}{S'z}$$

VI.

$$\text{Weil } \beta' z = \frac{1}{Sz}$$

$$\text{so ist } d\beta' z = \frac{-dSz}{Sz^2} = \frac{-d_z . S'z}{Sz^2} = \frac{-d_z T'z}{Sz}$$

VII.

$$\text{Weil } Vz = 1 - S'z$$

$$\text{so ist } dVz = -dS'z$$

$$\text{und weil } dS'z = -d_z Sz,$$

$$\text{so wird } dVz = d_z Sz$$

VIII.

$$\text{Weil } V'z = 1 - Sz$$

$$\text{so ist } dV'z = -dSz$$

$$\text{und weil } dSz = d_z . S'z,$$

$$\text{so ist } dV'z = -d_z . S'z$$

IX.

Es ist vermöge der ersten Formel

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}\zeta = \mathfrak{d}\zeta . \mathfrak{S}'\zeta$$

$$\text{daher } \mathfrak{d}\zeta = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{S}\zeta}{\mathfrak{S}'\zeta}$$

Es sey $\mathfrak{S}\zeta = u$, so ist $\zeta = \mathfrak{A}\mathfrak{S}u$, es ist auch $\mathfrak{S}'\zeta = \sqrt{(1-\mathfrak{S}\zeta^2)} = \sqrt{(1-u^2)}$. Deswegen wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{S}u = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

X.

Es ist, vermöge der zweyten Formel,

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}'\zeta = -\mathfrak{d}\zeta . \mathfrak{S}\zeta$$

$$\text{daher } \mathfrak{d}\zeta = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{S}'\zeta}{\mathfrak{S}\zeta}$$

Wenn $\mathfrak{S}'\zeta = u$, so ist $\zeta = \mathfrak{A}\mathfrak{S}'u$ und $\mathfrak{S}\zeta = \sqrt{(1-\mathfrak{S}'\zeta^2)} = \sqrt{(1-u^2)}$. Also wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{S}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

XI.

Vermöge der dritten Formel ist

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}\zeta = \frac{\mathfrak{d}\zeta}{\mathfrak{S}'\zeta^2}$$

$$\text{folglich } \mathfrak{d}\zeta = \mathfrak{S}'\zeta^2 . \mathfrak{d}\mathfrak{T}\zeta .$$

$$\text{Es ist aber } \mathfrak{S}'\zeta = \frac{1}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}\zeta^2)}}$$

$$\text{folglich } \mathfrak{S}'\zeta^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{T}\zeta^2}$$

Setzet man diesen Werth von $\mathfrak{S}'z^2$ in die Gleichung $\mathfrak{d}z = \mathfrak{S}'z^2 . \mathfrak{d}\mathfrak{T}z$, so kömt

$$\mathfrak{d}z = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{T}z}{1+\mathfrak{T}z^2}$$

Es sey $\mathfrak{T}z = u$, so ist $z = \mathfrak{A}\mathfrak{T}u$, folglich

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{T}u = \frac{\mathfrak{d}u}{1+u^2}$$

XII.

Es ist aus der vierten Formel

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}'z = \frac{-\mathfrak{d}z}{\mathfrak{S}z^2}$$

daher $\mathfrak{d}z = -\mathfrak{S}z^2 . \mathfrak{d}\mathfrak{T}'z$

Nun ist $\mathfrak{S}z = \frac{1}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}'z^2)}}$

folglich $\mathfrak{S}z^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{T}'z^2}$

Setzet man diesen Werth von $\mathfrak{S}z^2$ in die Gleichnng $\mathfrak{d}z = -\mathfrak{S}z^2 . \mathfrak{d}\mathfrak{T}'z$

so wird $\mathfrak{d}z = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{T}'z}{1+\mathfrak{T}'z^2}$

Es sey $\mathfrak{T}'z = u$, so ist $z = \mathfrak{A}\mathfrak{T}'z$, und es wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{T}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{1+u^2}$$

XIII.

Es ist aus der fünften Formel

$$\mathfrak{d}\mathfrak{Z}z = \frac{\mathfrak{d}z . \mathfrak{S}z}{\mathfrak{S}'z^2}$$

Nun

Nun ist $\mathfrak{S}z = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B}z^2 - 1)}}{\mathfrak{B}z}$

und $\mathfrak{S}'z = \frac{1}{\mathfrak{B}z}$

folgl. ist $\mathfrak{S}'z^2 = \frac{1}{\mathfrak{B}z^2}$

Also wird $\frac{\mathfrak{S}z}{\mathfrak{S}'z^2} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B}z^2 - 1)}}{\mathfrak{B}z} : \frac{1}{\mathfrak{B}z^2}$

oder $\frac{\mathfrak{S}z}{\mathfrak{S}'z^2} = \mathfrak{B}z \cdot \sqrt{(\mathfrak{B}^2 - 1)}$

Setzet man diesen Werth in die Gleichung

$$\partial \mathfrak{B}z = \frac{\partial z \cdot \mathfrak{S}z}{\mathfrak{S}'z^2}$$

so wird $\partial \mathfrak{B}z = \partial z \cdot \mathfrak{B}z \cdot \sqrt{(\mathfrak{B}z^2 - 1)}$

daher ist $\partial z = \frac{\partial \mathfrak{B}z}{\mathfrak{B}z \cdot \sqrt{(\mathfrak{B}z^2 - 1)}}$

Es sey nun $\mathfrak{B}z = u$, so wird $z = \mathfrak{A}\mathfrak{B}u$, und folglich

$$\partial \mathfrak{A}\mathfrak{B}u = \frac{\partial u}{u\sqrt{(u^2 - 1)}}$$

XIV.

Es ist aus der sechsten Formel

$$\partial \mathfrak{B}'z = \frac{-\partial z \cdot \mathfrak{S}'z}{\mathfrak{S}z^2}$$

Nun ist $\mathfrak{S}'z = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B}'z^2 - 1)}}{\mathfrak{B}'z}$

und

und $$\mathfrak{S}\zeta = \frac{1}{\mathfrak{B}'\zeta}$$

oder $$\mathfrak{S}\zeta^2 = \frac{1}{\mathfrak{B}'\zeta^2}$$

daher ist $$\frac{\mathfrak{S}'\zeta}{\mathfrak{S}\zeta^2} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{B}'\zeta^2 - 1)}}{\mathfrak{B}'\zeta} : \frac{1}{\mathfrak{B}'\zeta^2}$$

oder $$\frac{\mathfrak{S}'^2}{\mathfrak{S}'^2} = \mathfrak{B}'\zeta \cdot \sqrt{(\mathfrak{B}'\zeta^2 - 1)}$$

Setzet man diesen Werth in die Gleichung

$$\mathfrak{d}\mathfrak{B}'\zeta = \frac{-\mathfrak{d}\zeta \cdot \mathfrak{S}'\zeta}{\mathfrak{S}\zeta^2}$$

so ist $$\mathfrak{d}\mathfrak{B}'\zeta = -\mathfrak{d}\zeta \cdot \mathfrak{B}'\zeta \cdot \sqrt{(\mathfrak{B}'\zeta^2 - 1)}$$

folglich $$\mathfrak{d}\zeta = \frac{-\mathfrak{d}\mathfrak{B}'\zeta}{\mathfrak{B}'\zeta \cdot \sqrt{(\mathfrak{B}\zeta^2 - 1)}}$$

Es sey nun $\mathfrak{B}'\zeta = u$, so ist $\zeta = \mathfrak{A}\mathfrak{B}'u$, folglich

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{B}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{u\sqrt{(u^2 - 1)}}$$

XV.

Es ist aus der siebenten Formel

$$\mathfrak{d}\mathfrak{V}\zeta = \mathfrak{d}\zeta\mathfrak{S}\zeta$$

nun ist $$\mathfrak{S}\zeta = \sqrt{(2\mathfrak{V}\zeta - \mathfrak{V}\zeta^2)}$$

also ist $$\mathfrak{d}\mathfrak{V}\zeta = \mathfrak{d}\zeta \cdot \sqrt{(2\mathfrak{V}\zeta - \mathfrak{V}\zeta^2)}$$

und $$\mathfrak{d}\zeta = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{V}\zeta}{\sqrt{(2\mathfrak{V}\zeta - \mathfrak{V}\zeta^2)}}$$

Es sey $\mathfrak{V}\zeta = u$, so ist $\zeta = \mathfrak{A}\mathfrak{V}u$, folglich

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{V}u = \frac{\mathfrak{d}u}{\sqrt{(2u - u^2)}}$$

XVI.

Es ist, vermöge der achten Formel,

$$\mathfrak{d}\mathfrak{V}'z = -\mathfrak{d}z\mathfrak{S}'z$$

nun ist $\mathfrak{S}'z = \sqrt{(2\mathfrak{V}'z - \mathfrak{V}'z^2)}$

also $\mathfrak{d}\mathfrak{V}'z = -\mathfrak{d}z.\sqrt{(2\mathfrak{V}'z - \mathfrak{V}'z^2)}$

und $$\mathfrak{d}z = -\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{V}'z}{\sqrt{(2\mathfrak{V}'z - \mathfrak{V}'z^2)}}$$

Wenn nun $\mathfrak{V}'z = u$, so ist $z = \mathfrak{A}\mathfrak{V}'u$, folglich

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{V}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{\sqrt{(2u - u^2)}}$$

§. 61.

Wenn man die acht letzten Formeln durch unendliche Reihen integriret, so bekömmt man den Bogen wiederum in Funkzionen der Linien die ihn bestimmen.

Die 9te Formel ist die nemliche, die wir schon oben integriret haben (§. 56.).

Wir wollen nur noch die 11te zum Beyspiel nehmen, weil sie sehr leicht ist. Es soll also integriret werden

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{T}z = \frac{\mathfrak{d}z}{1+z^2} = \frac{1}{1+z^2}\,\mathfrak{d}z$$

Man kann $\frac{1}{1+z^2}$ durch unbestimmte Koeffizienten entwickeln. Es sey

$$\frac{1}{1+z^2} = A + Bz^2 + Cz^4 + Dz^6 + Ez^8 + \text{etc.}$$

multiplizire beyderseits mit $1+z^2$, und vergleiche die Koeffizienten, so kömmt

$$A = +1$$
$$B = -1$$
$$C = +1$$
$$D = -1$$
$$E = +1$$
$$F = \text{etc.}$$

Folglich ist

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \text{etc.}$$

und $$\frac{dz}{1+z^2} = dz - z^2 dz + z^4 dz - z^6 dz + z^8 dz - z^{10} dz + \text{etc.}$$

Wenn man beyderseits integriret, so kömmt

$$\mathfrak{AT}z = \int \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + \text{etc.}$$

oder $$\mathfrak{AT}z = z + \frac{z^5}{5} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{13}}{13} + \text{etc.} - \left(\frac{z^3}{3} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^{11}}{11} + \text{etc.}\right)$$

Dieses ist also ein anderer Ausdruck für den Bogen, der zur Tangente gehöret, als den wir oben (§. 59.) gefunden haben.

§. 62.

§. 62.

Aufgabe.

Wenn der Sinus um eine gewisse Größe zunimmt, finden, um wie viel der Bogen zunimmt.

Auflösung. Es sey $z = \text{Asin}\, x$. Weil z eine Funkzion von x ist, so ist

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

eine Formel, in welcher ∂x als beständig betrachtet wird.

Es ist aber $\partial z = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \partial x.$

Differenziret man nach und nach, so findet man

$$\partial z = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \partial x \text{ oder } \frac{\partial z}{\partial x} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\partial^2 z = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \partial x^2 \text{ oder } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\partial^3 z = (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} \partial x^3 \text{ od. } \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\partial^4 z = (9x+6x^3)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} \partial x^4 \text{ od. } \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = (9x+6x^3)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}$$

etc. etc.

Wenn man diese Werthe von von $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, u. s. f. in obige Formel setzet, so kömmt

$$\Delta z (= \Delta \text{Asin}\, x) = \frac{\Delta x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x \Delta x^2}{2.(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{(1+2x^2)\Delta x^3}{2.3.(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(9x+6x^3)\Delta x^4}{2.3.4(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.}$$

oder

oder, weil $x = \mathfrak{S}\zeta$ und $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{S}'\zeta$, so ist

$$\Delta\mathfrak{A}\mathfrak{S}\zeta = \frac{\Delta\mathfrak{S}\zeta}{\mathfrak{S}'\zeta} + \frac{\mathfrak{S}\zeta.(\Delta\mathfrak{S}\zeta)^2}{2.\mathfrak{S}'\zeta^3} + \frac{(1+2\mathfrak{S}\zeta^2)(\Delta\mathfrak{S}\zeta)^3}{2.3\,\mathfrak{S}'\zeta^5}$$
$$+ \frac{(9\mathfrak{S}\zeta+6\mathfrak{S}\zeta^3)(\Delta\mathfrak{S}\zeta)^4}{2.\ 3.\ 4\ \ \mathfrak{S}'\zeta^7} + \text{etc.}$$

§. 63.

Aufgabe.

Wenn der Kosinus um eine gewisse Größe zunimmt, so soll man finden, um wie viel der Bogen abnimmt.

Auflösung. Es sey $\zeta = \mathfrak{A}\mathfrak{S}'x$, so ist $\partial\zeta = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x$ (§. 60.). Wenn man nun fortfährt zu differenziren, und ∂x als beständig behandelt, so wird

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = -x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2} = -(1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4} = -(9x+6x^3)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}$$

etc. etc.

Setzet man diese Werthe in die Formel

$$\Delta\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}.\frac{\Delta x^2}{1,2} + \frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}.\frac{\Delta x^3}{1,2,3} + \text{etc.}$$

so

so kömmt

$$\Delta\zeta = -\left(\frac{\Delta x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x\,\Delta x^2}{1.2\,(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(1+2x^2)\Delta x^3}{1.2.3\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \text{etc.}\right)$$

Oder, weil $x = \mathfrak{S}'\zeta$ und folglich $(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{S}x$, so ist

$$\Delta\mathfrak{A}\mathfrak{S}'x = -\frac{\Delta\mathfrak{S}'\zeta}{\mathfrak{S}\zeta} + \frac{\mathfrak{S}'\zeta\,\Delta\mathfrak{S}'\zeta^2}{1.2.\mathfrak{S}\zeta^3} + \frac{(1+2\mathfrak{S}'\zeta^2)\Delta\mathfrak{S}'\zeta^3}{1.2.3\,\mathfrak{S}\zeta^5} + \text{etc.}$$

Anmerkung. Auf eine ähnliche Art kann man finden, um wie viel der Bogen zunimmt oder abnimmt, wenn die Tangente, Kotangente u. s. f. um eine gewisse Quantität zunimmt.

§. 64.

Aufgabe.

Wenn der Bogen um eine gewisse Quantität zunimmt oder abnimmt, so soll gefunden werden, um wie viel der Sinus oder Kosinus zunimmt oder abnimmt.

Auflösung. Es sey $y = \mathfrak{S}\zeta$, so hat man überhaupt

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial\zeta}\cdot\frac{\Delta\zeta}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial\zeta^2}\cdot\frac{\Delta\zeta^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial\zeta^3}\cdot\frac{\Delta\zeta^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Wenn nun $y = \mathfrak{S}\zeta$, so bekömmt man, wenn ∂x beständig ist,

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \mathfrak{S}'z$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\mathfrak{S}z$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} = -\mathfrak{S}'z$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \mathfrak{S}z$$

Folglich ist

$$\Delta y \text{ oder } \Delta \mathfrak{S}z = \Delta z \cdot \mathfrak{S}'z - \frac{\Delta z^2 \cdot \mathfrak{S}z}{1.2} - \frac{\Delta z^3 \mathfrak{S}'z}{1.2.3} + \frac{\Delta x^4 \cdot \mathfrak{S}z}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Weil Δz auch negativ seyn kann, so bekömmt man

$$\Delta \mathfrak{S}z = \pm \Delta z \mathfrak{S}'z - \frac{\Delta x^2 \mathfrak{S}z}{1.2} \mp \frac{\Delta z^3 \mathfrak{S}'z}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Es ist aber $\Delta \mathfrak{S}z = \mathfrak{S}(z + \Delta z) - \mathfrak{S}z$, also ist

$$\mathfrak{S}(z \pm \Delta z) - \mathfrak{S}z = \pm \Delta z \mathfrak{S}'z - \frac{\Delta z^2 \mathfrak{S}z}{1.2} \mp \text{etc.}$$

also wird

$$\mathfrak{S}(z \pm \Delta z) = \mathfrak{S}z \pm \Delta z \mathfrak{S}'z - \frac{\Delta z^2 \mathfrak{S}z}{1.2} \mp \frac{\Delta z^3 \mathfrak{S}'z}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Vermittelst einer ähnlichen Rechnung findet man

$$\mathfrak{S}'(z \pm \Delta z) = \mathfrak{S}'z \mp \Delta z \mathfrak{S}z - \frac{\Delta z^2 \mathfrak{S}'z}{1.2} \pm \text{etc.}$$

§. 65.

§. 65.

Wenn zwey Bogen gegeben sind, den Sinus oder Kosinus ihrer Summe oder ihrer Differenz finden.

Vorbereitung. In den Formeln des vorigen Paragraphs setze man $x + z$ anstatt $z + \Delta z$, so ist

$$S(x \pm z) = Sx \pm z S'x - \frac{z^2}{1.2} Sx \mp \frac{z^3}{1.2.3} S'x + \frac{z^4}{1.2.3.4} Sx \text{ etc.}$$

$$S'(x \pm z) = S'x \mp z Sx - \frac{z^2}{1.2} S'x \pm \frac{z^3}{1.2.3} Sx + \frac{z^4}{1.2.3.4} S'x \text{ etc.}$$

Sammlet man in der ersten Formel die Sätze, die mit Sx und die $S'x$ multiplizirt sind, so wird

$$S(x \pm z) = Sx\left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right) \pm S'x\left(z - \frac{z^3}{1.2.3} \mp \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)$$

Es ist aber $1 - \frac{z^2}{1.2} + \text{etc.} = S'x$

und es ist $z - \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.} = Sx$

Folglich wird

$$S(x \pm z) = Sx \cdot S'z \pm S'x Sz$$

Die andere Formel, welche $S'(x \pm z)$ ausdrücket, kann auch also geschrieben werden

$$S'(x \pm z) = S'x\left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}\right)$$
$$\mp Sx\left(z - \frac{z^3}{1.23} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)$$

Folglich ist

$$S(x \pm z) = S'x\,S'z \mp Sx\,Sz$$

Auflösung. Um also alles kurz zusammen zu fassen, so ist

$$S(x \pm z) = Sx.S'z \pm S'x.Sz$$
$$S'(x \pm z) = S'x.S'z \mp Sx\,Sz.$$

§. 66.

Aufgabe.

Wenn der Sinus oder Kosinus eines Bogens bekannt ist, den Sinus oder Kosinus des doppelten, dreifachen, vierfachen, u. s. f. Bogens finden.

Auflösung. Es ist eben jetzt bewiesen worden, daß

$$S(x + z) = Sx.S'z + S'x.Sz$$

In dieser Formel setze man $z = x$, so wird

$$S(2x) = 2Sx.S'x$$

Es ist ebenfalls bewiesen worden, daß

$$S'(x + z) = S'x.S'z - Sx.Sz$$

Man setze $z = x$, so wird

$$S'(2x) = S'x^2 - Sx^2$$

Diese

Diese Formel kann noch einfacher gemacht werden. Denn da $\mathfrak{S}x = \sqrt{(1 - \mathfrak{S}'x^2)}$, so ist $\mathfrak{S}x^2 = 1 - \mathfrak{S}'x^2$, folglich $-\mathfrak{S}x^2 = \mathfrak{S}'x^2 - 1$, und also wird

$$\mathfrak{S}'(2x) = 2\mathfrak{S}'x^2 - 1$$

Wenn man in den Formeln, die den Sinus und den Kosinus von $x + z$ ausdrücken, $2x$ anstatt z setzet, so wird man die Formeln für den Sinus und den Kosinus des dreyfachen Bogens finden. Nemlich in der Gleichung $\mathfrak{S}(x+z) = \mathfrak{S}x\mathfrak{S}'z + \mathfrak{S}z.\mathfrak{S}'x$ setze $2x$ anstatt z, so kömmt

$$\mathfrak{S}(3x) = \mathfrak{S}x.\mathfrak{S}'2x + \mathfrak{S}2x.\mathfrak{S}'x$$

Man schreibe anstatt $\mathfrak{S}'2x$ und $\mathfrak{S}2x$ die vorher gefundenen Werthe, so bekömmt man

$$\mathfrak{S}3x = (4\mathfrak{S}'x^2 - 1)\mathfrak{S}x$$

Vermittelst einer ähnlichen Substituzion findet man

$$\mathfrak{S}'3x = 4\mathfrak{S}'x^3 - 3\mathfrak{S}'x$$

In der Formel für den Sinus und den Kosinus von $x+z$, setze man jetzt $3x$ anstatt z, und die gefundenen Werthe von $\mathfrak{S}3x$, $\mathfrak{S}'3x$, so entstehet der Sinus und der Kosinus von $4x$.

Wenn man auf diese Art weiter fortgehet, so bekömmt man folgende Formeln.

Auflösung. Für den Sinus des doppelten, dreyfachen, u. s. f. Bogens ist

$$\mathfrak{S}x = \mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}2x = 2\mathfrak{S}'x.\mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}3x = (4\mathfrak{S}'x^2 - 1)\mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}4x = (8\mathfrak{S}'x^3 - 4\mathfrak{S}'x)\mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}5x = (16\mathfrak{S}'x^4 - 12\mathfrak{S}'x^2 + 1)\mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}6x = (32\mathfrak{S}'x^5 - 32\mathfrak{S}'x^3 + 6\mathfrak{S}'x)\mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}7x = (64\mathfrak{S}'x^6 - 80\mathfrak{S}'x^4 + 24\mathfrak{S}'x^2 - 1)\mathfrak{S}x.$$

etc. etc. etc.

Für den Kosinus des vielfachen Bogens findet man

$$\mathfrak{S}'x = \mathfrak{S}'x$$
$$\mathfrak{S}'2x = 2\mathfrak{S}'x^2 - 1$$
$$\mathfrak{S}'3x = 4\mathfrak{S}'x^3 - 3\mathfrak{S}'x$$
$$\mathfrak{S}'4x = 8\mathfrak{S}'x^4 - 8\mathfrak{S}'x^2 + 1$$
$$\mathfrak{S}'5x = 16\mathfrak{S}'x^5 - 20\mathfrak{S}'x^3 + 5\mathfrak{S}'x$$
$$\mathfrak{S}'6x = 32\mathfrak{S}'x^6 - 48\mathfrak{S}'x^4 + 18\mathfrak{S}'x^2 - 1$$
$$\mathfrak{S}'7x = 64\mathfrak{S}'x^7 - 112\mathfrak{S}'x^5 + 56\mathfrak{S}'x^3 - \mathfrak{S}'x$$

etc. etc. etc.

§. 67.

Aufgabe.

Wenn der Sinus oder Kosinus eines Bogens bekannt ist, den Sinus oder Kosinus des halben Bogens finden.

Auflösung. Es sey verlangt der Kosinus von $\frac{1}{2}b$, es sey $\frac{1}{2}b = x$, so ist $b = 2x$. Es ist aber

$$\mathfrak{S}'2x = 2\mathfrak{S}'x^2 - 1$$

Setze $\frac{1}{2}b$ anstatt x, so ist

$$\mathfrak{S}'b = 2(\mathfrak{S}'\tfrac{1}{2}b)^2 - 1$$
$$\mathfrak{S}'b + 1 = 2(\mathfrak{S}'\tfrac{1}{2}b)^2$$
$$\frac{\mathfrak{S}'b + 1}{2} = (\mathfrak{S}'\tfrac{1}{2}b)^2$$
$$\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{S}'b + 1}{2}\right)} = \mathfrak{S}'\tfrac{1}{2}b$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$\mathfrak{S}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left(\frac{1 - \mathfrak{S}'b}{2}\right)}$$

An:

Anmerkung. Wenn man, vermittelst dieser beyden Formeln den Sinus oder Kosinus für die Hälfte des Bogens gefunden hat, so kann man weiter den Sinus oder Kosinus für den vierten, achten, sechszehnten Theil, u. s. f. des Bogens finden.

§. 68.

Aufgabe.

Wenn der Sinus oder Kosinus eines Bogens bekannt ist, den Sinus oder Kosinus für den dritten Theil des Bogens finden.

Auflösung. Es sey verlanget der Kosinus für $\frac{1}{3}b$. Man setze $\frac{1}{3}b = x$, so wird $b = 3x$. Nun ist

$$\mathfrak{S}'3x = 4\mathfrak{S}'x^3 - 3\mathfrak{S}'x$$

Man setze anstatt x, $\frac{1}{3}b$, so kömmt

$$\mathfrak{S}'b = 4(\mathfrak{S}'\tfrac{1}{3}b)^3 - 3\mathfrak{S}'\tfrac{1}{3}b$$

Diese Gleichung ist vom dritten Grade. Man setze $\mathfrak{S}\frac{1}{3}b = u$, und $\mathfrak{S}'b = a$, so hat man

$$a = 4u^3 - 3u$$

oder $$\tfrac{1}{4}a = u^3 - \tfrac{3}{4}u$$

oder $$o = u^3 - \tfrac{3}{4}u - \tfrac{1}{4}a$$

Sobald a eine bestimmte Zahl ist, so kann man diese Gleichung durch Näherung auflösen, und also den Werth von u oder $\mathfrak{S}'\frac{1}{3}b$ finden.

Es werde verlanget $\mathfrak{S}\frac{1}{3}b$. So setze man wiederum $\frac{1}{3}b = x$, folglich $b = 3x$. Es ist nun $\mathfrak{S}3x = (4\mathfrak{S}'x^2 -)\mathfrak{S}x$. Weil $\mathfrak{S}'x = \sqrt{(1 - \mathfrak{S}x^2)}$, so ist $\mathfrak{S}'x^2 = 1 - \mathfrak{S}x^2$ und $4\mathfrak{S}x^2 = 4 - 4\mathfrak{S}x^2$, $4\mathfrak{S}'x^2 - 1 = 3 - 4\mathfrak{S}x^2$, also

$$\mathfrak{S}3x = (3 - 4\mathfrak{S}x^2)\mathfrak{S}x$$

$$\mathfrak{S}3x = 3\mathfrak{S}x - 4\mathfrak{S}x^3$$

Setzet man $\frac{1}{3}b$ anstatt x, so ist

$$\mathfrak{S}b = 3\mathfrak{S}\tfrac{1}{3}b - 4(\mathfrak{S}\tfrac{1}{3}b)^3$$

oder wenn man annimmt $\mathfrak{S}b = a$, $\mathfrak{S}\frac{1}{3}b = u$, so ist

$$a = 3u - 4u^3$$
$$-a = -3u + 4u^3$$
$$-\tfrac{1}{4}a = -\tfrac{3}{4}u + u^3$$
$$o = u^3 - \tfrac{3}{4}u + \tfrac{1}{4}a$$

Diese Gleichung ist nur von der vorigen im letzten Zeichen unterschieden, und kann ebenfalls durch Näherung aufgelöset werden, wenn a oder $\mathfrak{S}b$ in Zahlen gegeben ist.

§. 69.

Aufgabe.

Formeln finden, wodurch die Produkte des Sinus und des Kosinus zweyer verschiedenen Bogen ausgedrücket werden.

Auflösung. Man hat gesehen, daß

$$\mathfrak{S}(x+y) = \mathfrak{S}x.\mathfrak{S}'y + \mathfrak{S}y.\mathfrak{S}'x$$

und $$\mathfrak{S}(x-y) = \mathfrak{S}x.\mathfrak{S}'y - \mathfrak{S}y.\mathfrak{S}'x$$

Addiret man diese beyden Formeln, so kömmt

$$(A) \ldots 2\mathfrak{S}x.\mathfrak{S}'y = \mathfrak{S}(x+y) + \mathfrak{S}(x-y)$$

Wenn man die zweyte von der ersten subtrahiret, so kömmt

$$(B) \ldots 2\mathfrak{S}y.\mathfrak{S}'x = \mathfrak{S}(x+y) - \mathfrak{S}(x-y)$$

In diesen beyden Formeln A und B setze man my anstatt x, indem m irgend eine Zahl andeutet, so kömmt

$$2\mathfrak{S}my.\mathfrak{S}'y = \mathfrak{S}(my+y) + \mathfrak{S}(my-y)$$
$$2\mathfrak{S}y.\mathfrak{S}'my = \mathfrak{S}(my+y) - \mathfrak{S}(my-y)$$

oder (C) ... $2\mathfrak{S}my.\mathfrak{S}'y = \mathfrak{S}(m+1)y + \mathfrak{S}(m-1)y$

(D) ... $2\mathfrak{S}y.\mathfrak{S}'my = \mathfrak{S}(m+1)y - \mathfrak{S}(m-1)y$

Ferner wird man sich erinnern, daß

$$\mathfrak{S}'(x+y) = \mathfrak{S}'x.\mathfrak{S}'y - \mathfrak{S}y.\mathfrak{S}x$$
$$\mathfrak{S}'(x-y) = \mathfrak{S}'x.\mathfrak{S}'y + \mathfrak{S}y.\mathfrak{S}x$$

Wenn man diese Formeln, wie die vorigen, addiret und subtrahiret, so kömmt

(E) ... $2\mathfrak{S}'x.\mathfrak{S}'y = \mathfrak{S}'(x+y) + \mathfrak{S}'(x-y)$

(F) ... $2\mathfrak{S}y.\mathfrak{S}x = \mathfrak{S}'(x-y) - \mathfrak{S}'(x+y)$

Nimmt man nun wiederum an, $x = my$, so bekömmt man

(G) ... $2\mathfrak{S}'my.\mathfrak{S}'y = \mathfrak{S}'(m+1)y + \mathfrak{S}'(m-1)y$

(H) ... $2\mathfrak{S}y.\mathfrak{S}my = \mathfrak{S}'(m-1)y - \mathfrak{S}'(m+1)y$

Alle diese Formeln, die mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet sind, leisten in manchen Fällen gute Dienste.

§. 70.

Aufgabe.

Formeln finden, wodurch die Potenzen eines Sinus oder Kosinus ausgedrücket werden.

Vorbereitung. In den Formeln G und H des vorigen Paragraphs, setze man $m = 1$, so kömmt

$$2(\mathfrak{S}'y)^2 = \mathfrak{S}'2y + \mathfrak{S}'o$$
$$2(\mathfrak{S}y)^2 = \mathfrak{S}'o - \mathfrak{S}'2y$$

Es ist aber $\mathfrak{S}'o = 1$. Denn wenn der Bogen null ist, so machet das Komplement desselben den Viertelzirkel aus, der Sinus aber des Viertelzirkels ist dem Halbmesser gleich, oder $= 1$, wenn man, wie hier vorausgesetzt wird, den Halbmesser zur Einheit machet. Also ist

$$2(\mathfrak{S}'y)^2 = 1 + \mathfrak{S}'2y$$
$$2(\mathfrak{S}y)^2 = 1 - \mathfrak{S}'2y$$

Nimmt man nun zur Hülfe die Formeln des 66ten Paragraphs, so findet man folgende Gleichungen.

Auflösung.

$$\mathfrak{S}x = \mathfrak{S}x$$
$$2\,\mathfrak{S}x^2 = 1 - \mathfrak{S}'2x$$
$$4\,\mathfrak{S}x^3 = 3\mathfrak{S}x - \mathfrak{S}3x$$
$$8\,\mathfrak{S}x^4 = 3 - 4\,\mathfrak{S}'2x + \mathfrak{S}'4x$$
$$16\,\mathfrak{S}x^5 = 10\mathfrak{S}x - 5\mathfrak{S}3x + \mathfrak{S}5x$$
$$32\,\mathfrak{S}x^6 = 10 - 15\,\mathfrak{S}'2x + 6\,\mathfrak{S}'4x - \mathfrak{S}'6x$$

etc. etc.

Ferner

$$\mathfrak{S}'x = \mathfrak{S}'x$$
$$2\,\mathfrak{S}'x^2 = 1 + \mathfrak{S}'2x$$
$$4\,\mathfrak{S}'x^3 = 3\mathfrak{S}'x + \mathfrak{S}'3x$$
$$8\,\mathfrak{S}'x^4 = 3 + 4\,\mathfrak{S}'2x + \mathfrak{S}'4x$$
$$16\,\mathfrak{S}'x^5 = 10\mathfrak{S}'x + 5\mathfrak{S}'3x + \mathfrak{S}'5x$$
$$32\,\mathfrak{S}'x^6 = 10 + 15\,\mathfrak{S}'2x + 6\,\mathfrak{S}'4x + \mathfrak{S}'6x$$

etc. etc.

§. 71.

Aufgabe.

Formeln finden, wodurch die Summen und Differenzen der Sinusse und Kosinusse, und die daraus entstehenden Brüche ausgedrücket werden.

Auflösung. In den Formeln A, B, E und F des §. 69. setze a anstatt $x + y$ und b anstatt $x - y$, so wird $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$, und daher entstehen folgende Formeln.

(A)

(A) ... $\mathfrak{S}a + \mathfrak{S}b = 2\,\mathfrak{S}\frac{1}{2}(a+b).\ \mathfrak{S}'\frac{1}{2}(a-b)$

(B) ... $\mathfrak{S}a - \mathfrak{S}b = 2\,\mathfrak{S}\frac{1}{2}(a-b).\ \mathfrak{S}'\frac{1}{2}(a+b)$

(C) ... $\mathfrak{S}'a + \mathfrak{S}'b = 2\,\mathfrak{S}'\frac{1}{2}(a+b).\ \mathfrak{S}'\frac{1}{2}(a-b)$

(D) ... $\mathfrak{S}'b - \mathfrak{S}'a = 2\,\mathfrak{S}\frac{1}{2}(a+b).\ \mathfrak{S}\frac{1}{2}(a-b)$

Wenn man nach und nach diese Formeln eine durch die andere dividiret, und sich dabey erinnert, daß der Sinus, wenn er durch den Kosinus dividiret ist, die Tangente giebt, so erhält man noch folgende Verhältnisse.

(E) ... $\dfrac{\mathfrak{S}a + \mathfrak{S}b}{\mathfrak{S}a - \mathfrak{S}b} = \mathfrak{T}\frac{1}{2}(a+b).\ \mathfrak{T}'\frac{1}{2}(a-b)$

(F) ... $\dfrac{\mathfrak{S}a + \mathfrak{S}b}{\mathfrak{S}'a + \mathfrak{S}'b} = \mathfrak{T}\frac{1}{2}(a+b)$

(G) ... $\dfrac{\mathfrak{S}a + \mathfrak{S}b}{\mathfrak{S}'b - \mathfrak{S}'a} = \mathfrak{T}'\frac{1}{2}(a-b)$

(H) ... $\dfrac{\mathfrak{S}a - \mathfrak{S}b}{\mathfrak{S}'a + \mathfrak{S}'b} = \mathfrak{T}\frac{1}{2}(a-b)$

(I) ... $\dfrac{\mathfrak{S}a - \mathfrak{S}b}{\mathfrak{S}'b - \mathfrak{S}'a} = \mathfrak{T}'\frac{1}{2}(a+b)$

(K) ... $\dfrac{\mathfrak{S}'a + \mathfrak{S}'b}{\mathfrak{S}'b - \mathfrak{S}'a} = \mathfrak{T}'\frac{1}{2}(a+b).\ \mathfrak{T}'\frac{1}{2}(a-b)$

§. 72.

Aufgabe.

Die Tangente oder Kotangente der Summe oder der Differenz zweyer Bogen finden.

Auflösung. Die Tangente ist gleich dem Sinus, wenn er durch den Kosinus dividiret wird. Folglich ist

$$\mathfrak{T}(x+y) = \frac{\mathfrak{S}(x+y)}{\mathfrak{S}'(x+y)} = \frac{\mathfrak{S}x.\,\mathfrak{S}'y + \mathfrak{S}y.\,\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{S}'x.\,\mathfrak{S}'y - \mathfrak{S}x.\,\mathfrak{S}y}$$

(§. 65.)

Man

Man dividire den Zähler und den Nenner des letzten Bruches durch $S'y . S'x$, und setze T anstatt $\frac{S}{S'}$, so kömmt

$$(A) \ldots \mathfrak{T}(x+y) = \frac{\mathfrak{T}x + \mathfrak{T}y}{1 - \mathfrak{T}x . \mathfrak{T}y}$$

Auf gleiche Art findet man

$$(B) \ldots \mathfrak{T}(x-y) = \frac{\mathfrak{T}x - \mathfrak{T}y}{1 + \mathfrak{T}x . \mathfrak{T}y}$$

Es ist ferner $\mathfrak{T}' = \frac{1}{\mathfrak{T}}$. Folglich, wenn man in den Formeln A und B die Brüche umkehret, so wird

$$\mathfrak{T}'(x+y) = \frac{1 - \mathfrak{T}x . \mathfrak{T}y}{\mathfrak{T}x + \mathfrak{T}y}$$

$$\mathfrak{T}'(x-y) = \frac{1 + \mathfrak{T}x . \mathfrak{T}y}{\mathfrak{T}x - \mathfrak{T}y}$$

Man dividire Zähler und Nenner durch $\mathfrak{T}x . \mathfrak{T}y$, und schreibe $\mathfrak{T}'$ anstatt $\frac{1}{\mathfrak{T}}$, so kömmt

$$(C) \ldots \mathfrak{T}'(x+y) = \frac{\mathfrak{T}'x . \mathfrak{T}'y - 1}{\mathfrak{T}'y . + \mathfrak{T}'x}$$

$$(D) \ldots \mathfrak{T}'(x-y) = \frac{\mathfrak{T}'x . \mathfrak{T}'y + 1}{\mathfrak{T}'y - \mathfrak{T}'x}$$

§. 73.

Aufgabe.

Die Tangente oder Kotangente des doppelten Bogens finden.

Auf-

Auflösung. In der Formel A des vorigen Paragraphs, setze x anstatt y, so kömmt

$$(A) \ldots \mathfrak{T} 2x = \frac{2\,\mathfrak{T}x}{1 - \mathfrak{T}x^2}$$

Man mache die nemliche Veränderung in der Gleichung die unmittelbar auf die Formel B folget, so ist

$$(B)\ \mathfrak{T}'2x = \frac{1 - (\mathfrak{T}x)^2}{2\,\mathfrak{T}x} = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{T}'x - \mathfrak{T}x)$$

Anmerkung. Man könnte ebenfalls die Tangente von $3x$, $4x$, u. s. f. finden. Wenn man nur nach und nach annähme $y = 2x$, $y = 3x$, u. s. f. Wir wollen nun aufhören die Zirkelgrößen mit einander zu vergleichen und zum Zirkel selbst zu schreiten.

§. 74.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser des Zirkels gegeben ist, den Umfang oder die Peripherie finden.

Vorbereitung. Wenn der Halbmesser r ist, so ist der Bogen eines Sinus y, (§. 56.)

$$\mathfrak{AS}y = y + \frac{y^3}{2.3.r^2} + \frac{3.y^5}{2.4.5.r^4} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7.r^6}$$

$$+ \frac{3.5.7.y^9}{2.4.6.8.9.r^8} + \text{etc.}$$

Wenn der Sinus die Größe des Halbmessers erreichet hat, so wird der Bogen zum Viertel-Umkreise. Man setze in voriger Formel r anstatt y, und $\frac{1}{4}$ Umkreis anstatt $\mathfrak{AS}y$, so wird

$\frac{1}{4}$ Umkr.

$$\tfrac{1}{4}\,\text{Umkr.} = r + \frac{r}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot r}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5\cdot r}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot r}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \text{etc.}$$

oder

$$\tfrac{1}{4}\,\text{Umkr.} = r\,[1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \text{etc.}]$$

oder

$$\text{Umkr.} = 4r\,[1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \text{etc.}]$$

oder, wenn der Halbmesser 1 ist,

$$\text{Umkr.} = 4\,[1 + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \text{etc.}]$$

Wenn man diese Reihe sehr weit fortsetzt, die Brüche in Dezimal-Brüche verwandelt, sie zusammen addiret, und die Summe mit 4 multiplizirt, so bekömmt man den Umkreis des Zirkels in Dezimal-Brüchen.

Etwas geschwinder wird die Reihe abnehmen, wenn man die Tangente anstatt des Sinus gebrauchet. Man hat gefunden wenn der Halbmesser = 1 (§. 61.)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T}z = z + \frac{z^5}{5} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{13}}{13} + \text{etc.} - \left(\frac{z^3}{3} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^{11}}{11} + \text{etc.}\right)$$

Ge-

Gesetzt nun es wird die Tangente dem Halbmesser gleich, das ist $z = 1$, so wird der Bogen zum achten Theile des Umkreises (§. 14.)

Wenn wir also in letztgemeldeter Reihe $z = 1$ setzen, so bekommen wir

$$\frac{1}{8}\text{ Umkr.} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.}$$
$$- \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \text{etc.}\right)$$

oder

$$\text{Umkr.} = 8\left[1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \text{etc.}\right]$$
$$- 8\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \text{etc.}\right]$$

Verwandelt man nun alle Sätze in Dezimal-Brüche, so bekömmt man wiederum den Umkreis des Zirkels.

Auflösung. Vermittelst dieser oder ähnlicher Reihen hat man gefunden, daß wenn der Halbmesser 1 ist, der Umkreis sey

6;283,185,307,179,586,476,925,286,766,559,0.....

Folglich der halbe Umkreis

3;141,592,653,589,793,238,462,643,383,279,5.....

Diese letzte Zahl drückt auch den ganzen Umkreis aus, wenn man den Durchmesser anstatt des Halbmessers als Einheit annimmt.

Anmerkung. Aus der Größe des Umkreises läßt sich die Größe eines Bogens von so viel Graden finden als man will (VI. §. 64.). Hat man die Größe eines Bogens so findet man dessen Sinus (§. 57.) und aus diesem alle übrige trigonometrische Linien. (§. 47.)

Die unendlichen Reihen, die wir im gegenwärtigen Hauptstücke gefunden haben, würden also zur Berechnung der Sinustafeln sehr bequem seyn, wenn solche Tafeln nicht schon seit langer Zeit vorhanden wären.

§. 75.

Ehe wir dieses Hauptstück schließen, wollen wir zum Gebrauche der Tafeln zurückkehren, und noch zeigen, wie einige der algebraischen Formeln dabey genutzet werden können.

Es sey der Sinus eines Bogens zu finden, der nicht genau in den Tafeln anzutreffen ist, so nehme man den nächst kleineren Bogen und den dazu gehörigen Sinus. Weil aber in den gewöhnlichen Tafeln der Halbmesser = 100000 ist, so rücke man das Dezimal-Zeichen um fünf Stellen linker Hand weiter, so daß der Halbmesser = 1 sey.

Den Unterschied des gefundenen Bogens und des gegebenen, drücke man durch eine Zahl aus, die den Halbmesser zur Einheit habe.

Es werde der nächst kleinere Bogen in den Tafeln z genannt, so ist die gefundene Differenz $= \Delta z$. Nun kann man die Formel gebrauchen welche oben §. 64. bewiesen worden. Es ist nemlich

$$\mathfrak{S}(z+\Delta z) = \mathfrak{S}z + \mathfrak{S}'z\,\Delta z - \frac{\mathfrak{S}z\,\Delta z^2}{1.2} - \frac{\Delta^3 z\,\mathfrak{S}'z}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Da nun Δz allemal ein kleiner Bruch ist, so wird man meistens keine andere Sätze gebrauchen als die beyden ersten der Reihe, nemlich $\mathfrak{S}z + \mathfrak{S}'z.\,\Delta z$. Die Größen $\mathfrak{S}z$ und $\mathfrak{S}'z$ stehen in den Tafeln.

Zum Exempel. Es soll der Sinus gefunden werden zu einem Bogen von $47^g\ 13'28''$. Die $28''$ muß man berechnen, welches also geschehen kann.

0;000000484813 = 1 Sek. (VI. §. 64.)

× 28

3878504
969626

0;000013574764 = 28 Sek. = Δz.

Nun

Nun findet man in den Tafeln

$$0;6792278 = S'47^g\ 13' = S'\zeta.$$
$$\times\ 0;0001357 = \Delta\zeta$$

0679
081
122
00
33
0
4

$$0;0000920 = S'\zeta\,\Delta\zeta$$
$$+\ 0;7339275 = S\zeta$$
$$0;7340195 = S\zeta + S'\zeta\cdot\Delta\zeta.$$

Nun suche man $\Delta\zeta^2$, so findet sich, daß $\Delta\zeta^2$ nichts beträgt, wenn man sich mit 7 Dezimalziffern begnüget. Und also ist, wenn der Halbmesser = 1,

$$S47^g\ 13'28'' = 0;7340195$$

ist aber der Halbmesser 100000, so ist

$$S47^g\ 13'28'' = 73401;95$$

Man versuche das nemliche Exempel nach der gewöhnlichen Manier zu berechnen, wo angenommen wird, daß die Differenzen der Bogen sich beynahe verhalten wie die Differenzen der Linien, welche dieselben bestimmen.

Es ist $73412;50 = S47^g\ 14'$
$73392;75 = S47^g\ 13'$

19;75 Unterschied.

Wie 60 Sek. zu 28 Sek.
so 19;75

140
196
252
28

ϛϛ;ϛϕ(ϕ : 6ϕ = 9;21
114

Zu 73392;75
addire 9;21

73401;96 = S 47° 13′28″

welches gar wenig vom vorigen Resultate verschieden ist.

§. 76.

Es werde verlangt der Kosinus eines Bogens von 82° 0′15″.

Weil 0;000000484813 = 1 Sek.
so multipl. mit 15 15

2424065
484813

und es ist 0;00007272195 = 15 Sek. = Δz

Nun ist

$$S'(z+\Delta z) = S'z - \Delta z\, Sz - \frac{\Delta z^2 . S'z}{1.2} + \text{etc.}$$

Es ist 0;9902681 = S 82° 0′ = Sz
× 0;0000727 = Δz

033
660
08
11
6

Nimm ab 0;00000719 = $Sz\,\Delta z$
von 0;1391731 = $S'z$

so bleibet 0;1391011 = $S'z - Sz\,\Delta z$.

Weil Δz^2 nichts beträget, wenn man sich mit 7 Dezimalbrüchen begnüget, so ist der verlangte Kosinus gefunden, und es ist

0;1391011 = S′ 82° 0′15″

oder

oder, wenn der Halbmesser = 100000 ist, so wird

13910;11 = S' 82ᵍ 0'15''

Wir wollen diesen Kosinus nach der gewöhnlichen Methode berechnen. (§.75.).

Das Komplement von 82ᵍ 0'15'' ist 7ᵍ 59'45''. Hierzu muß der Sinus gesuchet werden.

13917;31 = S 7ᵍ 60'
13888;50 = S 7ᵍ 59'

28;81 Unterschied.

Wie 60 Sek. zu 45''
so 28;81

zu 21;60
addire 13888;50

13910;10

Dieses Resultat ist wiederum nur in den letzten Ziffern vom vorigen verschieden. Und da überhaupt bey solchen Rechnungen die letzte Ziffer ungewiß ist, so kann man den kleinen Unterschied völlig für nichts achten.

§. 77.

Aus beyden vorigen Abschnitten kann man bemerken, daß wenn die Differenzen der Bogen sehr klein sind, die Differenzen der Sinusse und Kosinusse eben so berechnet weeden, als wenn sie unendlich klein wären, weil die höheren Potenzen derselben verschwinden.

Es ist nemlich, bey unendlich kleinen Differenzen

$$\delta S_z = \delta z . S'_z$$
oder $$S(z+\delta z) - S_z = \delta z . S'_z$$
folglich $$S(z+\delta z) = S_z + \delta z S'_z$$

Desgleichen ist

$$\delta \mathfrak{S}' z = - \delta z \, \mathfrak{S} z$$

oder $\mathfrak{S}'(z + \delta z) - \mathfrak{S}' z = - \delta z \cdot \mathfrak{S} z$

folglich $\mathfrak{S}'(z + \delta z) = \mathfrak{S}' z - \delta z \, \mathfrak{S} z$

und dieses sind die nemlichen Formeln, wornach die Sinusse und Kosinusse der Bogen berechnet worden, die etwas grösser sind als die nächst kleineren in den Tafeln.

Dieser Bemerkung zufolge können wir die Differenzialformeln in ähnlichen Fäsen auf eine sehr nützliche Art anwenden.

§. 78.

Es ist $\delta \mathfrak{T} z = \frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z^2}$

folglich $\mathfrak{T}(z + \delta z) = \mathfrak{T} z + \frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z^2}$

Es sey verlangt die Tangente von $38^g\ 44'45''$ so ist z dre Bogen von $38_g 44'$, und δz der Bogen von $45''$. Multipliziret man 1 Sek. $= 0;0000004848\ldots.$ mit 45, so kömmt $0;0002181\ldots. = 45'' = \delta z$.

Man suche in den Tafeln $\mathfrak{S}' z = \mathfrak{S}'\ 38^g\ 44'$, so findet man

$$0;7800665 = \mathfrak{S}' z$$

Man dividire δz durch $\mathfrak{S}' z$ und den Quozient wiederum durch $\mathfrak{S}' z$, so erhält man $\frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z^2}$

$$0;0002181 : 0;7800665$$

oder $2881 : 7800665 = 0;0002796 = \frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z}$

ferner

$$0;0002796 : 0;7800665$$

oder

oder $2796 : 7800665 = 0;0003585 = \frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z^2}$

addire $0;8021067 = \mathfrak{T} z$

$0;8024652 = \mathfrak{T} z + \frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z^2}$

Oder wenn der Halbmesser $= 100000$, so ist

$$80246;52 = \mathfrak{T} z + \frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z^2} = \mathfrak{T} 38^g\, 44'45''$$

Die gewöhnliche Rechnung kömmt also zu stehen

$80258;49 = \mathfrak{T} 38^g\, 45'$
$80210;67 = \mathfrak{T} 38^g\, 44'$

$47;82$

Wie 60 Sek. zu 45 Sek.
so ist 47;82

zu 35;86
addire 80210;67

$80246;53 = \mathfrak{T} 38^g\, 44'45''$

Für die Kotangente gebrauche man auf ähnliche Art die Formel

$$\delta \mathfrak{T}' z = -\frac{\delta z}{\mathfrak{S} z^2}$$

oder $\mathfrak{T}'(z + \delta z) = \mathfrak{T}' z - \frac{\delta z}{\mathfrak{S} z^2}$

§. 79.

Gesetzt, es wird der Bogen zu einem Sinus oder Kosinus, zu einer Tangente oder Kotangente verlangt, die nicht genau in den Tafeln anzutreffen ist, so hat man

$$\delta \mathfrak{S} z = \delta z\, \mathfrak{S}' z$$

daher

$$\text{I)}\quad \delta z = \frac{\delta \mathfrak{S} z}{\mathfrak{S}' z}$$

ferner

$$\delta \mathfrak{S}' z = -\delta z\, \mathfrak{S} z$$

daher

$$\text{II)}\quad \delta z = -\frac{\delta \mathfrak{S}' z}{\mathfrak{S} z}$$

weiter

$$\delta \mathfrak{T} z = \frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z^2}$$

daher

$$\text{III)}\quad \delta z = \delta \mathfrak{T} z \cdot \mathfrak{S}' z^2$$

zuletzt

$$\delta \mathfrak{T}' z = -\frac{\delta z}{\mathfrak{S} z^2}$$

daher

$$\text{IV)}\quad \delta z = -\delta \mathfrak{T}' z\, \mathfrak{S} z^2$$

Gesetzt nun es ist z der nächst kleinere Bogen, den man in den Tafeln findet, so ist δz dasjenige, was man ihm zusetzen oder abnehmen muß. Wenn δz in einer Zahl gefunden worden, deren Einheit der Halbmesser ist, so kann man solche in Sekunden verwandeln. Gesetzt es seyen gegeben der Sinus 0;0878753, so findet man in den Tafeln

$$\mathfrak{S}\, 5^{g}\, 2' = 0;0877353 = \mathfrak{S} z$$
$$\mathfrak{S}'\, 5^{g}\, 2' = 0;9961438 = \mathfrak{S}' z$$

Von 0;0878753
subtrahire 0;0877353
bleibet 0;0001400 = δ𝔖z

Nun

Nun ist

$$\delta z = \frac{\delta S z}{S' z} = \frac{0;00001400}{0;9961438}$$

$$= \frac{1400}{9961438} = 0;00001405.$$

Diese Zahl 0;00001405 zeiget also die Zunahme des Bogens an. Man berechne sie in Sekunden, welches wir der Kürze halben durch die Divisionen verrichten können. Es ist nemlich

$$0;0000048 \ldots = 1 \text{ Sek.}$$

Man dividire die vorige Zahl durch diese letzte, so kömmt die Anzahl der Sekunden, nemlich

$$\frac{0;00001405}{0;0000048} = \frac{1405}{48} = 29''.$$

Also ist der verlangte Bogen, der zum gegebenen Sinus gehöret $= 5^g\ 2'29''$. Wir wollen versuchen ob das nemliche durch die gewöhnliche Proporzion herauskömmt.

8802;51 = S 5^g 3′
8773;53 = S 5^g 2′

28;98 Unterschied.

8787;53 der gegebene Sinus
8773;53 der nächst kleinere

14;00 Unterschied.

2898 zu 1400
wie 60 Sekunden

zu 29 Sekunden.
addire 5^g 2′0″

so kömmt 5^g 2′29″, verlangter Bogen.

Durch voriges Beyspiel eines Sinus der nicht genau in den Tafeln stehet, und dessen Bogen vermittelst der Differenzialformel gefunden wird, kann man leicht erachten, wie man verfahren soll, wenn anstatt des Sinus der Kosinus, oder die Tangente, oder die Kotangente gegeben wird.

§. 80.

Es sey der Logarithmus des Sinus, oder des Kosinus, oder der Tangente, oder der Kotangente eines Bogens verlanget, der nicht genau in den Tafeln stehet, so bekömmt man folgende Auflösungen:

I) Es ist $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{S} x = \frac{\mathfrak{d} \mathfrak{S} x}{\mathfrak{S} x}$

weil nun $\mathfrak{d} \mathfrak{S} x = \mathfrak{d} x \, \mathfrak{S}' x$,

so ist $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{S} x = \frac{\mathfrak{d} x \, \mathfrak{S}' x}{\mathfrak{S} x}$

oder $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{S} x = \mathfrak{d} x \, \mathfrak{T}' x$

Gesetzt also der nächst kleinere Bogen in den Tafeln sey x, der Unterschied zwischen demselben und dem gegebenen sey $\mathfrak{d} x$, so findet man, was man zum Logarithmus des Sinus addiren muß, wenn man $\mathfrak{d} x$ mit der Kotangente von x multipliziret. Wohl verstanden, daß die Formel nur für sehr kleine Bogen gilt. Der Logarithmus der in der Formel stehet, ist der natürliche. Wie aber ein briggischer Logarithmus in einer natürlichen, und widerum ein natürlicher in einen briggischen verwandelt werden kann, wird in der Algebra gelehret. (Siehe auch unten §. 82.)

II) Es ist $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{S}' x = \frac{\mathfrak{d} \mathfrak{S}' x}{\mathfrak{S}' x}$

und weil $\mathfrak{d} \mathfrak{S}' x = - \mathfrak{d} x . \mathfrak{S} x$,

so ist $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{S}' x = - \frac{\mathfrak{d} x \, \mathfrak{S} x}{\mathfrak{S}' x}$

oder $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{S}' x = - \mathfrak{d} x . \mathfrak{T} x .$

Man erhält folglich, was von dem Logarithmus des Kosinus abgenommen werden muß, wenn man die Tangente des nächst kleineren Bogens mit dem Unterschiede des Bogens selbst multiplizirt. Es versteht sich, daß $\mathfrak{d} x$ nicht in Graden, sondern in einer Zahl ausgedrückt werden muß, die den Halbmesser zur Einheit hat.

III) Es ist $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{T} x = \frac{\mathfrak{d} \mathfrak{T} x}{\mathfrak{T} x}$

und weil $\mathfrak{d} \mathfrak{T} x = \frac{\mathfrak{d} x}{\mathfrak{S}' x^2}$

so ist $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{T} x = \frac{\mathfrak{d} x}{\mathfrak{T} x . \mathfrak{S}' x^2}$

IV) Es ist $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{T}' x = \frac{\mathfrak{d} \mathfrak{T}' x}{\mathfrak{T}' x}$

und weil $\mathfrak{d} \mathfrak{T}' x = - \frac{\mathfrak{d} x}{\mathfrak{S} x^2}$

so ist $\mathfrak{d} \mathfrak{l} \mathfrak{T}' x = - \frac{\mathfrak{d} x}{\mathfrak{T}' x . \mathfrak{S} x^2}$

Wir wollen uns damit begnügen, daß wir die Formeln angezeigt haben, ohne uns weiter dabey aufzuhalten, denn für den Gebrauch ist die gewöhnliche Methode (§. 75.) meistens bequemer.

§. 81.

Gesetzt, es sey ein Logarithmus des Sinus, oder des Kosinus, oder der Tangente oder der Kotangente gegeben, welcher nicht genau in den Tafeln stehet, so verwandle

man den Logarithmus erst in einen natürlichen und gebrauche folgende Formeln.

I) Wir haben gefunden (§. 80.)

$$\mathfrak{dl}\mathfrak{S}x = \mathfrak{d}x\mathfrak{T}'x$$

daher ist $$\mathfrak{d}x = \frac{\mathfrak{dl}\mathfrak{S}x}{\mathfrak{T}'x}$$

oder $$\mathfrak{d}x = \mathfrak{T}x.\mathfrak{dl}\mathfrak{S}x$$

das ist, man findet den Unterschied des Bogens ($\mathfrak{d}x$), wenn man die Tangente des nächstkleineren Bogens ($\mathfrak{T}x$) mit dem Unterschiede des Logarithmus des Sinus ($\mathfrak{dl}\mathfrak{S}x$) multiplizirt.

II) Es ist $\mathfrak{dl}\mathfrak{S}'x = -\mathfrak{d}x\mathfrak{T}x$

daher ist $$\mathfrak{d}x = -\frac{\mathfrak{dl}\mathfrak{S}'x}{\mathfrak{T}x}$$

oder $$\mathfrak{d}x = -\mathfrak{T}'x.\mathfrak{dl}\mathfrak{S}'x.$$

III) Es ist $$\mathfrak{dl}\mathfrak{T}x = \frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{T}x.\mathfrak{S}'x^2}$$

daher $$\mathfrak{d}x = \mathfrak{T}x.\mathfrak{S}'x^2.\mathfrak{dl}\,\mathfrak{T}x$$

IV) Es ist $$\mathfrak{dl}\mathfrak{T}'x = \frac{-\mathfrak{d}x}{\mathfrak{T}'x.\mathfrak{S}x^2}$$

daher $$\mathfrak{d}x = -\mathfrak{T}'x.\mathfrak{S}x^2.\mathfrak{dl}\mathfrak{T}'x.$$

§. 82.

Weil in beyden vorigen Paragraphen der Halbmesser = 1, und der natürliche Logarithmus angenommen wird, so wollen wir noch zeigen, wie solcher Logarithmus jedesmal aus den Tafeln gefunden werden kann.

Es sey in den Tafeln der Logarithmus eines Sinus = L. Bey der Berechnung der Tafel-Logarithmen haben die Verfasser derselben vorausgesetzet, der Halb-

messer sey = 10000000000, folglich sind alle Sinusse 10000000000 mal größer, als wenn der Halbmesser = 1 wäre. Es sey also ein solcher Sinus, wie in den Logarithmen-Tafeln angenommen wird, = S; so ist der Sinus des nemlichen Bogens, wenn der Halbmesser = 1 wird,

$$\frac{S}{10000000000}$$

Hiervon ist der Logarithmus

$$LS - L\,10000000000$$

und weil in den Tafeln die Basis 10 ist, so ist L 10000000000 = 10. Folglich bekömt man zum Logarithmus, wenn der Halbmesser = 1 ist,

$$LS - 10$$

Man muß also von jedem Logarithmus eines Sinus 10 subtrahiren.

Also wird L zu L — 10.

Es sey der natürliche Logarithmus = l, so entstehet der Briggische, wenn man l mit $\frac{1}{2;3025850...}$ oder mit 0;4342944... multipliziret. Folglich entstehet aus dem Briggischen der natürliche, wenn man den ersten durch $\frac{1}{2.3025850}$ oder 0;4342944... dividiret. Das ist, man erhält den natürlichen Logarithmus, wenn man den Briggischen entweder mit 2;3025850 multipliziret, oder durch 0;4342944... dividiret.

Also wird L — 10 zu (L — 10) × 2;3025850

oder es wird L — 10 zu $\frac{L - 10}{0;4342944...}$

Was vom Logarithmus eines Sinus gesagt worden, gilt auch von den Logarithmen des Kosinus, der Tangente und der Kotangente. Folglich gilt überhaupt diese Regel. Wenn man aus den Tafeln den natürlichen Logarithmus eines Sinus, Kosinus, u. s. f. erhalten will, so ziehe man erstlich 10 von dem Tafel-Logarithmus ab, und multipliziere den Rest mit 2;3025850... Das Produkt ist der verlangte natürliche Logarithmus.

Man muß sich nicht wundern, daß ein solcher Logarithmus meistens negativ wird. Denn wenn der Halbmesser = 1 ist, so werden alle Sinusse und Kosinusse, auch alle Tangente unter 45 Grad zu Brüchen, und gebrochene Zahlen haben allemal einen negativen Logarithmus.

§. 83.

Wenn ein natürlicher Logarithmus für den Halbmesser 1 gefunden ist, so kann man ihn in einen Tafel-Logarithmus wiederum verwandeln. Denn weil

$$1 = \frac{\mathfrak{L} - 10}{0;4342944\ldots}$$

so ist $1 \times (0;4342944)\ldots = \mathfrak{L} - 10$

folglich $10 + 1 \times (0;4342944\ldots) = \mathfrak{L}$

Das ist, der natürliche Logarithmus wird mit 0;4342944... multipliziret, und es werden 10 dazu addiret. Die Summe ist der Tafel-Logarithmus. Wenn der natürliche Logarithmus negativ ist, so wird er durch die Zusetzung der 10 wiederum positiv.

Zwölf=

Zwölftes Hauptstück.

Von der geradlinichten Trigonometrie.

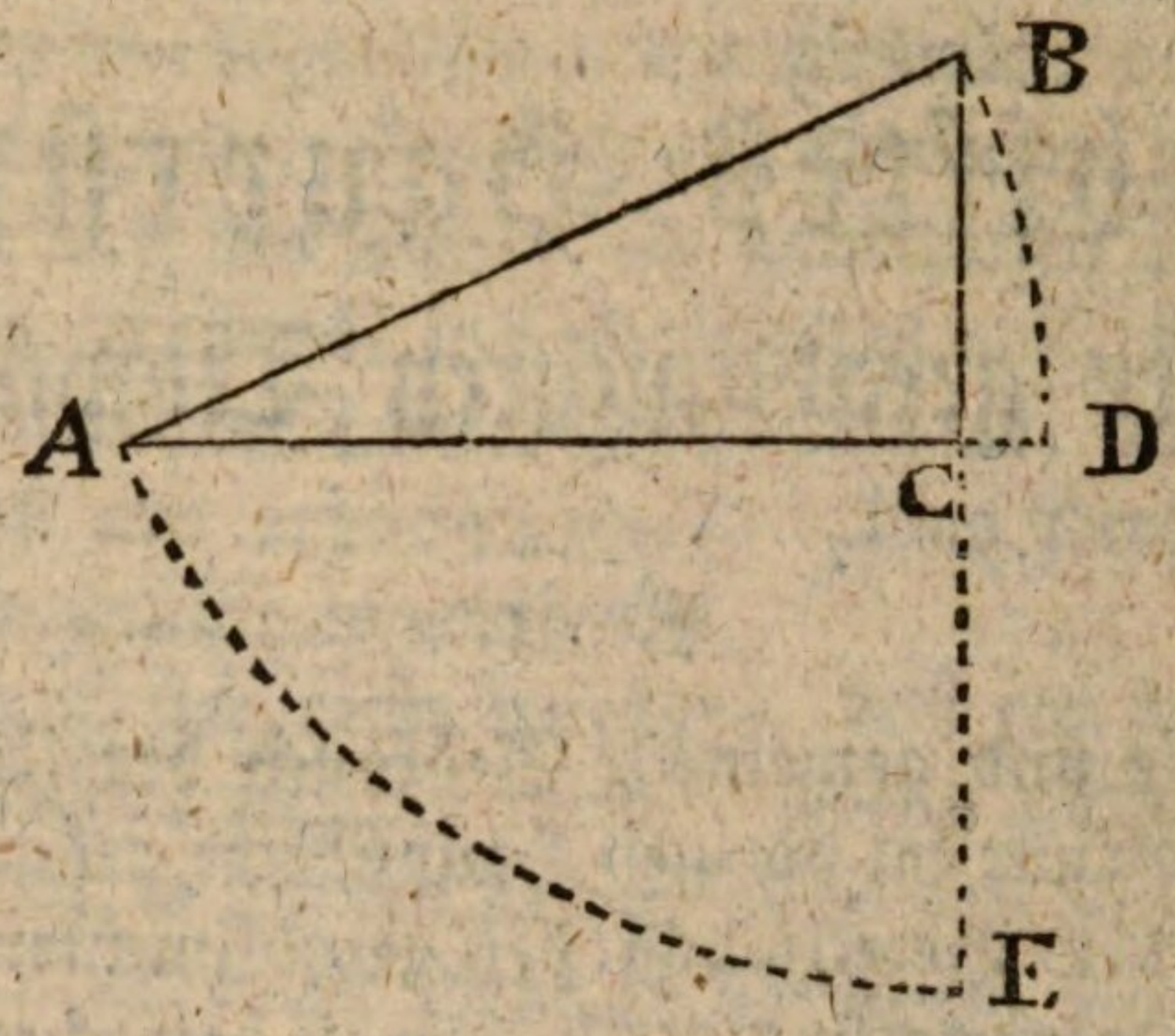
§. 1.

Der erste und gemeineste Gebrauch der Zirkelgrößen, wovon wir im vorigen Hauptstücke gehandelt haben, bestehet in der Berechnung der geradlinichten Dreyecke. In jedem Dreyecke sind 6 Größen zu betrachten, nemlich 3 Seiten und 3 Winkel. Werden nun 3 derselben als bekannt angenommen (wenn es nur nicht lauter Winkel sind), so lassen sich allemal die drey übrigen daraus bestimmen. Die Kunst, aus drey bekannten Größen eines geradlinichten Dreyecks die übrigen in Zahlen zu bestimmen, wird die geradlinichte oder ebne Trigonometrie, oder auch die Auflösung der geradlinichten Dreyecke genannt. Bevor wir aber zu den hierher gehörigen Aufgaben schreiten, müssen wir noch einige unentbehrliche Lehrsätze voraus schicken.

§. 2.

Im rechtwinklichen Dreyecke verhält sich die Hypotenuse zu jedem Katheten, wie der Halbmesser zum Sinus des Gegenwinkels des Katheten, oder zum Kosinus des Zwischenwinkels.

(Siehe die folgende Figur.)



Beweis. Mit dem Halbmesser AB beschreibe aus A den Bogen BD, so ist BC der Sinus desselben, oder des Winkels A.

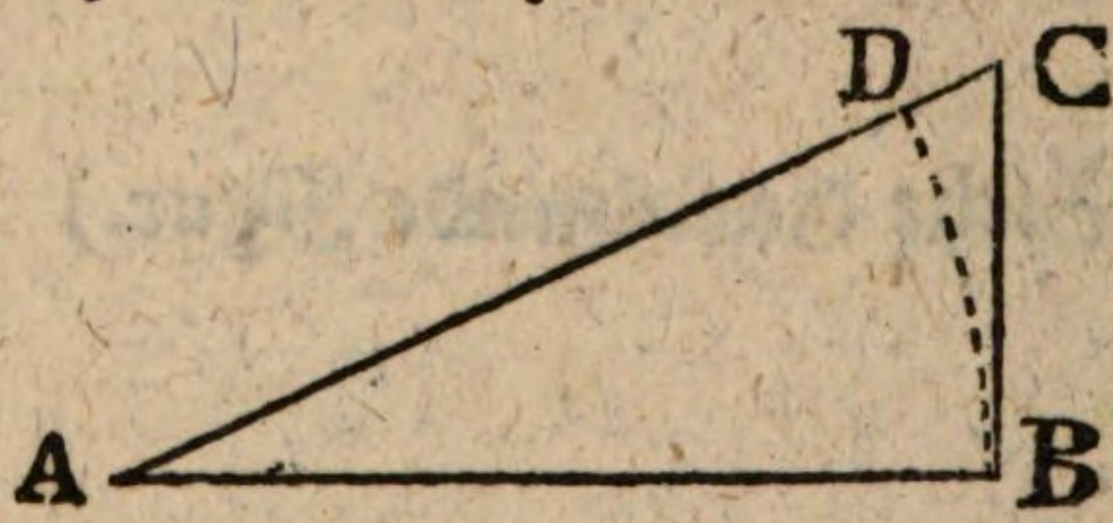
Wie sich nun AB, zu BC verhält, so verhält sich in jedwedem Zirkel der Halbmesser zum Sinus des Winkels A. Daher hat unser Satz seine Richtigkeit.

Beschreibet man ebenfalls aus B mit dem Halbmesser BA den Bogen AE, so wird AC der Sinus des Bogens AE oder des ∠B.

Will man die Kosinusse gebrauchen, so ist AC der Kosinus des Winkels A, und BC der Kosinus des Winkels B.

§. 3.

Im rechtwinklichen Dreyecke verhält sich jeder Kathete zum anderen, wie der Halbmesser zur Tangente des Gegenwinkels oder zur Kotangente des anliegenden schiefen Winkels des zweyten Katheten.



Be:

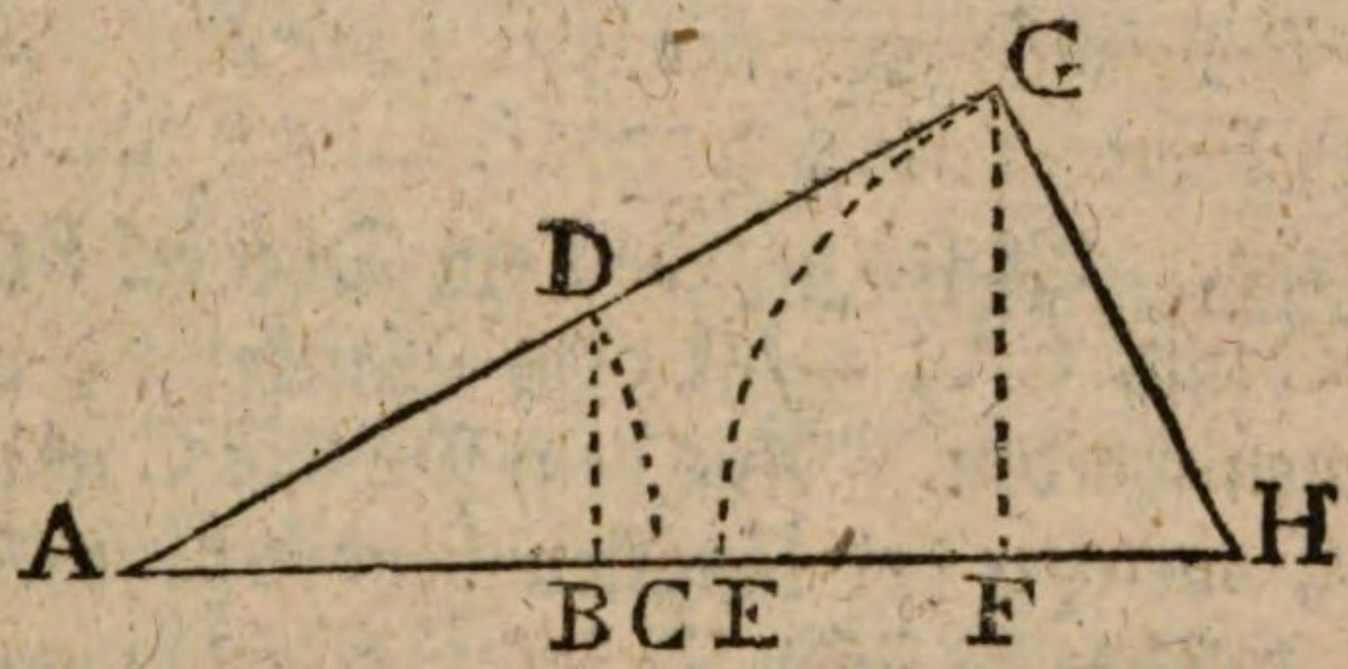
Beweis. Mit dem Halbmesser AB beschreibe aus A den Bogen BD, so ist BC die Tangente des Gegenwinkels A, und in jedem Zirkel verhält sich der Halbmesser zur Tangente eines dem A gleichen Winkels, wie AB zu BC.

Da die drey Winkel B, A und C zusammen $= 2$ R, und da B $= 1$ R, so sind $\angle$ A $+ \angle$ C $= 1$ R, das ist, $\angle$ A und $\angle$ C sind Komplemente einer von dem anderen (§. 4.). Also ist die Tangente des Winkels A zugleich die Kotangente des Winkels C.

Eben so kann bewiesen werden, daß, wenn R einen jeden Halbmesser bedeutet, CB, BA : : R, $\mathfrak{T}$C($= \mathfrak{T}'$A).

§. 4.

In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten gegen einander, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel, (vorausgesetzt, daß der Halbmesser unverändert bleibet.)



Beweis. Es sey AGH ein beliebiges Dreyeck. Aus H mit dem Halbmesser HG, beschreibe den Bogen EG, und fälle GF senkrecht auf AH, so ist GF der Sinus des Winkels H für den Halbmesser HG.

Nimm AD $=$ HG, beschreibe ebenfalls den Bogen CD und ziehe DB senkrecht auf AH, so ist DB der Sinus des Winkels A für den nemlichen Halbmesser AD($=$HG).

Beyde Dreyecke ADB, AGF sind ähnlich, weil $\angle$ A $= \angle$ A, und in B und F rechte Winkel sind.

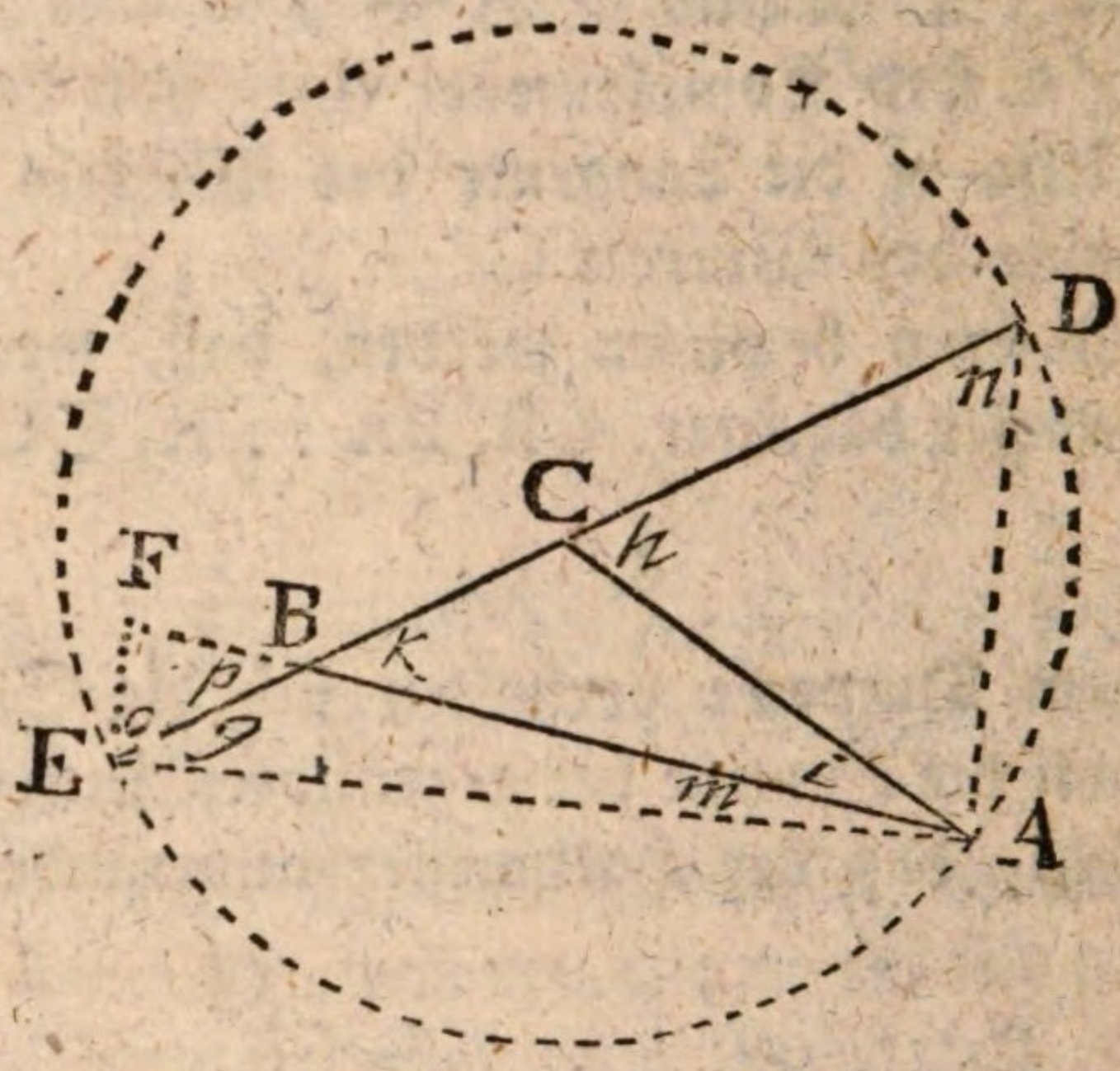
Folglich ist AD, AG : : DB, GF

oder HG, AG : : $\mathfrak{S}$A, $\mathfrak{S}$H

§. 5.

§. 5.

In jedem Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zur Differenz derselben, wie die Tangente der halben Summe beyder Gegenwinkel zur Tangente ihrer halben Differenz.



Beweis. Es sey gegeben ein Dreyeck BCA, wo die Seiten BC und CA, nebst dem Winkel C, als bekannt angenommen werden. Aus dem Punkte C mit dem Halbmesser CA, welcher der längsten beyder gegebenen Seiten gleich ist, beschreibe einen Zirkel. Verlängere CB bis in E und bis in D. Ziehe DA und AE. Verlängere AB nach F, und stelle EF senkrecht auf AE.

Nun ist CA = CD = CE. Folglich BD (= CD + CB) = AC + BC und BE (= EC — BC) = AC — BC. Der Winkel DAE ist ein rechter (III. §. 33.), also ist das Dreyeck DAE rechtwinklicht. Folglich ist (§. 3.)

EA, AD :: R, Tg

Der Winkel *h* ist doppelt so groß als der Winkel *g*. Denn im Dreyecke ECA, dessen Seite EC verlängert worden, ist $\angle h = \angle g + \angle CAE$ (IV. §. 11.). Es ist aber $\angle CAE = \angle g$, weil CE = CA (II. §. 24.). Also ist

$\angle h$

$\angle h = 2 \angle g$, oder $\angle g = \frac{1}{2} \angle h$. Setzet man demnach in voriger Proporzion $\frac{1}{2} h$ anstatt g, so ist

EA, AD :: R, $\mathfrak{T} \frac{1}{2} h$.

Ferner ist der auswendige Winkel h im Dreyeck BCA $= \angle i + \angle k$, also ist $\frac{1}{2} h = \frac{1}{2}(i + k)$. Setzet man diesen neuen Werth in die Proporzion, so ist

EA, AD :: R, $\mathfrak{T} \frac{1}{2}(i + k)$

Weil $\triangle$ AEF in E einen rechten Winkel hat, so ist

AE, EF :: R, $\mathfrak{T} m$

Es ist aber $\angle m$ die halbe Differenz der Winkel k und i. Denn

$$k = g + m$$
oder $$m = k - g$$

Es war aber, wie vorher bewiesen, $g (= \frac{1}{2} h) = \frac{1}{2}(k+i)$ $= \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} i$. Setze diesen Werth anstatt g, so ist

$$m = k - \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} i = \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} i = \frac{1}{2}(k - i)$$

Setze diesen Werth des m in die letzte Proporzion, so ist

AE, EF :: R, $\mathfrak{T} \frac{1}{2}(k - i)$

Es war gefunden

AE, AD :: R, $\mathfrak{T} \frac{1}{2}(k + i)$

Daher ist

AD, EF :: $\mathfrak{T} \frac{1}{2}(k + i)$, $\mathfrak{T} \frac{1}{2}(k - i)$.

In den Dreyecken DBA und FBF ist $\angle k = \angle p$, als Scheitelwinkel, ferner $\angle n = \angle o$, als Wechselwinkel, weil AD und EF beyde auf EA senkrecht stehen, und folglich parallel sind. Also ist

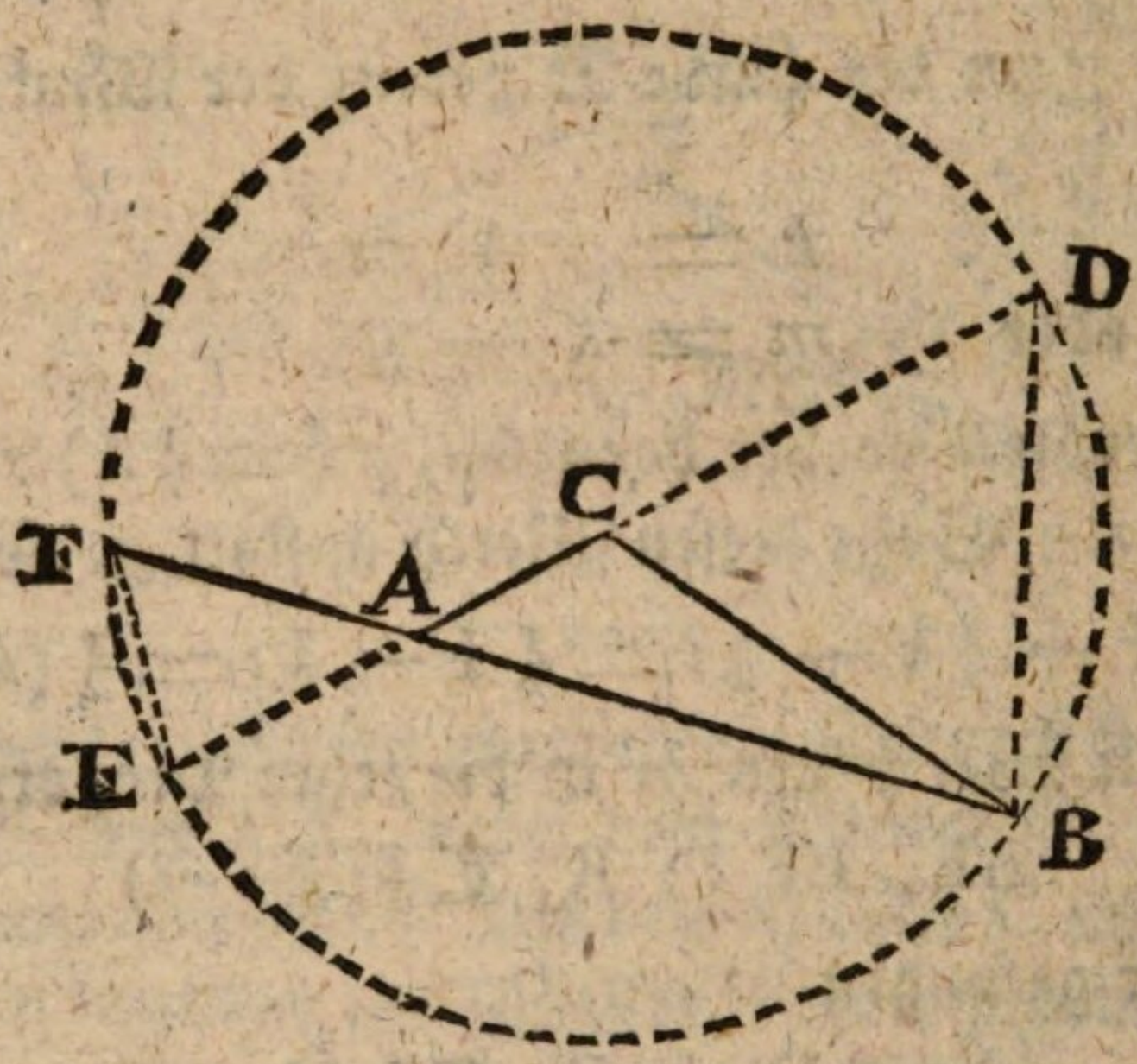
AD, EF :: BD, BE
:: (AC + BC), (AC — BC)

Setzet man dieses neue Verhältniß in die vorige Proporzion, so ist

(AC + BC), (AC — BC) :: $\mathfrak{T} \frac{1}{2}(k + i)$, $\mathfrak{T} \frac{1}{2}(k - i)$

§. 6.

In jedem Dreyecke, wenn man, aus einem Scheitel desselben, mit einem Halbmesser welcher der längsten der beyden anliegenden Seiten gleich ist, einen Zirkel beschreibet, und die dritte Seite bis zum Umkreise verlängert, so verhält sich diese dritte Seite zur Summe der beyden übrigen, wie die Differenz derselben zur Verlängerung.



Im Dreyecke ACB nehme man den Scheitel C. Aus C, mit dem Halbmesser CB, beschreibe man einen Zirkel. Verlängere die dritte Seite BA bis an den Umkreis in F. Verlängere auch CA beyderseits bis an den Umkreis. Ziehe DB und FE.

So entstehen zwey ähnliche Dreyecke ABD und AFE. Denn die Wechselwinkel DAB und EAF sind gleich. Ferner sind die Winkel in D und in F gleich, indem sie beyde auf dem Bogen EB stehen und im Umkreise liegen. Folglich ist auch der Winkel DBA dem Winkel AEF gleich, und die Dreyecke sind ähnlich. Also ist

AB, AD :: AE, AF

Es ist aber $AD = AC + CD = AC + CB$, und $AE = CE - CA = CB - CA$. Also ist

$$AB, (CB + AC) :: (CB - AC), AF.$$

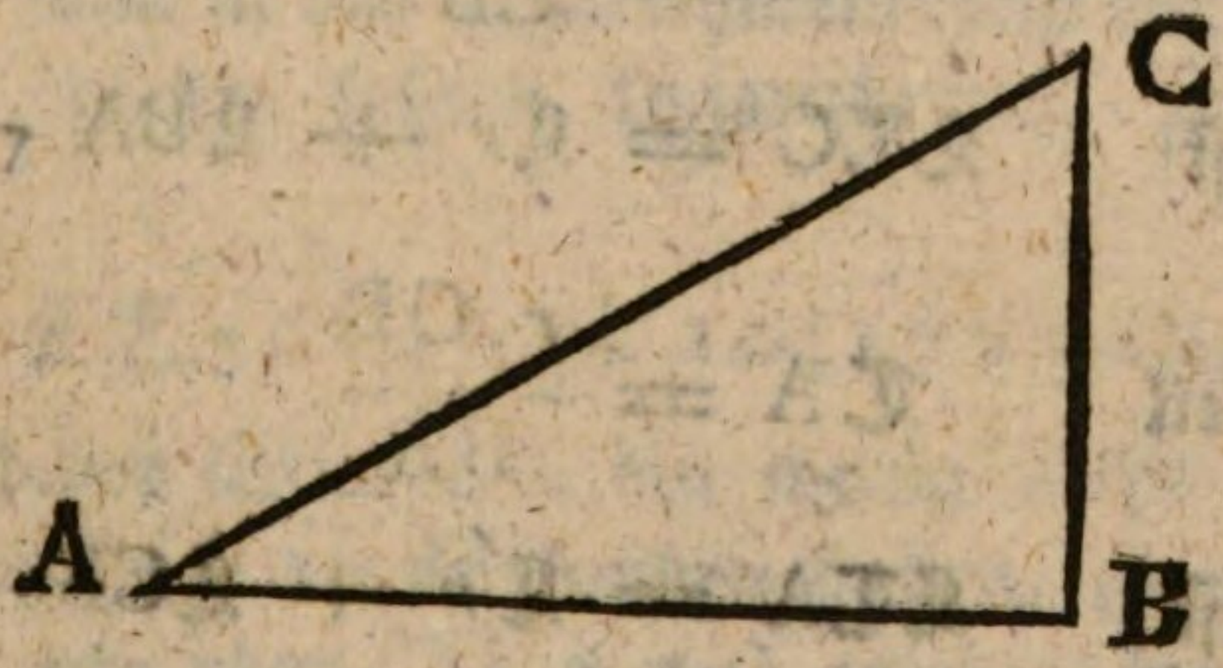
§. 7.

Obige Lehrsätze sind zur Auflösung aller möglichen Fälle der geradlinichten Trigonometrie zureichend. Weil die rechtwinklichen Dreyecke am leichtesten aufzulösen sind, so machet man mit denselben den Anfang. Und da es einmal bekannt ist, daß solche Dreyecke einen rechten Winkel haben, so braucht derselbe in den Aufgaben nicht erwähnt zu werden. Obgleich also nur zwey Größen ausdrücklich gegeben werden, so sind doch eigentlich drey bekannt, wie es die Auflösung jedes Dreyecks erfordert.

§. 8.

Aufgabe.

Aus beyden Katheten eines rechtwinklichen Dreyecks sollen beyde schiefe Winkel, und die Hypotenuse bestimmet werden.



Auflösung. Es seyen gegeben die Katheten AB und BC.

I) Um den einen schiefen Winkel C zu finden, sage man (§. 3)

$$CB, BA :: r, \mathfrak{T}C \left(= \frac{r \cdot BA}{CB}\right)$$

II) Der andere schiefe Winkel wird ebenfalls durch diese Proporzion gefunden

$$AB, BC :: r, \mathfrak{T}A \left(= \frac{r.BC}{BA}\right)$$

Oder, weil die beyden Winkel A und C zusammen 90^g machen, so ist der eine das Komplement des anderen. Wenn man den einen gefunden hat, so ziehe man ihn von 90^g ab; der Rest giebt den andern Winkel.

III) Die Hypotenuse AC zu finden, suche man erstlich den einen Winkel A, und sage (§. 2)

$$AC, CB :: r, \mathfrak{S}A$$

oder umgekehrt

$$\mathfrak{S}A, r :: CB, AC \left(= \frac{r.CB}{\mathfrak{S}A}\right)$$

Will man mit Logarithmen rechnen, welches am bequemsten ist, so bekömmt man folgende Formeln:

I) Weil $\mathfrak{T}C = \frac{r.BA}{CB}$

so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T}C = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}BA - \mathfrak{L}CB.$

II) Weil $\mathfrak{T}A = \frac{r.CB}{BA}$

so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T}A = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}CB - \mathfrak{L}BA$

oder, man suchet wie vorher den Winkel C und subtrahiret ihn von 90°.

III) Weil $AC = \frac{r.CB}{\mathfrak{S}A}$

so ist $\mathfrak{L}AC = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}.CB - \mathfrak{L}\mathfrak{S}A.$

Exem:

Exempel. Es seyen die Seiten AB und BC in irgend einem kleinen Maaße ausgedrücket, z. E. in Hundertheilen eines Zolles. Es sey

$$AB = 7439$$
$$BC = 5004$$

I) Weil $\mathfrak{L}TC = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}BA - \mathfrak{L}CB$

so ist im gegenwärtigen Falle

$$\mathfrak{L}TC = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}7439 - \mathfrak{L}5004$$

Die beyden letzten Logarithmen müssen in den Logarithmentafeln für die natürlichen Zahlen gesuchet werden.

$$\mathfrak{L}7439 = 3;8715146$$
$$\mathfrak{L}5004 = 3;6993172$$

Also $\mathfrak{L}7439 - \mathfrak{L}5004 = 0;1721974$

Es wird in den Logarithmentafeln für die Sinusse und Tangenten angenommen $\mathfrak{L}r = 10$. Also ist

$$\mathfrak{L}TC = 10 + 0;1721974$$

oder $\mathfrak{L}TC = 10;1721974$

Nun suche man in den Logarithmentafeln für Sinusse und Tangenten diesen letzten Logarithmus, so findet man nächstens

$$\mathfrak{L}T\,56^g4' = 10;1721031$$

Folglich ist der Winkel C ein wenig mehr als $56^g4'$. Wollte man noch die Sekunden haben, so müste man sie berechnen, wie oben (XI. §. 79) gelehret worden.

II) Von $90^g0'$

subtrahire $56^g4'$

bleibet $33^g56' = \angle A$

III) Weil $\mathfrak{L}AC = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}CB - \mathfrak{L}SA$, so ist im gegenwärtigen Falle

$$\mathfrak{L}AC = 10 + \mathfrak{L}5004 - \mathfrak{L}S\,33^{g}\,56'$$

oder $\mathfrak{L}AC = 10 + 3;6993172 - 9;7468115$

Von 13;6993172
subtrahire 9;7468115

3;9525057 = $\mathfrak{L}AC$

In den Logarithmentafeln für die natürlichen Zahlen findet man nächstens

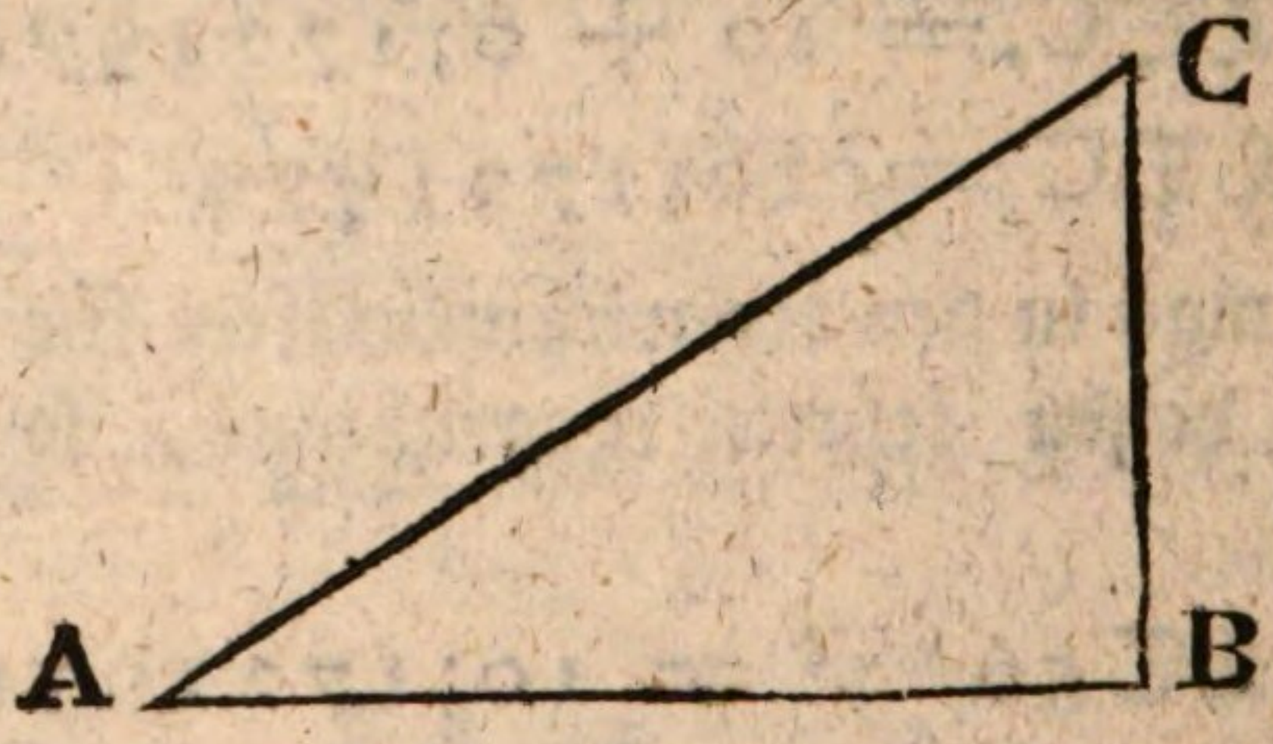
3;9525018 = $\mathfrak{L}8964$

Also ist die Hypotenuse AC = 8964

§. 9.

Aufgabe.

Aus der Hypotenuse und einem Katheten des rechtwinklichen Dreyecks, sollen die schiefen Winkel und der andere Kathete gefunden werden.



Auflösung. Es sey gegeben die Hypotenuse AC mit dem Katheten AB.

I) Der Winkel C wird gefunden, wenn man saget (§. 2).

$$CA,\ AB :: r,\ SC\left(= \frac{r.AB}{AC}\right)$$

II) Der andere Winkel A ist das Komplement des Winkels C.

III)

III) Der Kathete BC wird gefunden, nachdem die Winkel erforschet worden, indem man saget (§. 3)

$$AB, BC :: r, TA$$

oder $$r, TA :: AB, BC \left(= \frac{AB \cdot TA}{r}\right)$$

Will man die Logarithmen gebrauchen, so ist

I) $LSC = Lr + LAB - LAC$

II) $A = 90^g - C$

III) $LBC = LAB + LTA - Lr.$

Exempel. Es sey

$AC = 8964$, so ist $LAC = 3;9525018$

$AB = 7439$, so ist $LAB = 3;8715146$

I) $LSC = 10 + 3;8715146 - 3;9525018$

Von 13;8715146
subtrah. 3;9525018

$LSC = 9;9190128$

Man findet nächstens in den Tafeln

$S(56^g 6') = 9;9190745$

II) $\angle A = 90^g - 56'6'$

Von $90^g 0'$
subtr. $56^g 6'$

$33^g 54'$

III) $LBC = 3;8715146 + 9;8273513 - 10$

Zu 3;8715146
addire 9;8273513

13;6988659
subtr. 10

bleibet 3;6988659 = LBC.

Man findet nächstens $3;6988831 = L4999$

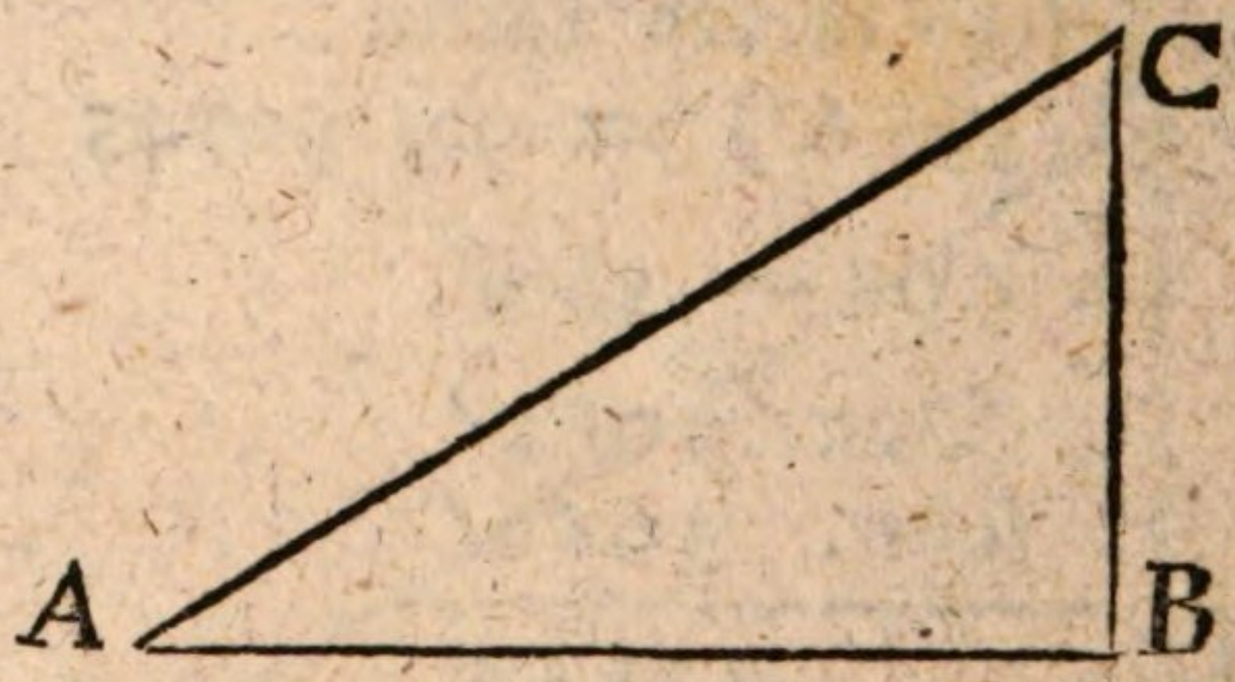
Also wäre $BC = 4999.$

Anmerkung. Man siehet, daß in dieser Aufgabe die gefundenen Zahlen und Winkel von denen, die in voriger Aufgabe angenommen und gefunden worden, ziemlich abweichen. Dieses kömmt daher, weil man in den Tafeln nur die nächsten Zahlen genommen hat. Daraus kann man schließen, wie nothwendig es sey, wenn man genaue Rechnungen zu machen hat, daß man sich vollständige Tafeln anschaffe, wo die Bogen von 10 zu 10 Sekunden und die Logarithmen der natürlichen Zahlen bis auf 100000 berechnet sind. Sonst ist es eine etwas langwierige Arbeit, die nöthigen Näherungen zu suchen.

§. 10.

Aufgabe.

Aus einem Katheten und einem schiefen Winkel den anderen Katheten und die Hypothenuse bestimmen.



Auflösung. Es sey gegeben der Kathete AB, und einer der Winkel C oder A. Wenn C gegeben ist, so ziehe man C von 90s ab, so hat man A, das ist, den schiefen Winkel der an dem gegebenen Katheten lieget.

I) Um BC zu finden, sage man (§. 43)

AB, BC :: r, TA

oder r, TA :: AB, BC $\left(= \frac{AB \cdot TA}{r}\right)$

II)

II) Um die Hypotenuse AC zu finden, sage man (§. 2)

$$AC, AB :: r, \mathfrak{S}C$$

oder $\mathfrak{S}C, r :: AB, AC \left(= \frac{r.AB}{\mathfrak{S}C}\right)$

Ist nicht C sondern A gegeben, so findet man C, wenn man A von 90^g abziehet.

Will man mit Logarithmen rechnen, so hat man

I) $\mathfrak{L}BC = \mathfrak{L}AB + \mathfrak{L}\mathfrak{T}A - \mathfrak{L}r$
II) $\mathfrak{L}AC = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}AB - \mathfrak{L}\mathfrak{S}C.$

Exempel. Es sey

$AB = 7439$, so ist $\mathfrak{L}AB = 3;8715146$
$\angle A = 33^g\,56'$, so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T}A = 9;8278969$
folglich $\angle C = 56^g\,4'$, so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{S}C = 9;9189146$

Also wird

I) $\mathfrak{L}BC = 3;8715146 + 9;8278969 - 10$

Zu 3;8715146
addire 9;8278969
13;6994115
subtr. 10
3;6994115 $= \mathfrak{L}BC$

Man findet in den Tafeln nächstens
3;6994041 $= \mathfrak{L}$ 5005.
Also ist beynahe BC $=$ 5005.

II) $\mathfrak{L}AC = 10 + 3;8715146 - 9;9189146.$

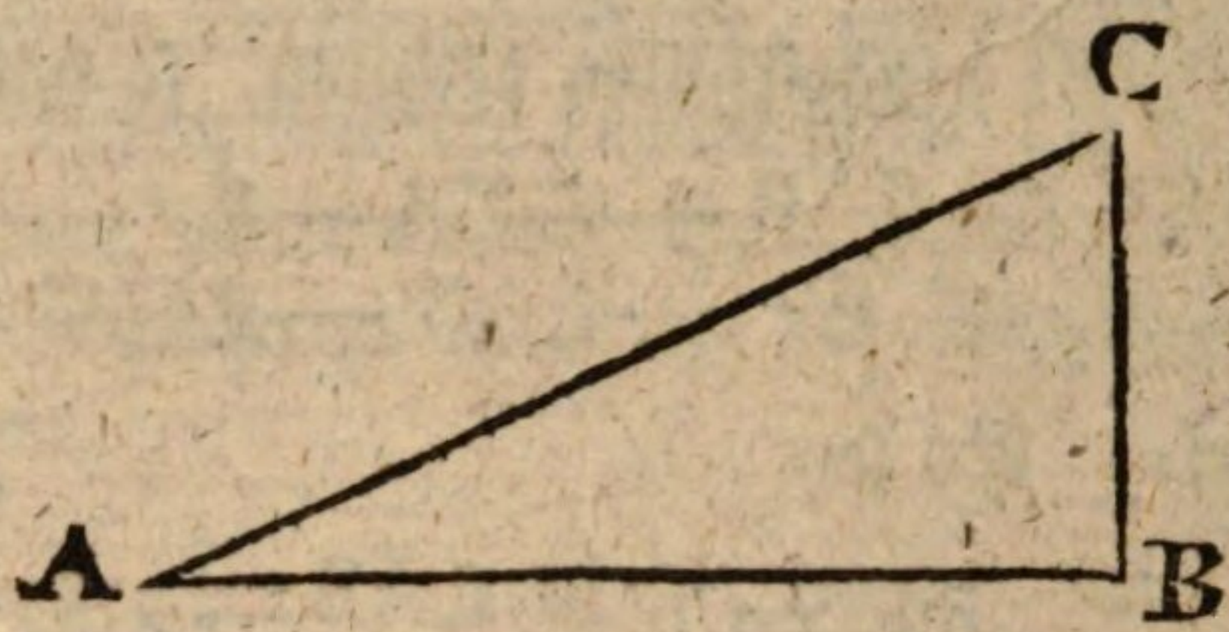
Von 13;8715146
subtrahire 9;9189146
3;9526000

Hierzu findet man nächstens in den Tafeln
3;9525987 $= \mathfrak{L}$ 8966.
Also ist die Hypotenuse beynahe $=$ 8966.

§. 11.

Aufgabe.

Aus der Hypotenuse und einem schiefen Winkel, die beyden Katheten finden.



Auflösung. Es sey gegeben die Hypotenuse AC und einer der Winkel A oder C. Wenn ein Winkel gegeben ist, so ist der andere auch gegeben, weil er dessen Komplement ist.

Um die Seiten BC und *AB* zu finden, sage man (§. 2)

I) AC, BC :: *r*, S A

oder *r*, SA :: AC, BC $\left(= \frac{AC.\ SA}{r}\right)$

II) AC. AB :: *r*, SC

oder *r*, SC :: AC. AB $\left(= \frac{AC.\ SC}{r}\right)$

Will man mit Logarithmen rechnen, so ist

I) LBC = LAC + LSA — L*r*

II) LAB = LAC + LSC — L*r*

Exempel. Es sey

AD = 8964, so ist LAC = 3;9525018
∠A = 33^g 56′ so ist LSA = 9;7468115
∠C = 56^g 4′, so ist LSC = 9;9189146.

Also

Also wird

I) $\mathfrak{L}BC = 3;9525018 + 9;7468115 - 10$

zu 3;9525018
addire 9;7468115

13;6993133
subtr. 10

3;6993133

Hierzu findet man nächstens

3;6993173 = $\mathfrak{L}$ 5004

Also ist BC beynahe = 5004.

II) $\mathfrak{L}AB = 3;9525018 + 9;9189146 - 10$

Zu 3;9525018
addire 9;9189146

13;8714164
10

3;8714164

Hierzu findet man nächstens

3;8714562 = $\mathfrak{L}$ 7438

Also ist AB beynahe = 7438

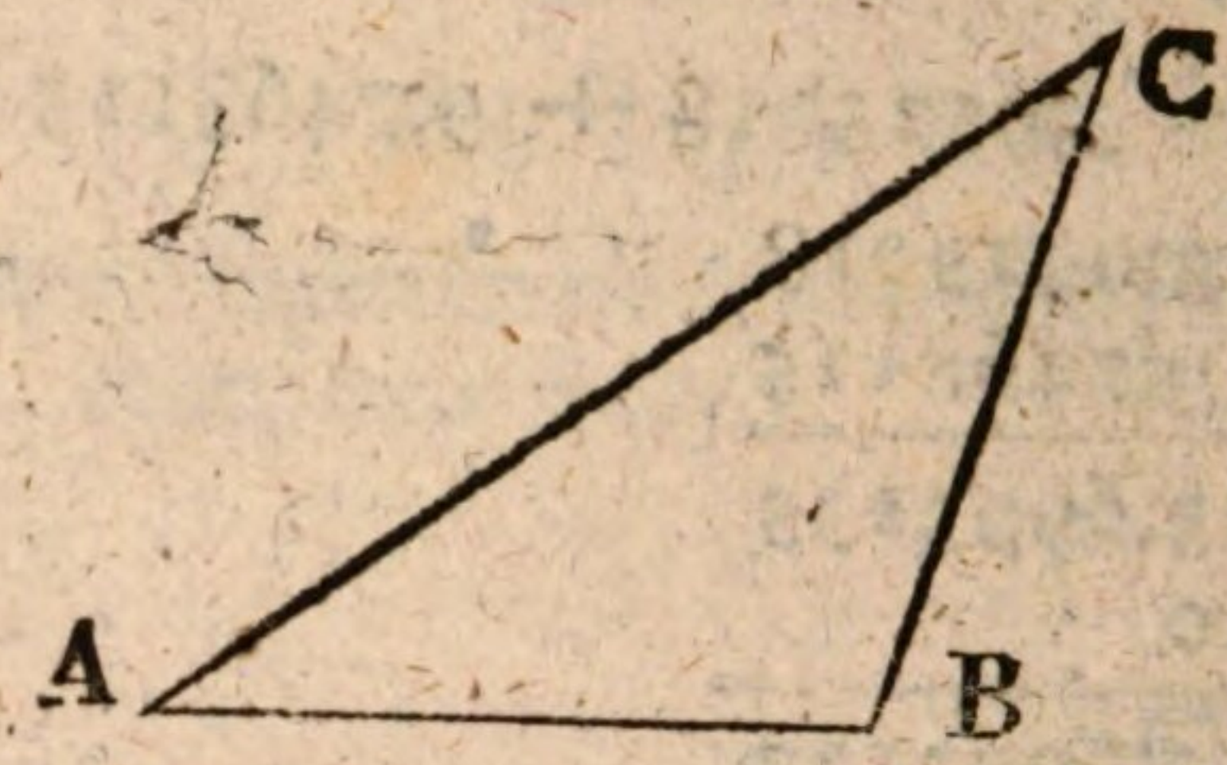
Anmerkung. Vorige Aufgaben beziehen sich alle auf die rechtwinklichen Dreyecke. Die folgenden betreffen die Dreyecke aller Art überhaupt, vornemlich die schiefwinklichen.

§. 12.

Aufgabe.

Es sind in einem Dreyecke eine Seite und zwey Winkel gegeben, man soll die beyden andern Seiten finden.

Auf-



Auflösung. Es sey im Dreyecke ABC die Seite AB nebst zwey Winkeln A und B oder B und C oder *A* und C gegeben. Sind zwey Winkel bekannt, so bekömmt man allemal den dritten, wenn man die Summen der beyden von 180 Grad abziehet. Man kann also die drey Winkel als bekannt annehmen.

I) Um die Seite BC zu finden, sage (§. 4).

$$\sin C, \sin A :: AB, BC \left(= \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C}\right)$$

II) Um die Seite *AC* zu finden, sage

$$\sin C, \sin B :: AB, AC \left(= \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C}\right)$$

Will man mit Logarithmen rechnen, so hat man

I) $\log BC = \log AB + \log \sin A - \log \sin C$

II) $\log AC = \log AB + \log \sin B - \log \sin C.$

Exempel. Es sey AB = 701

$\angle A = 38^g\ 15'$

$\angle C = 29^g\ 59'$

so ist $\angle A + \angle C = 68^g\ 14'$

Von $180^g\ 0'$

subtrah. $68^g\ 14'$

bleibet $\angle B$ $111^g\ 46'$

Nun

Nun ist $\mathfrak{L}$ 701 = 2;8457180

$\mathfrak{L}\mathfrak{S}$ 38^g $15' = 9;7917566$

$\mathfrak{L}\mathfrak{S}$ 29^g $59' = 9;6987511$

und weil $\mathfrak{S}$ $111^g 46' = \mathfrak{S}$ $180^g - 111^g 46' = \mathfrak{S}$ $68^g 14'$

so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{S}$ $111^g 46' = 9;9678763$

Also wird

I) $\mathfrak{L}$ BC = 2;8457180 + 9;7917566 − 9;6987511

Zu	2;8457180
adddire	9;7917566
	12;6374746
subtr.	9;6987511
	2;9387235 = $\mathfrak{L}$ BC

Zu diesem Logarithmus gehöret nächstens die Zahl 868.

Folglich ist BC beynahe = 868

II) $\mathfrak{L}$ AC = 2;8457180 + 9;9678763 − 9;6987511

Zu	2;8457180
addire	9;9678763
	12;8135943
subtr.	9;6987511
	3;1148432 = $\mathfrak{L}$ AC

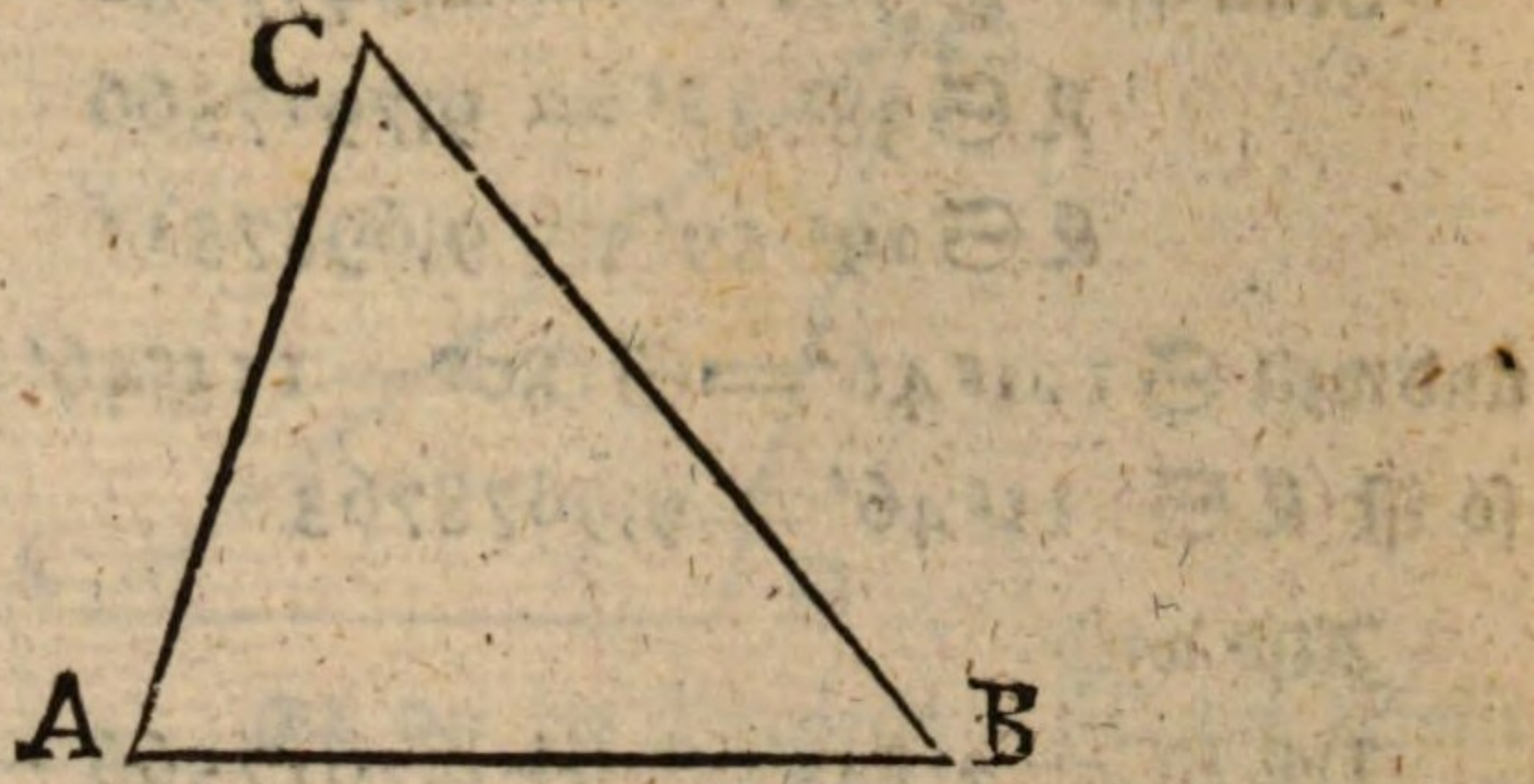
Hierzu ist die nächste Zahl 1302. Also ist AC beynahe = 1301.

§. 13.

Aufgabe.

Es werden zwey Seiten, nebst einem Gegenwinkel derselben gegeben. Man soll die beyden übrigen Winkel und die dritte Seite finden.

Auf-



Anflösung. Im Dreyecke ABC seyen gegeben die beyden Seiten AC und BC, nebst dem Winkel B, der der einen gegebenen Seite gegenüber stehet.

I) Um den Winkel A zu finden, sage man (§. 4)

$$AC, BC :: \sin B, \sin A \left(= \frac{BC . \sin B}{AC}\right)$$

II) Man addire die Winkel B und A, und subtrahire die Summe von 180^g, so bekömmt man den Winkel C.

III) Um die Seite AB zu finden, sage man, nachdem der Winkel C gefunden (§. 4.)

$$\sin B, \sin C :: AC, AB \left(= \frac{AC . \sin C}{\sin B}\right)$$

Wenn man mit Logarithmen rechnet, so ist

1) $\mathfrak{L} \sin A = \mathfrak{L} BC + \mathfrak{L} \sin B - \mathfrak{L} AC$
2) $\angle C = 180^g - (B + A)$
3) $\mathfrak{L} AB = \mathfrak{L} AC + \mathfrak{L} \sin C - \mathfrak{L} \sin B.$

Exempel. Es sey $BC = 156$
$AC = 139$
$\angle B = 32^g\ 30'$

so ist $\mathfrak{L} BC = \mathfrak{L}\ 156 = 2;1931246$
$\mathfrak{L} AC = \mathfrak{L}\ 139 = 2;1430148$
$\mathfrak{L} \sin B = \mathfrak{L} \sin 32^g 30' = 9;7302165$

Folg:

Folglich ist

I) $\mathfrak{L}\mathfrak{S}A = 2;1931246 + 9;7302165 - 2;1430148$

Zu	2;1931246
addire	9;7302165
	11;9233411
subtr.	2;1430148
	9;7803263 $= \mathfrak{L}\mathfrak{S}A$

Dieser Logarithmus gehöret nächstens zu $37^g\ 5'$, welches also beynahe der Winkel A ist.

II) $\angle C = 180^g - (32^g\ 30' + 37^g\ 5')$

oder $\angle C = 180^g - 69^g\ 35'$.

Von	$180^g\ 0'$
subtr.	$69^g\ 35'$
	$110^g\ 25' = \angle C$

Und es ist ferner $\mathfrak{S}\,110^g\,25' = \mathfrak{S}(180^g - 110^g\,25') = \mathfrak{S}\,69^g\,35'$, folglich ist

$\mathfrak{L}\mathfrak{S}C = \mathfrak{L}\mathfrak{S}\,69^g\,35' = 9;9718233.$

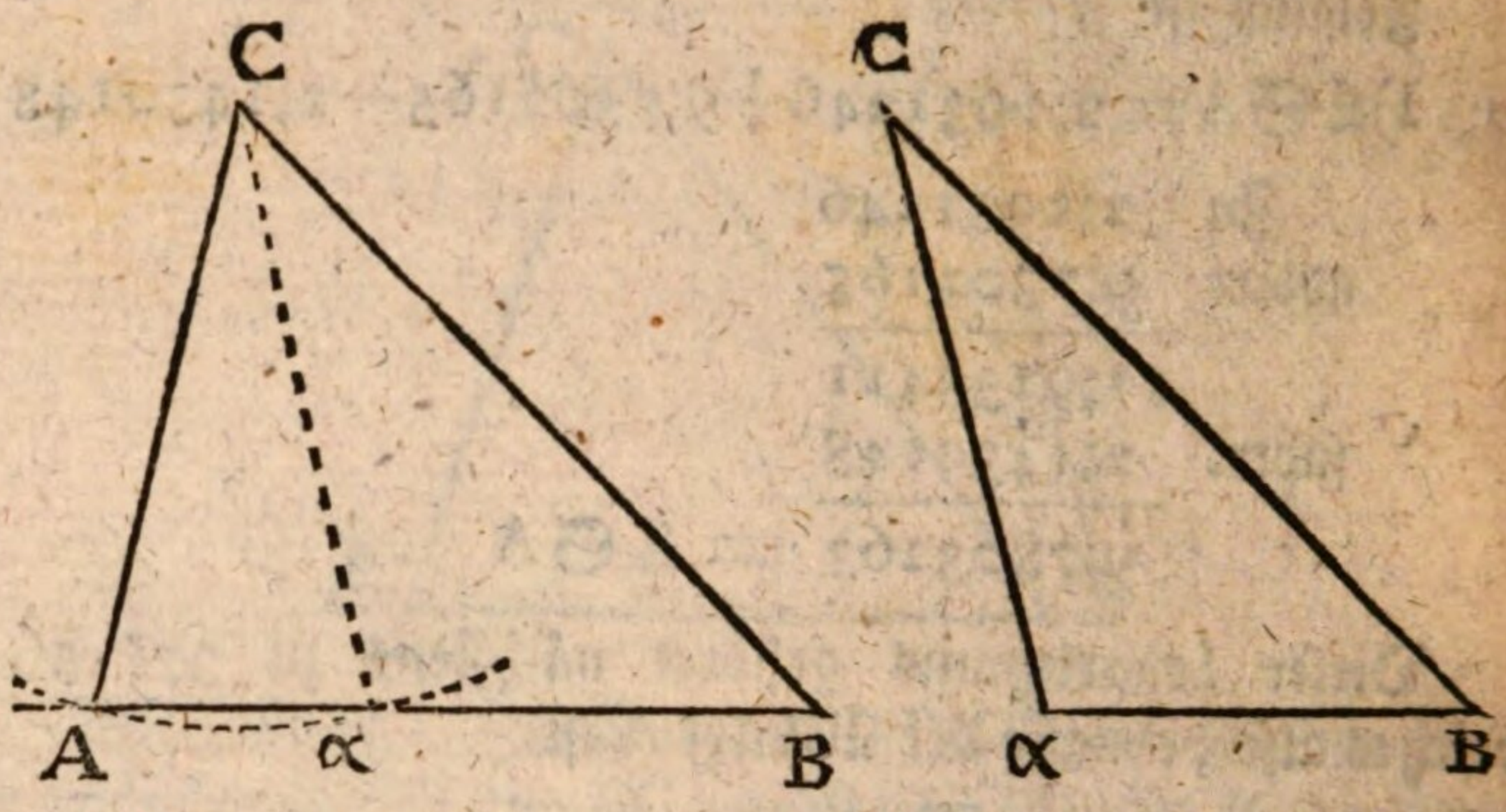
III) Also ist

$\mathfrak{L}AB = 2;1430148 + 9;9718233 - 9;7302165.$

Zu	2;1430148
addire	9;9718233
	12;1148381
subtr.	9;7302165
	2;3846216 $= \mathfrak{L}AB$

Hierzu ist die nächste Zahl 242. Also ist ohngefähr $AB = 242$.

Zusatz.



Zusatz. Es sey, wie in vorigem Exempel angenommen worden, die Seite AC, die dem gegebenen Winkel B gegenüberstehet, kleiner als die andere gegebene Seite BC. Aus dem Mittelpunkte C, mit dem Halbmesser CA beschreibe einen Bogen, so wird er die Seite AB in α schneiden und es wird seyn Cα = CA. Folglich hat das stumpfwinkliche Dreyecke CαB die nemlichen zwey Seiten Cα und BC und den nemlichen Winkel B als das spitzwinkliche CAB, und beyde leisten der Aufgabe ein Genüge. Es muß also in der Aufgabe bestimmt werden, ob der andere Winkel *A* oder α, der der gegebenen Seite BC gegenüber stehet, spitzig oder stumpf ist.

In der Auflösung ist vorausgesetzt worden, daß der Winkel A spitzig ist. Wir wollen nun die Rechnung für den Fall machen, wo der Winkel α stumpf ist.

Man fand für den Winkel A

$$\mathfrak{L}\mathfrak{S}A = 9{;}7803263$$

wozu nächstens der Winkel 37^g 5′ gehöret. Man merke aber, daß der Sinus eines Winkels A zugleich der Sinus des Supplements desselben Winkels ist, und folglich ist auch der Logarithmus des Sinus für einen Winkel A, der Logarithmus des Sinus für dessen Supplement oder für 180^g — A. Also gehöret der gefundene Logarith-

rithmus nicht nur zu $37^g\ 5'$, sondern auch zu $180^g - 37^g\ 5'$ das ist zu $142^g\ 55'$ und dieses ist der stumpfe Winkel α.

Es ist also $\angle B = 32^g\ 30'$

$\angle \alpha = 142^g\ 55'$

$\angle B + \angle \alpha = 175^g\ 25'$.

Von $180^g\ 0'$
subtr. $175^g\ 25'$
bleibet $\angle C = 4^g\ 35'$

und es ist

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,C = \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,4^g\ 35' = 8;9025956.$$

Es ist nun

$$\mathfrak{L}\,AB = \mathfrak{L}\,AC + \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,C - \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,B$$

daher wird in diesem Falle

$$\mathfrak{L}\,AB = 2;1430148 + 8;9025955 - 9;7302165.$$

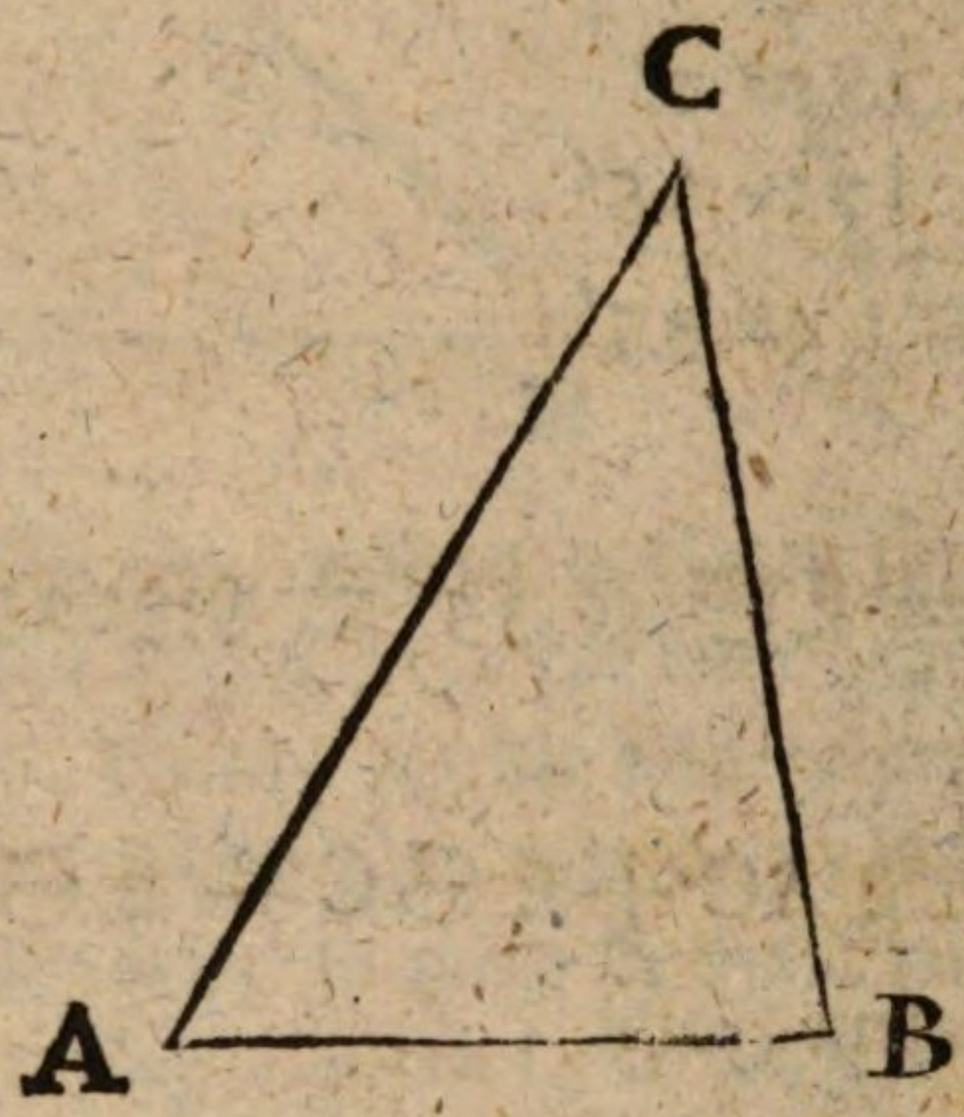
Zu 2;1430148
addire 8;9025955
11;0456103
subtrahire 9;7302165
1;3153938 $= \mathfrak{L}\,AB$.

Die Zahl, die zu diesem Logarithmus gehöret, fällt zwischen 20 und 21, also ist $AB = 20 +$ ein Bruch. Will man sie genauer bestimmen, so suche man in den Tafeln den Logarithmus 3;3153938: so findet man nächstens 2067. Weil man den Logarithmus um 2 Einheiten vergrößert hat, so schneide von 2 Dezimalbrüche ab. Alsdann bekömmt man 20;67 als den nächsten Werth von AB.

§. 14.

Aufgabe.

Es werden zwey Seiten eines Dreyecks, nebst dem Zwischenwinkel gegeben. Man soll die beyden übrigen Winkel und die dritte Seite finden.



Auflösung. Es seyen gegeben die Seiten AC und BC nebst dem Zwischenwinkel C. Wenn man von 180 Graden den Winkel C abziehet, so bleibet die Summe der Winkel A und B. Dividiret man durch 2, so hat man die halbe Summe derselben. Ferner merke man, daß von den gesuchten Winkeln der größere B auch der größeren Seite AC und der kleinere A der kleineren Seite BC gegenüber stehet.

I) Um nun den größeren Winkel B zu finden, sage man (§. 5.)

$(AC+BC), (AC-BC) :: \mathfrak{T}\frac{1}{2}(B+A), \mathfrak{T}\frac{1}{2}(B-A)$

daher $\mathfrak{T}\frac{1}{2}(B-A) = \frac{(AC-BC).\,\mathfrak{T}\frac{1}{2}(B+A)}{AC+BC}$

Wenn nun $\frac{1}{2}(B-A)$ das ist, die halbe Differenz der Winkel gefunden, so addire man sie zur halben Summe, um den größeren Winkel B zu bekommen.

II)

II) Um den kleineren Winkel A zu bekommen, subtrahire man die halbe Differenz der Winkel von der halben Summe derselben.

III) Um die Seite *AB* zu bekommen, nachdem die Winkel gefunden, sage man

$$\text{S}B, \text{S}C :: AC, AB \left(= \frac{AC.\,\text{S}C}{\text{S}B}\right)$$

oder

$$\text{S}A, \text{S}C :: BC, AB \left(= \frac{BC.\,\text{S}C}{\text{S}A}\right)$$

Wenn man mit Logarithmen rechnet, so ist

$$\text{I)}\ \text{L}\,\text{T}\tfrac{1}{2}(B-A) = \text{L}(AC-BC) + \text{L}\,\text{T}\tfrac{1}{2}(B+A) - \text{L}(AC+BC)$$

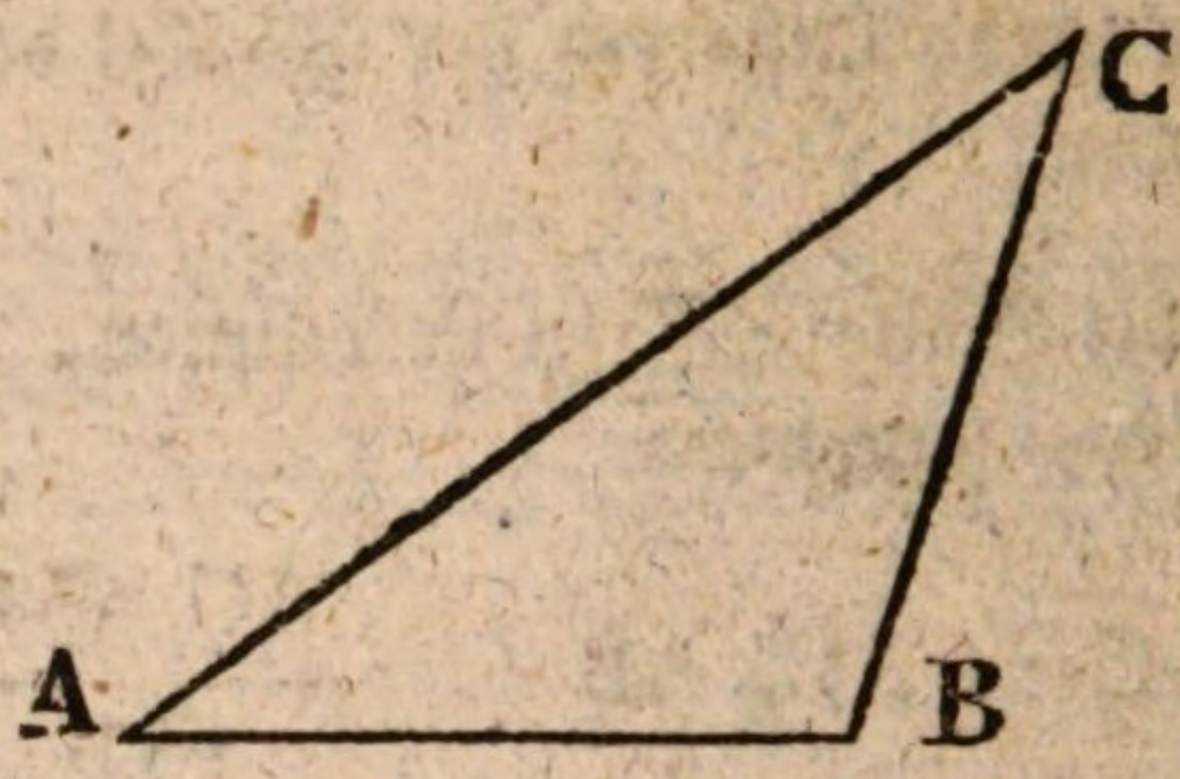
Wenn nun $\text{T}\frac{1}{2}(B-A)$ gefunden, so findet man in den Tafeln die halbe Differenz $\frac{1}{2}(B-A)$, welche mit der halben Summe $\frac{1}{2}(B+A)$ den größeren Winkel B giebet.

II) Der kleinere Winkel A wird, wie schon gesagt, gefunden, indem man die halbe Differenz von der halben Summe abziehet.

$$\text{III)}\ \text{L}\,AB = \text{L}\,AC + \text{L}\,\text{S}C - \text{L}\,\text{S}B$$

oder auch $\text{L}\,AB = \text{L}\,BC + \text{L}\,\text{S}C - \text{L}\,\text{S}A$

(Siehe die folgende Figur.)



Exempel. Im Dreyecke ABC, sey der Winkel

$$C = 21^g\ 52'$$
$$BC = 202$$
$$AC = 246$$

So ist $AC + BC = 246 + 202 = 448$

$AC - BC = 246 - 202 = 44$

$A + B = 180^g - 21^g\ 52' = 158^g\ 8'$

$\frac{1}{2}(A + B) = 79^g\ 4'$

Ferner findet man in den Tafeln

$\mathfrak{L}(AC + BC) = \mathfrak{L}\,448 = 2;6512780$

$\mathfrak{L}(AC - BC) = \mathfrak{L}\,44 = 1;6434527$

$\mathfrak{L}\mathfrak{T}\frac{1}{2}(A + B) = \mathfrak{L}\mathfrak{T}\,79^g\ 4' = 10;7140534$

Also wird

I) $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\frac{1}{2}(B - A) = 1;6434527 + 10;7140534 - 2;6512780$

Zu 1;6434527
addire 10;7140534
12;3575061
subtr. 2;6512780
9;7062281 = $\mathfrak{L}\,\mathfrak{T}\frac{1}{2}$(B — A)

Hierzu findet man nächstens $26^g\ 57'$ als die halbe Differenz.

Zur halben Summe $79^g\ 4'$
addire die halbe Differenz $26^g\ 57'$
$106^g\ 1' = \angle B.$

II) Von der halben Summe $79^g\ 4'$
subtrahire die halbe Differenz $26^g\ 57'$
$52^g\ 7' = \angle A.$

III) Es war

$$\mathfrak{L}\,AB = \mathfrak{L}\,BC + \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,C - \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,A$$

also $\mathfrak{L}\,AB = \mathfrak{L}\,202 + \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,21^g\ 52' - \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\,52^g\ 7'$

oder $\mathfrak{L}\,AB = 2;3053514 + 9;5710656 - 9;8972216$

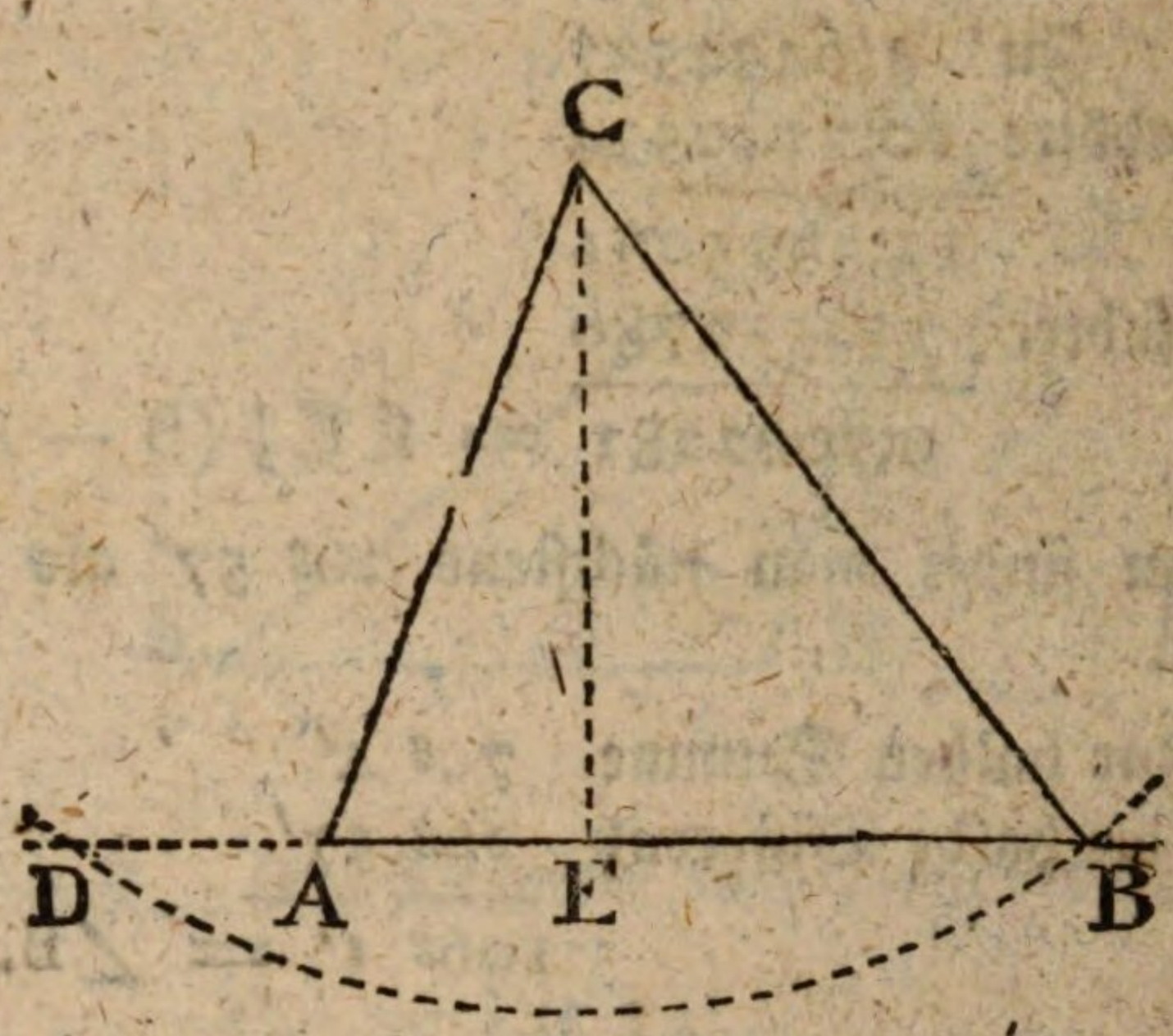
Zu 2;3053514
addire 9;5710656
11;8764170
subtr. 9;8972216
1;9791954 = $\mathfrak{L}\,AB$.

Man suche den Logarithmus 3;9791954, so findet man die Zahl 9532. Man schneide zwey Dezimalbrüche ab, so hat man beynahe AB = 95;32.

§. 15.

Aufgabe.

Es sind die drey Seiten eines Dreyeckes gegeben; man soll die drey Winkel finden.



Auflösung. Es seyen gegeben die Seiten AC, AB, BC, des Dreyeckes ABC. Verlängere eine Seite, als BA. Aus dem gegenüberstehenden Scheitel C, mit dem Halbmesser CB, als der längsten der beyden übrigen Seiten, beschreibe einen Zirkel, und merke den Punkt D, wo er die verlängerte Seite schneidet.

Nun ist (§. 6.)

$$AB, (BC + AC) :: (BC - AC), AD$$

$$\text{daher } AD = \frac{(BC \pm AC).(BC - AC)}{AB}$$

Weil nun AD gefunden, und auch AB bekannt ist, so hat man

$$BD = AB + AD.$$

Vom Mittelpunkte C des Zirkels ziehe auf die Sehne DB, die winkelrechte Linie CE, so ist DB in zwey gleiche Theile getheilet, und es ist

$$BE = \tfrac{1}{2} BD = \tfrac{1}{2} (AB + AD) = \tfrac{1}{2} AB + \tfrac{1}{2} AD$$

Ferner ist

$$AE = AB - BE = AB - \tfrac{1}{2} AB - \tfrac{1}{2} AD$$
$$= \tfrac{1}{2} AB - \tfrac{1}{2} AD$$

I) Alles vorige vorausgesetzt, so sind im rechtwinklichen Dreyecke CEB die Hypotenuse CB und der Kathete BE bekannt, woraus der Winkel B gefunden wird, nemlich es ist

$$CB, BE :: r, \mathfrak{S}BCE.$$

Es ist aber der Winkel BCE das das Komplement des Winkels B, folglich ist $\mathfrak{S}BCE = \mathfrak{S}'B$, und es ist

$$CB, BE :: r, \mathfrak{S}'B \left(= \frac{r.BE}{CB}\right)$$

II) Im rechtwinklichen Dreyeck CEA ist ebenfalls

$$CA, AE :: r, \mathfrak{S}ACE$$

$$\text{oder } CA, AE :: r, \mathfrak{S}'A \left(= \frac{r.AE}{AC}\right)$$

III) Der dritte Winkel C oder ACB wird gefunden, wenn man die Summe der beyden anderen von 180 Graden abziehet.

Will man mit Logarithmen rechnen, so findet man anfänglich AD vermittelst dieser Formel

$$\mathfrak{L}AD = \mathfrak{L}(BC + AC) + \mathfrak{L}(BC - AC) - \mathfrak{L}AB$$

Wenn AD gefunden worden, so addiret man sie zu AB. Man halbiret die Summe und bekömmt BE. Man subtrahiret BE von AB und bekömmt AE. Hierauf berechnet man die Winkel also:

I) $\mathfrak{L}\mathfrak{S}'B = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}BE - \mathfrak{L}BC$

II) $\mathfrak{L}\mathfrak{S}'A = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}AE - \mathfrak{L}AC$

III) $\angle C$ ist das Supplement der beyden vorigen.

Exempel. Es sey

AB = 246
BC = 202
AC = 193

so ist AC + BC = 395
BC — AC = 9

Ferner ist vermöge der Tafeln

L AB = 2;3909351
L BC = 2;3053514
L AC = 2;2855573
L (AC + BC) = 2;5965971
L (BC — AC) = 0;9542425.

Also, weil

L AD = L (BC + AC) + L (BC — AC) — L AB

so ist L AD = 2;5965971
+ 0;9542425
3;5508396
— 2;3909351
1;1599045

Hierzu ist nächstens die Zahl 14;46 = AD.

Zu 14;46 = AD
addire 246;00 = AB
260;46 = BD
div. 2) 130;23 = BE

Von 246;00 = AB
subtrahire 130;23 = BE
115;77 = AE.

Nun

Nun berechne man die Winkel.

I) Es ist $\mathfrak{L} S'B = \mathfrak{L} r + \mathfrak{L} BE - \mathfrak{L} BC$.

Zu 10;0000000 $= \mathfrak{L} r$
addire 2;1146110 $= \mathfrak{L} BE = \mathfrak{L}$ 130;2...
12;1146110
subtrah. 2;3053514 $= \mathfrak{L} BC$
9;8092596 $= \mathfrak{L} S'B$.

Zu diesem Logarithmus gehöret ohngefähr ein Winkel von 49^g 52′

II) Es ist $\mathfrak{L} S'A = \mathfrak{L} r + \mathfrak{L} AE - \mathfrak{L} AC$.

Zu 10;0000000 $= \mathfrak{L} r$
addire 2;0637086 $= \mathfrak{L} AE = \mathfrak{L}$ 115;8..
12;0637086
subtr. 2;2855573 $= \mathfrak{L} AC$
9;7781513 $= \mathfrak{L} S'A$.

Hierzu gehöret nächstens ein Bogen 53^g 8′.

III) Es ist also

$\angle B = 49^g\ 52'$
$\angle A = 53^g\ 8'$
$\angle B + \angle A = 103^g$

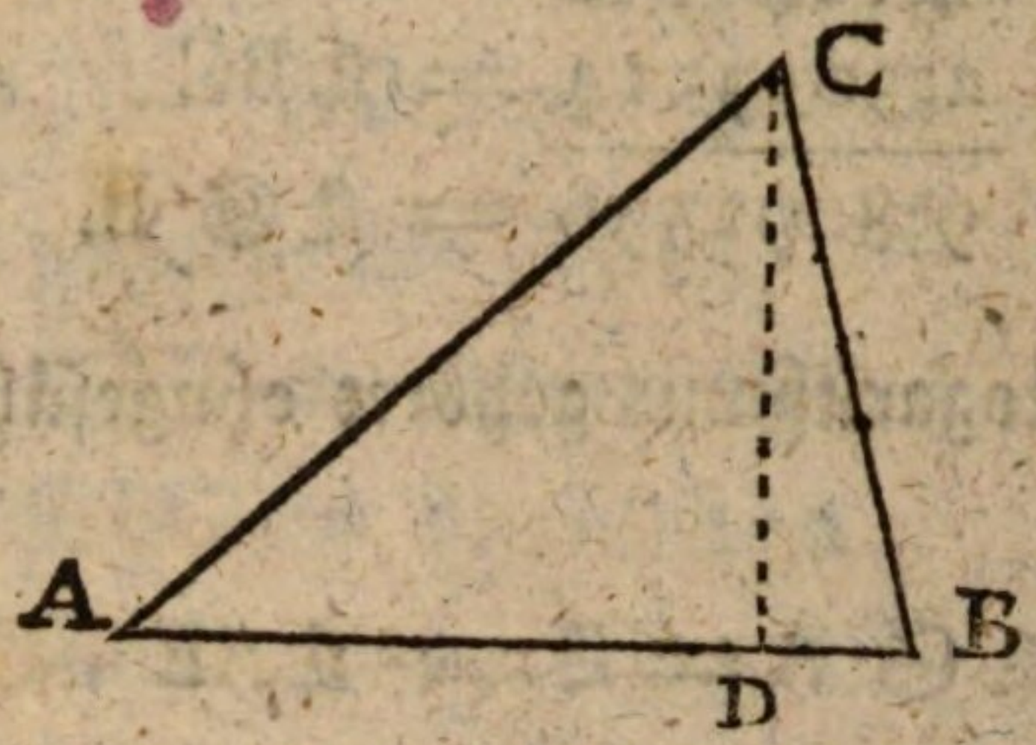
Von 180^g
subtrah. 103^g
$77^g = \angle ACB$.

und so sind die drey Winkel bestimmet.

§. 16.

Aufgabe.

Wenn zwey Seiten eines Dreyeckes, nebst dem Winkel den sie einschließen, bekannt sind, den Flächen-Inhalt des Dreyecks finden.



Auflösung. Im Dreyeck ABC seyen die Seiten AB und BC nebst dem Winkel B bekannt. Man ziehe CD auf AB winkelrecht, so hat man im rechtwinklichen Dreyeck CDB die Hypotenuse CB und den Winkel B. Daraus wird CD gefunden, indem man saget:

$$CB, CD :: r, SB$$

$$\text{oder} \quad r, SB :: CB, CD \left(= \frac{CB \cdot SB}{r}\right)$$

Wenn nun AB als die Grundlinie und CD als die Höhe des Dreyecks angesehen wird, so entstehet der Flächen-Inhalt, indem man AB mit CD multiplizirt, und durch 2 dividirt. Also ist

$$\text{Inhalt} = \frac{AB \cdot CB \cdot SB}{2r}$$

$$\text{oder } L(\text{Inhalts}) = LAB + LCB + LSB - (L2 + Lr)$$

Exempel.

Es sey $AB = 208$

$BC = 93$

$\angle B = 53^{g}\ 14'$

so

so ist L AB = 2;3180633
L BC = 1;9684829
L ⊜B = 9;9036757

Ferner ist L 2 = 0;3010300
L r = 10
folgl. L 2 + L r = 10;3010300

Zu 2;3180633 = L AB
addire 1;9684829 = L BC
und 9;9036757 = L ⊜B

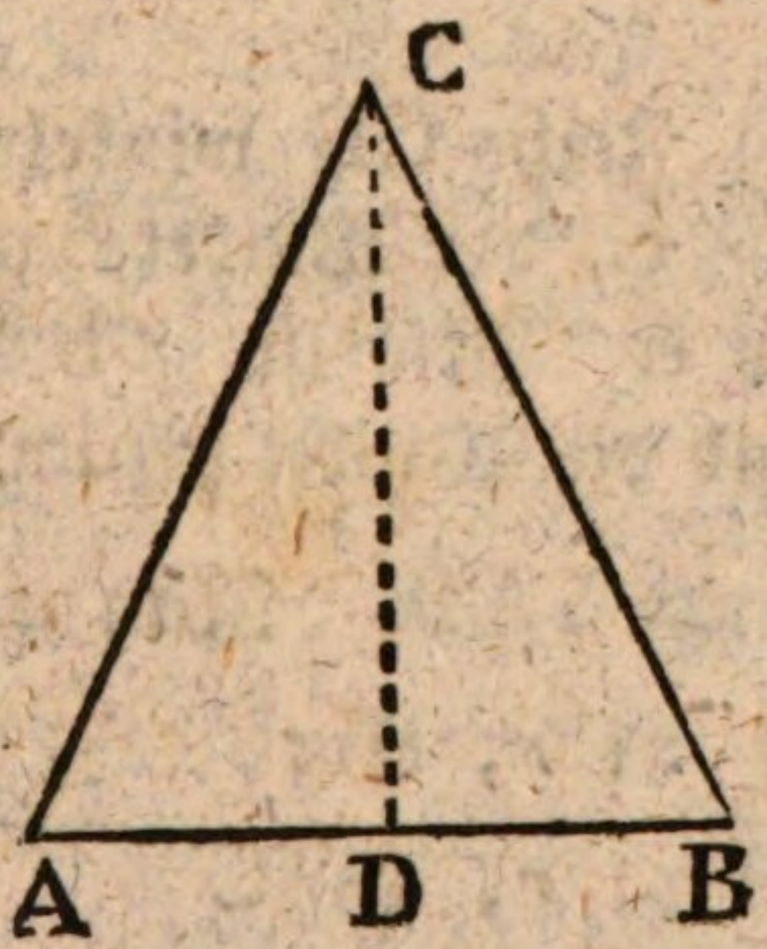
14;1902219 = L AB + L BC + L ⊜B
subtr. 10;3010300

3;8891919 = L (Inhalts)

Hierzu gehöret nächstens die Zahl 7748, welche also den Inhalt des Dreyecks ausdrücket.

§. 17.

Ein gleichschenkliches Dreyeck kann allemal in zwey identische rechtwinkliche Dreyecke aufgelöset werden.



Denn wenn man die ungleiche Seite zur Grundlinie annimmt, und von dem gegenüberstehenden Scheitel C den Perpendikel CD fället, so hat man die rechtwinklichen Dreyecke CDB und CDA, welche identisch sind. Denn

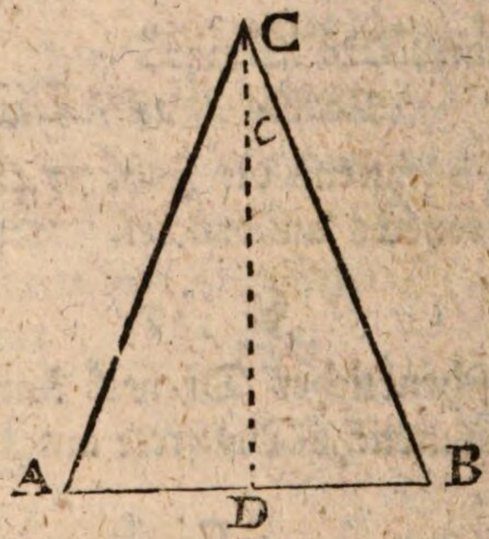
die

die beyden Winkel in D sind gleich, weil sie beyde recht sind. Die Winkel A und B sind auch gleich, weil das Dreyeck ACB gleichschenklich ist. Also sind die beyden Winkel in C gleich. Ferner ist $CB = CA$ und $CD = CD$. Da nun auch $\angle DCB = \angle DCA$, so ist $\triangle CDB \cong \triangle CDA$.

§. 18.

Aufgabe.

In einem gleichschenklichen Dreyecke ABC ist die Grundlinie AB und der Gegenwinkel C gegeben. Man soll die Winkel A und B, wie auch die Seiten CB und CA bestimmen.



Auflösung. I) Ziehe CD winkelrecht auf AB, so ist der Winkel $e = \frac{1}{2}\angle C$, der Winkel B ist aber das Komplement des Winkels e. Also ist $\angle B = \angle A = 90^{g} - \frac{1}{2}\angle C$, und so sind die Winkel bestimmet.

II) Es ist $DB = \frac{1}{2}AB$. Nun ist

$BC, BD :: r, Se$

oder $BC, \frac{1}{2}AB :: r, S\frac{1}{2}C$

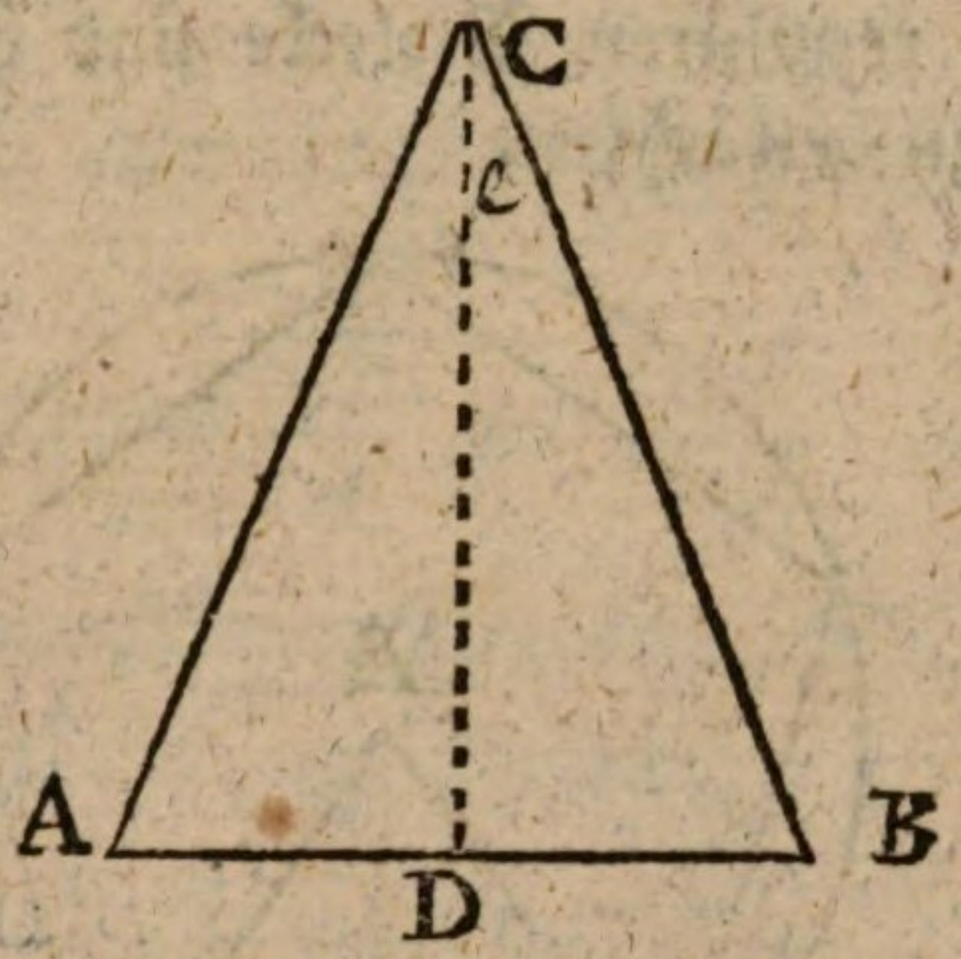
oder $S\frac{1}{2}C, r :: \frac{1}{2}AB, BC \left(= \frac{\frac{1}{2}AB \cdot r}{S\frac{1}{2}C}\right)$

daher ist $LBC = L\frac{1}{2}AB + Lr - LS\frac{1}{2}C$.

§. 19.

Aufgabe.

Im gleichschenklichen Dreyecke ABC ist gegeben drey Grundlinie AB und die Seite BC, man soll die Winkel bestimmen.



Auflösung. Ziehe CD winkelrecht auf AB. Es ist $\angle e$ das Komplement des Winkels B. Es ist aber

$$CB, BD :: r, Se$$

$$\text{also } CB, BD :: r, S'B$$

$$\text{oder } CB, \tfrac{1}{2}AB :: r, S'B \left(= \frac{r \cdot \frac{1}{2}AB}{CB}\right)$$

$$\text{daher } \mathfrak{L}S'B = \mathfrak{L}r + \mathfrak{L}\tfrac{1}{2}AB - \mathfrak{L}CB.$$

Der Winkel A ist dem Winkel B gleich. Der Winkel C entstehet, wenn man die Winkel B und A oder 2B von 180s abziehet.

Anmerkung. Man könnte noch mehrere Aufgaben, die Winkel der Dreyecke, deren Seiten und deren Flächen-Inhalt betreffend, ersinnen. Es ist aber genug, daß man die Grundsätze allezeit im Gedächtnisse habe, und sich in der Ausrechnung der gewöhnlichsten Fälle übe.

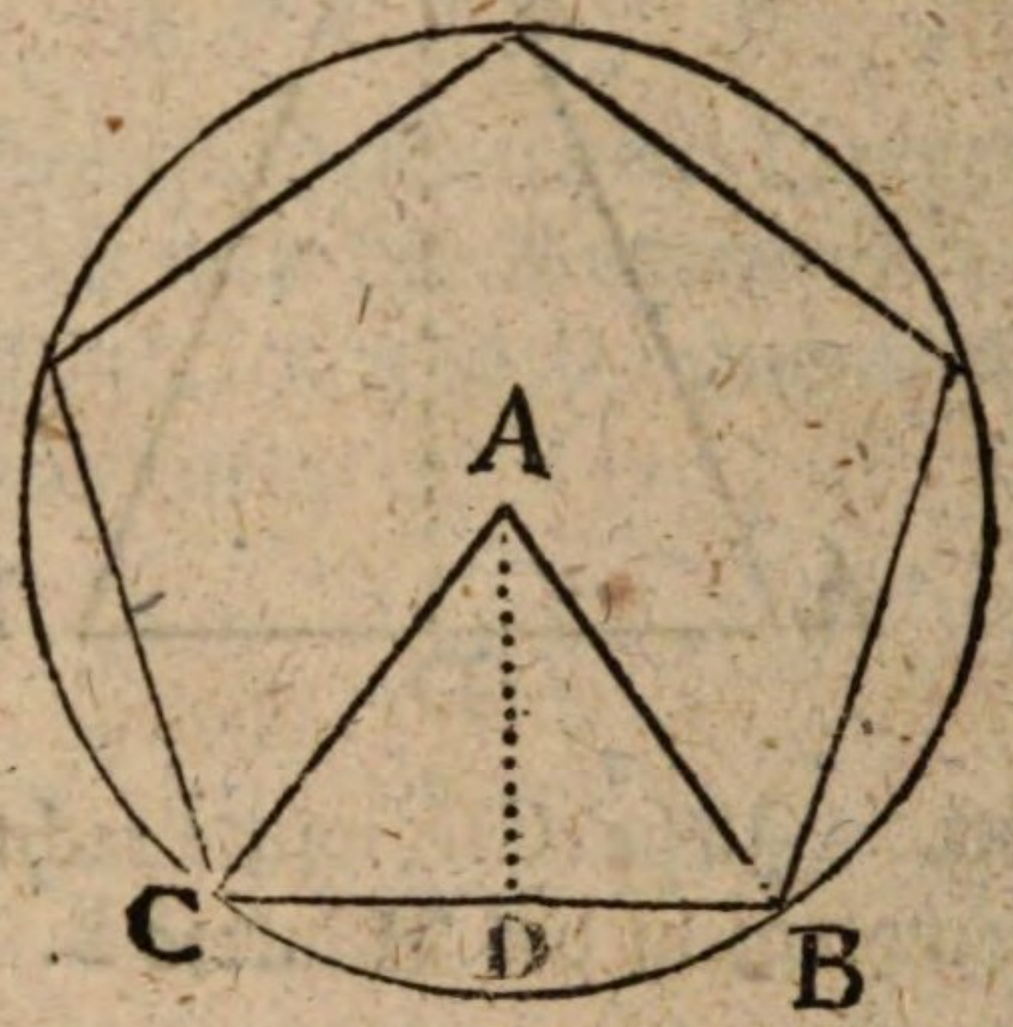
§. 20.

Weil alle vieleckigte Figuren sich in lauter Dreyecke zertheilen lassen, so kann die geradlinichte Trigonometrie auch

auch bey der Berechnung der Polygonen sehr nützlich angewandt werden. Hauptsächlich erleichtert sie sehr die Aufgaben, welche sich auf reguläre Vielecke beziehen, wie man es bey den folgenden Sätzen bemerken wird.

§. 21.

In einem regulären Vielecke sind hauptsächlich drey gerade Linien zu betrachten.



1) Die Seite BC des Vielecks.

2) Der Halbmesser AC des Vielecks, oder eigentlich des umgeschriebenen Zirkels.

3) Die senkrechte Linie AD, welche aus dem Mittelpunkte A auf die Seite BC fällt, und dieselbe halbiret. Diese AD pfleget man das Apotema zu nennen.

Auch kömmt bey allen Aufgaben die Anzahl der Seiten in Betrachtung.

§. 22.

Aufgabe.

Es ist der Halbmesser AC des Vielecks, nebst der Anzahl der Seiten gegeben, man soll die Seite AC und das Apotema AD trigonometrisch bestimmen.

Auflösung. So viel als das Vieleck Seiten haben soll, so viel entstehen auch gleiche Winkel, wie BAC

um den Mittelpunkt. Alle diese Winkel machen so viel als 4 Rechte oder 360 Grad. Sind also im Vieleck n Seiten, so ist der Winkel BAC der $n$te Theil von 360 Grad, nemlich

$$\angle BAC = \frac{4R}{n} = \frac{360°}{n}$$

Der Winkel DAB oder DAC ist die Hälfte des Winkels BAC. Also ist

$$\angle DAC = \frac{2R}{n} = \frac{180°}{n}$$

Nun ist im rechtwinklichen Dreyecke ADC

$$AC,\ CD :: r,\ \mathfrak{S}DAC$$

$$\text{oder } r,\ \mathfrak{S}DAC :: AC,\ CD \left(= \frac{AC.\mathfrak{S}DAC}{r}\right)$$

$$\text{oder } CD = \frac{AC.\mathfrak{S}\frac{180°}{n}}{r}$$

Und da die Seite $BC = 2CD$, so ist

$$BC = \frac{2.AC.\mathfrak{S}\frac{180^g}{n}}{r}$$

Ferner ist

$$AC,\ AD :: r,\ \mathfrak{S}ACD$$

$$\text{oder } AC,\ AD :: r,\ \mathfrak{S}'DAC$$

$$r,\ \mathfrak{S}'DAC :: AC,\ AD \left(= \frac{AC.\mathfrak{S}'DAC}{r}\right)$$

$$\text{oder } AD = \frac{AC.\mathfrak{S}'\frac{180^g}{n}}{r}$$

Man

Man merke sich also diese beyde Formeln

$$\text{I) Seite} = \frac{2\,AC : S\frac{180^g}{n}}{r}$$

$$\text{II) Apotema} = \frac{AC \cdot S'\frac{180^g}{n}}{r}$$

Exempel. Die Figur sey ein Fünfeck, so ist

$$\frac{180^g}{n} = \frac{180^g}{5} = 36^g.$$

Es sey der Halbmesser $AC = 1$, so ist

$$\text{I) Seite} = \frac{2\,S\,36^g}{100000;00} = \frac{2 \times 58778;53}{100000}$$

$$= 2 \times 0;5877853$$

$$= 1;1755706\ldots$$

$$\text{II) Apotema} = \frac{S'\,36^g}{100000;00} = 0;8090170$$

Zusatz. Hieraus kann auch der Flächen-Inhalt des Vielecks gefunden werden.

Im Dreyeck BAC multiplizire man die halbe Grundlinie CD $\left(= \frac{AC \cdot S\frac{180^g}{n}}{r}\right)$ mit der Höhe AD $\left(= \frac{AC \cdot S'\frac{180^g}{n}}{r}\right)$, so hat man das Dreyeck BAC. Dieses multiplizire man wiederum mit der Anzahl der

der Seiten n, so hat man die Summe aller Dreyecke und folglich das Vieleck. Also wird

$$\text{Vieleck} = \frac{AC.S\frac{1}{n}180^g}{r} \times \frac{AC.S'\frac{1}{n}180^g}{r} \times n$$

$$= \frac{n.AC^2.S\frac{1}{n}180^g.S'\frac{1}{n}180^g.}{r^2}$$

Es ist aber $S2x = 2Sx.S'x$ (XI. §. 66)

$$\tfrac{1}{2}S2x = Sx.S'x$$

Also ist

$$\text{Vieleck} = \frac{n.AC^2.S\frac{360^g}{n}}{2.r^2} = \frac{n}{2}\left(\frac{AC}{r}\right)^2.S\frac{360^g}{n}$$

Anmerkung. Vermittelst gegenwärtiger Aufgabe lassen sich die Seiten der regulären Vielecke weit bequemer bestimmen, als schon an einem andern Orte geschehen. (V. §. 42).

§. 23.

Aufgabe.

Es ist in einem Vielecke die Anzahl der Seiten nebst der Seite BC gegeben, es soll der Halbmesser AC und das Apotema AD trigonometrisch gefunden werden. (Siehe die Figur bey §. 21)

Auflösung. I) In voriger Aufgabe war gefunden worden

$$BC = \frac{2AC.S\frac{1}{n}180}{r}$$

daher $r.BC = 2AC.S\frac{1}{n}180^g$

$$\frac{r.BC}{2.S\frac{1}{n}180^g} = AC$$

II) Im rechtwinklichen Dreyeck ADC ist

DC, DA :: r, $\mathfrak{T}$DCA

oder DC, DA :: r, $\mathfrak{T}'$DAC

daher $$DA = \frac{DC.\mathfrak{T}'DAC}{r}$$

oder $$DA = \frac{\frac{1}{2}BC.\mathfrak{T}'\frac{1}{n}180^g}{r}$$

oder $$DA = \frac{BC.\mathfrak{T}'\frac{1}{n}180^g}{2r}$$

Zusatz. Multipliziret man den gefundenen Werth von AD mit BC, dividiret man durch 2, und multipliziret mit n, so bekömmt man zum Inhalt des Vielecks

$$\frac{nBC^2.\mathfrak{T}'\frac{1}{n}180^g}{4r}$$

§. 24.

Aufgabe.

Wenn das Apotema AD und die Anzahl der Seiten gegeben sind, den Halbmesser AC und die Seite BC finden.

Auflösung. I) Es ist gefunden worden (§. 22)

$$AD = \frac{AC.S'\frac{180^g}{n}}{r}$$

daher $r.AD = AC.S'\frac{180^g}{n}$

$$\frac{r.AD}{S'\frac{180^g}{n}} = AC$$

II) Es ist gefunden worden (§. 23)

$$AD = \frac{BC.T'\frac{180^g}{n}}{2r}$$

daher $2r.AD = BC.T'\frac{180^g}{n}$

$$\frac{2r.AD}{T'\frac{180^g}{n}} = BC$$

Zusatz. Weil $\triangle BAC = \frac{1}{2}BC \times AD$, und das Vieleck $= \frac{n}{2} BC \times AD$, so ist

$$\text{Vieleck} = \frac{nr.AD^2}{T'\frac{180^g}{n}}$$

§. 25.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser AC und das Apotema AD gegeben sind, die Seite BC und die Anzahl der Seiten finden.

Auflösung. I) Im rechtwinklichen Dreyecke ACD

ist $DC = \sqrt{(AC^2 - AD^2)}$

folglich $BC = 2DC = 2\sqrt{(AC^2 - AD^2)}$

II) Es ist im Dreyecke ADC,

$$AC, DC :: r, \mathfrak{S}DAC \left(= \frac{r.DC}{AC}\right)$$

Folglich, wenn man durch $\mathfrak{A}$ den Winkel andeutet, der zu einem Sinus gehöret, so ist

$$DAC = \mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{r.DC}{AC}$$

$$\angle BAC = 2\angle DAC = 2\mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{r.DC}{AC}$$

So oft nun der Winkel BAC in 4 Rechten enthalten ist, so viel Seiten hat das Vieleck, also ist die Anzahl der Seiten

$$= \frac{4\mathfrak{R}}{2\mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{rDC}{AD}} = \frac{2\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{rDC}{AC}} = \frac{180^s}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{rDC}{AC}}$$

Zusatz. Um den Flächen-Inhalt des Vielecks zu bekommen, muß man $\frac{1}{2}BC$ oder DC mit AD multipliziren, und das Produkt mit der Anzahl der Seiten multipliziren. Also wird

$$\text{Inhalt} = AD\sqrt{(AC^2 - AD^2)} \times \frac{180^s}{\mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{rDC}{AC}}$$

Anmerkung. Es trift sich nicht allemal, daß der Halbmesser AC und das Apothema AD ein reguläres Vieleck abgeben. Wenn dieses Statt findet, so muß der Winkel BAC vier rechte Winkel oder 360 Grad messen. Man versuche also, ob $2\mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{r.DC}{AC}$ ein solcher

Win-

Winkel ist, der in 360 Graden gerade aufgehet; das ist, ob sich 360 Grad durch die Grade des Winkels $2\,\mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{r.DC}{AC}$ ohne Rest dividiren lassen. In diesem Falle gehören AC und AD zu einem regulären Vielecke.

§. 26.

Aufgabe.

Wenn der Halbmesser AC und die Seite BC gegeben sind, das Apotema AD, nebst der Anzahl der Seiten finden.

Auflösung. I) Es ist

$$AD = \sqrt{(AC^2 - DC^2)}$$

$$\text{oder } AD = \sqrt{[AC^2 - (\tfrac{1}{2}BC)^2]}$$

$$\text{oder } AD = \sqrt{\left(AC^2 - \frac{BC^2}{4}\right)}$$

$$\text{oder } AD = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4AC^2 - BC^2)}$$

II) Es ist

$$AC, DC :: r, \measuredangle DAC \left(= \frac{r.CD}{AC}\right)$$

$$\text{daher } \measuredangle DAC = \frac{r.\tfrac{1}{2}BC}{AC}$$

$$\text{oder } \measuredangle DAC = \frac{r.BC}{2AC}$$

$$\measuredangle DAC = \mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{r.BC}{2AC}$$

$$\measuredangle BAC = 2\,\mathfrak{A}\mathfrak{S}\frac{r.BC}{2AC}$$

Dividiret man nun 360^g durch diesen Winkel, so bekömmt man die Anzahl der Seiten in dem Falle, wo der Quozient eine ganze Zahl ist; nemlich es ist die Anzahl der Seiten

$$\frac{360^g}{2\,\mathfrak{AS}\frac{r.BC}{2AC}} = \frac{180^g}{\mathfrak{AS}\frac{r.BC}{AC}}$$

Zusatz. Der Flächen-Inhalt des Vielecks entstehet, wenn man BC mit $\frac{1}{2}$AD und das Produkt mit der Anzahl der Seiten multiplizirt. Also ist

$$\text{Inhalt} = BC \times \tfrac{1}{4}\sqrt{(4AC^2 - BC^2)} \times \frac{180^g}{\mathfrak{AS}\frac{r.BC}{AC}}$$

§. 27.

Aufgabe.

Wenn die Seite BC, und das Apotema AD, gegeben sind, den Halbmesser AC und die Anzahl der Seiten finden.

Auflösung. I) Es ist

$$AC = \sqrt{(AD^2 + DC^2)}$$

oder $$AC = \sqrt{[AD^2 + (\tfrac{1}{2}BC)^2]}$$

oder $$AC = \sqrt{(AD^2 + \tfrac{1}{4}BC^2)}$$

oder $$AC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4AD^2 + BC^2)}$$

II) Es ist AD, DC :: r, $\mathfrak{T}DAC = (\frac{r.DC}{AD})$

Also ist .... $$DAC = \mathfrak{AT}\frac{r.DC}{AD}$$

$$BAC = 2\,\mathfrak{AT}\frac{r.DC}{AD}$$

Wenn

Wenn man 360^g durch den Winkel BAC dividiret, so bekömmt man die Anzahl der Seiten, wenn nemlich der Quozient eine ganze Zahl ist. Also ist die Anzahl der Seiten

$$\frac{360^g}{2\,AT\frac{r.DC}{AD}} = \frac{180^g}{AT\frac{r.DC}{AD}}$$

Zusatz. Multiplizire AD mit der Hälfte von BC, und mit der Anzahl der Seiten, so kömmt der Inhalt des Vieleckes:

$$AD \times \tfrac{1}{2} BC \times \frac{180^g}{AT\frac{r.DC}{AD}}$$

§. 28.

Aufgabe.

Es ist der Flächen-Inhalt P eines Vieleckes, nebst der Anzahl n der Seiten gegeben, man soll den Halbmesser AC, die Seite BC, und das Apotema AD bestimmen.

Auflösung. I) Es ist gefunden worden (§. 22)

$$P = \frac{n.AC^2.S\frac{360^g}{n}}{2r^2}$$

daher $2r^2 P = n.AC^2.S\frac{360^g}{n}$

$$\frac{2r^2P}{n.S\frac{360^g}{n}} = AC^2$$

$$r.\sqrt{\frac{2P}{n.S\frac{360^g}{n}}} = AC$$

II) Es ist gefunden worden (§. 23. Zus.)

$$P = \frac{n.BC^2.T'\frac{180^g}{n}}{4r}$$

daher $4rP = nBC^2.T'\frac{180^g}{n}$

$$\frac{4rP}{nT'\frac{180^g}{n}} = BC^2$$

$$2\sqrt{\frac{rP}{n.T'\frac{180^g}{n}}} = BC$$

III) Es ist gefunden worden (§. 24 Zus.)

$$P = \frac{nr.AD^2}{T'\frac{180^g}{n}}$$

daher $P.T'\frac{180^g}{n} = nr.AD^2$

$$\frac{P.T'\frac{180^g}{n}}{nr} = AD^2$$

$$\sqrt{\frac{P.T'\frac{180^g}{n}}{nr}} = AD$$

Dreyzehntes Hauptstück.

Von der sphärischen Trigonometrie.

§. 1.

Wenn auf der Oberfläche einer Kugel drey Zirkelbogen einander in drey Punkten schneiden, so entstehet ein sphärisches Dreyeck. Und obgleich solche Bogen sowohl zu kleinen als zu großen Zirkeln gehören können, (IX. §. 26.) so pfleget man doch nur hauptsächlich solche Dreyecke zu betrachten, deren Seiten oder Bogen aus großen Zirkeln entstehen.

Derjenige Theil der Geometrie, welcher von solchen Dreyecken handelt, die auf einer Kugelfläche beschrieben sind, wird deswegen die sphärische Trigonometrie genannt. Sie gehöret unwidersprechlich zur reinen Geometrie, und ihre natürliche Stelle ist gleich nach der geradlinichten Trigonometrie. Jedoch zeiget sich ihr Nutzen hauptsächlich in der Astronomie, wo man sich den gestirnten Himmel als eine hohle Kugel vorstellet, auf deren Fläche verschiedene Zirkel und Zirkelbogen in Gedanken gezogen werden, um die Lage und Bewegungen der himmlischen Körper zu bestimmen. Wer also nicht Willens ist seine mathematische Kenntnisse auf die Sternkunde anzuwenden, hat nicht nöthig sich in gegenwärtige Lehren von den sphärischen Dreyecken einzulassen, und kann sogleich zu den folgenden Hauptstücken schreiten, wo die Geometrie auf gemeinere Gegenstände angewandt wird.

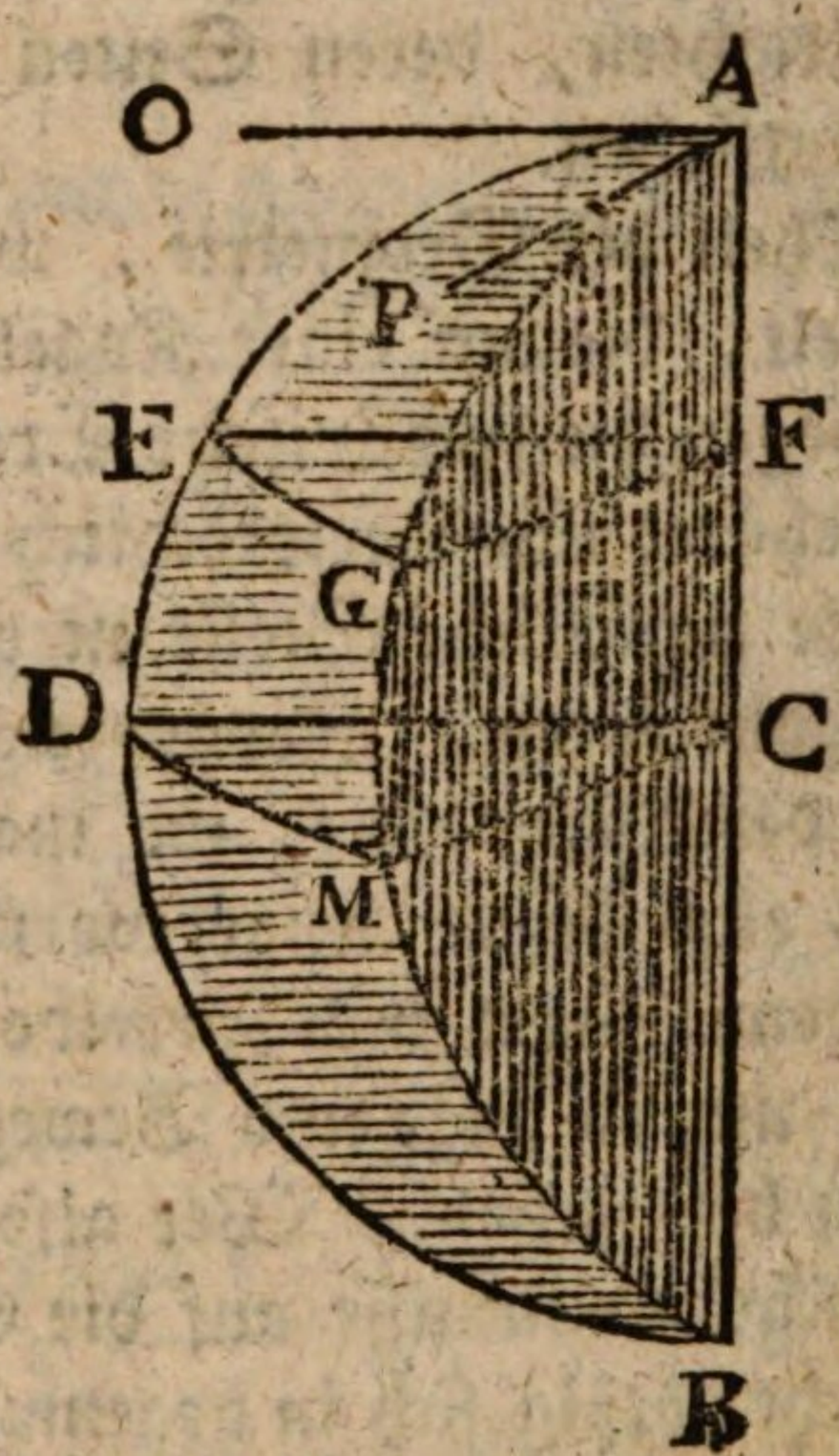
§. 2.

Was große Zirkel, kleine Zirkel, ihre Axen, ihre Pole, und sphärische Winkel sind, ist schon am gehörigen

Orte hinlänglich erkläret worden. Auch haben wir schon die vornehmsten Lehrsätze über diese Gegenstände vorgetragen und bewiesen. (IX. §. 26 bis 51.) Wir schreiten also ohne weitere Vorbereitung zu den sphärischen Dreyecken, und fangen mit solchen Eigenschaften derselben an, die allen gemein sind, und die auch zum Theile bey geradlinichten Dreyecken statt finden.

§. 3.

In einem sphärischen Dreyecke ist jede Seite nothwendig kleiner als 180°.



Denn wenn die Bogen AE und AG mit einem dritten EG ein Dreyeck bilden sollen, so muß dieser dritte die beyden ersten, oder die Spindel AEDBMGA zwischen A und B schneiden. Es müssen also AE und AG nothwendig kleiner seyn als AEDB und AGM*B*, das ist, kleiner als 180 Grad. Aus der nemlichen Ursache muß auch EG kleiner

seyn

seyn als 180^g, weil sonst EG und AG von AE nicht geschnitten würden.

§. 4.

In jedem sphärischen Dreyecke ist jede Seite kleiner als die Summe der beyden anderen.

Denn der Bogen eines großen Zirkels, der von einem Punkte zum andern in der Kugelfläche gehet, ist das kürzeste Maaß der Entfernung solcher zwey Punkte (IX. §. 43.).

§. 5.

Die Summe der drey Seiten eines sphärischen Dreyecks ist allemal kleiner als 360_g.

Denn in der vorigen Figur ist $EG < (EA + GA)$. Es ist aber $EA = BEA - BE$, und $GA = BGA - GA$, also ist $EA + GA = BEA + BGA - BE - GA$, daher ist

$$EG < BEA + BGA - BE - GA$$

$$EG + BE + GA < BEA + BGA$$

oder $EG + BE + GA < 360^g$, weil $BEH + BGA = 360^g$

§. 6.

In einem sphärischen Dreyecke können nur dreyerley Winkel statt finden, nemlich gerade, spitzige oder stumpfe. Also wird jeder Winkel nothwendig kleiner als 180^g. Denn zwey Ebnen müssen nothwendig eine Neigung von weniger als 180^g gegeneinander haben, auf der Seite wo sie von einer dritten geschnitten werden. Es sind aber die sphärischen Winkel nichts anders als die Neigungswinkel der großen Zirkel die einander in der Kugel schneiden.

§. 7.

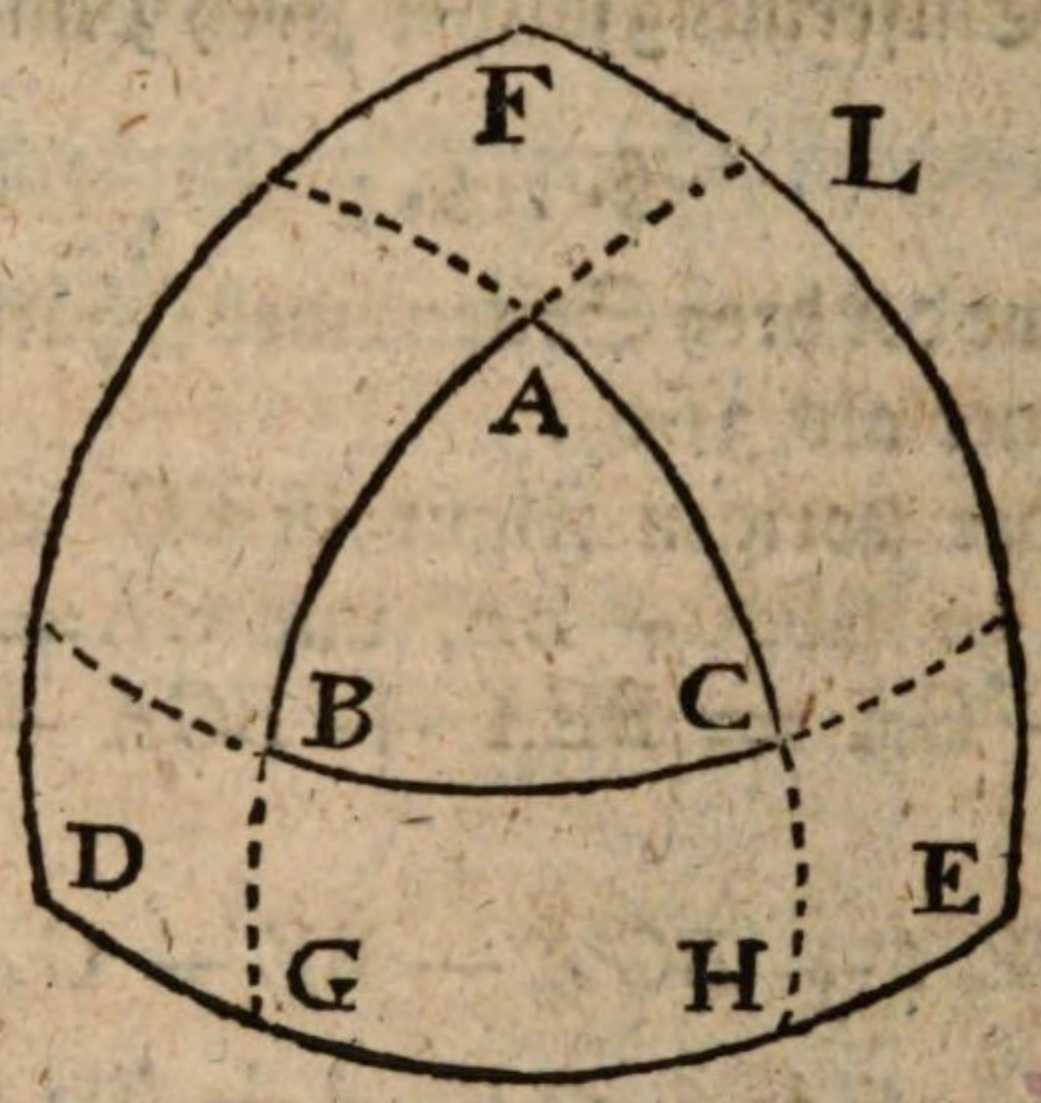
Die Summe der drey Winkel eines sphärischen Dreyecks ist allemal kleiner als 540^g oder als 6 Rechte.

Denn

Denn da jeder Winkel kleiner ist als 180s oder als 2 Rechte, so sind alle drey zusammen kleiner als 3 × 180s oder 540s oder 6 Rechte.

§. 8.

Wenn aus den drey Punkten *A*, *B* und C eines sphäri-schen Dreyecks in einer Entfernung von 90 Graden auf der



Kugelfläche die Bogen DE, EF, FD gezogen werden, so entstehet ein neues Dreyeck DEF, dessen Winkel die Supplemente der gegenüberstehenden Seiten des ersten Dreyecks sind, und dessen Seiten die Supplemente der gegenüberstehenden Winkel des ersten Dreyecks sind.

Beweis. Weil der Bogen EF, 90s vom Punkte *B* und der Bogen ED 90 Grad vom Punkte *A* entfernet ist, so ist der Punkt E, welcher beyden Bogen EF und ED gehöret, 90s von den Punkten *A* und *B* entfernet. Also ist E der Pol der Seite *AB*. Aus dem nemlichen Grunde ist F der Pol von *B*C, und D der Pol von *A*C.

Aus dem Pole E werde *AB* bis in G, und aus dem Pole D werde *A*C bis in H verlängert. Weil E der Pol des großen Zirkels *ABG* ist, so ist E auch vom Punkte G 90s entfernet, also ist EG = 90s. Und weil D der Pol

des

des großen Zirkels ACH ist, so ist ebenfalls DH $=$ 90s. Also ist GE $+$ DH $=$ 180s, es ist aber GE $+$ DH $=$ GE $+$ DG $+$ GH $=$ DE $+$ GH. Also ist DE $+$ GH $=$ 180s. Es ist aber GH das Maaß des Winkels A (IX. §. 34). Also ist DE $+ \angle A =$ 180s. Folglich ist DE das Supplement des Winkels A, oder was ihm mangelt, daß er 180 Graden gleich werde.

Auf eine ähnliche Art wird gefunden, daß EF das Supplement des Winkels B, und FD das Supplement des Winkels C ist.

Aus dem Pole E verlängere man GA bis in L, so ist GL das Maaß des Winkels E. Es ist aber G$A =$ 90s und BL 90s, weil DE, worin der Punkt E lieget, aus dem Pole A, und EF, worin der Punkt L lieget, aus dem Pole B in der Entfernung von 90 Graden beschrieben worden. Also ist GA $+$ BL $=$ 180s $=$ BL $+$ GB $+$ BA $=$ GL $+$ BA. Es ist demnach GL das Supplement von BA. Nun ist GL das Maaß des Winkels E. Also ist der Winkel E das Supplement der gegenüberstehenden Seite BA.

Eben so wird bewiesen, daß $\angle$D das Supplement der Seite CA und $\angle$F das Supplement der Seite BC ist.

Anmerkung. Das Dreyeck DFE wird genannt das Supplementen-Dreyeck, oder das Polar-Dreyeck, in Beziehung auf das Dreyeck ABC. Es ist aber auch in umgekehrter Ordnung $\triangle A$BC das Supplementen-Dreyeck des $\triangle$FDE. Man kann also das Dreyeck FDE auch als das gegebene betrachten, und dann sind die Seiten und Winkel des Dreyecks ABC die Supplemente der gegenüberstehenden Winkel und Seiten des Dreyecks FDE.

§. 9.

Die Summe der drey Winkel eines sphärischen Dreyecks ist allemal größer als 180 Grad.

Beweis.

Beweis. Weil in letzter Figur die Bogen DE, EF, FD die Supplement der Winkel A, B, C sind, so ist

$$DE + \angle A = 180^g$$
$$EF + \angle B = 180^g$$
$$FD + \angle C = 180^g$$

folglich $ED + EF + FD + \angle A + \angle B + \angle C = 540^g$

Nun ist $ED + EF + FD \ldots < 360^g$ (§. 5.)

also ist $\ldots \angle A + \angle B + \angle C > 180^g$.

§. 10.

In einem sphärischen Dreyecke können die Winkel und Seiten alle drey 90^g, oder alle drey weniger als 90^g, oder alle drey mehr als 90^g halten, auch können sie vermischt seyn, nemlich von 90^g mehr und weniger.

Beweis. Wenn die Seiten AB, AC, BC alle drey kleiner sind als 90^g, so sind ihre Supplemente, die Winkel E, D, F alle drey größer als 90 Grad, folglich kann ein Dreyeck DFE drey Winkel haben, wovon jeder 90^g übertrift. Sind die Winkel A, B, C alle drey spitzig, so sind deren Supplemente, die Seiten DE, EF, FD, alle drey größer als 90^g. Endlich, wenn die Seiten AB, AC und BC jede 90 Grad ausmachen, so fällt das Dreyeck *ABC* auf sein Supplementen-Dreyeck FDE, und die Winkel bekommen jeder 90^g.

§. 11.

Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreyecks fällt allemal zwischen 180 und 540 Grade.

Denn sie ist kleiner als 540^g (§. 7.) und größer als 180^g (§. 9.)

Anmerkung. Aus zwey gegebenen Winkeln kann also nicht der dritte bestimmt werden, wie bey den geradlinichten Dreyecken.

§. 12.

§. 12.

Zwey sphärische Dreyecke sind ähnlichgleich 1) wenn die drey Seiten jede mit jeder gleich sind. 2) Wenn zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel beyderseits gleich sind. 3) Wenn eine Seite und beyde anliegende Winkel beyderseits gleich sind. 4) Wenn zwey Seiten und die Gegenwinkel derselben beyderseits gleich sind. 5) Wenn die drey Winkel des einen den drey Winkeln des andern gleich sind, jeder mit jedem verglichen.

Beweis. Die vier ersten Sätze werden wie bey den geradlinichten Dreyecken bewiesen, indem die Dreyecke über einander geleget werden und einander decken. Der letzte Satz, welcher nur bey sphärischen Dreyecken statt findet, wird folgendermaßen bewiesen.

Wenn zwey sphärische Dreyecke die nemlichen Winkel haben, so haben ihre Supplementen-Dreyecke die nemlichen Seiten, weil solche Seiten alsdann die Komplemente gleicher Winkel sind.

Da nun beyde Polar-Dreyecke die nemlichen Seiten haben, so sind sie ähnlichgleich und haben auch die nemlichen Winkel.

Weil die Winkel gleich sind, so sind auch ihre Komplemente gleich, und diese Komplemente sind nichts anders als die Seiten der gegebenen Dreyecke. (§. 8. Anm.)

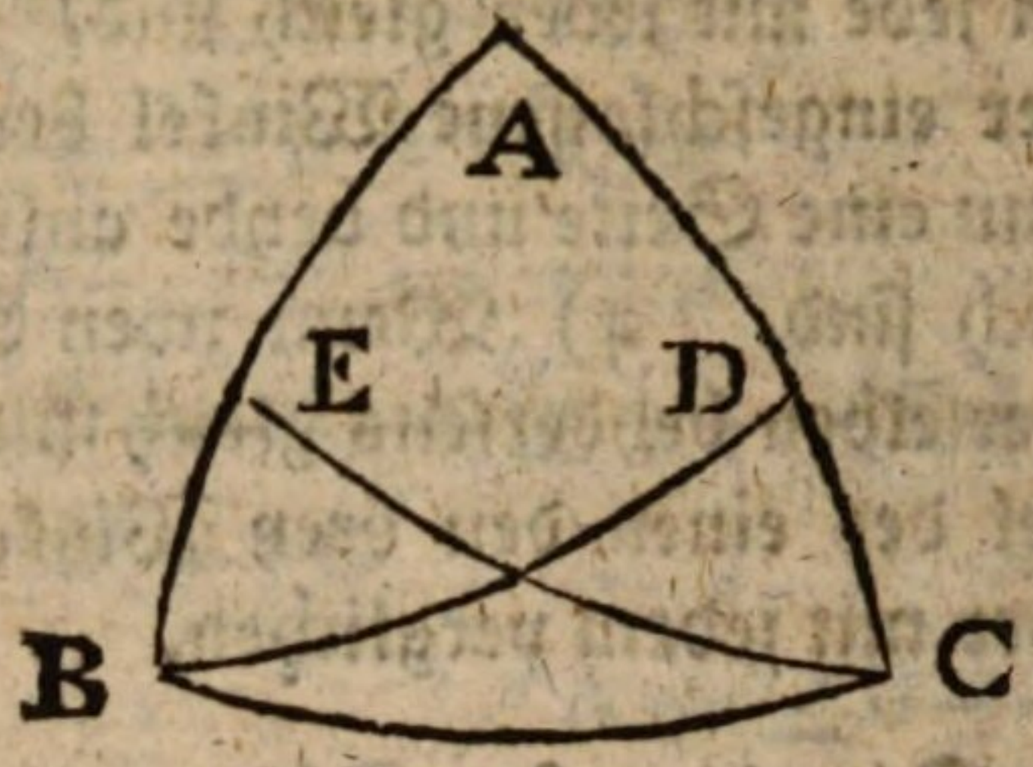
Folglich, wenn die Winkel in zwey Dreyecken einerley sind, so sind auch die Seiten einerley.

§. 13.

Wenn in einem sphärischen Dreyecke zwey Seiten gleich sind, so sind die Gegenwinkel derselben gleich.

(Siehe die folgende Figur.)

Beweis.



Beweis. Es sey AC = AB. Nimm willkührlich AE und mache AD = AE. Ziehe DB und EC, so ist

$$\angle A = \angle A$$
$$AE = AD$$
$$AC = AB$$

folglich $\triangle AEC \cong \angle ADB$ (§. 12.)

also ist $EC = DB$

ferner da $EC = DB$
$$EB = DC$$
$$BC = BC$$

so ist $\triangle ECB \cong \triangle DBC$ (§. 12.)

also ist $\angle EBC = \angle DCB$

oder $\angle ABC = \angle ACB$.

§. 14.

Wenn ein sphärisches Dreyeck zwey gleiche Winkel hat, so sind die Gegenseiten derselben gleich.

Beweis. In der Figur bey §. 8. sey $\angle B = \angle C$, so ist im Supplementen-Dreyeck $FE = FD$.

Und da im Dreyecke DFE, FE = FD, so ist auch (§. 13.) ∠E = ∠D.

Da nun ∠E = ∠D, so sind die Supplemente dieser Winkel gleich, das ist, AB = AC.

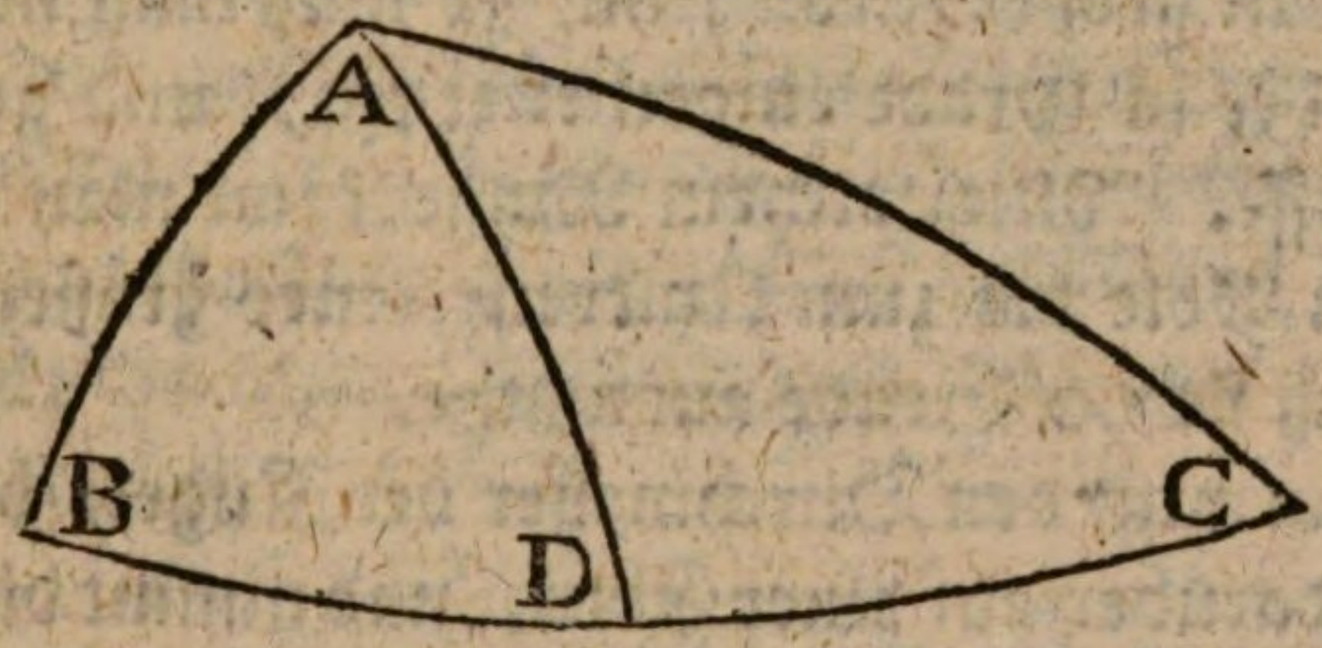
§. 15.

Wenn in einem sphärischen Dreyecke die drey Seiten gleich sind, so sind auch die drey Winkel gleich, und wenn die drey Winkel gleich sind, so sind die drey Seiten gleich.

Dieses folget aus beyden vorigen Lehrsätzen.

§. 16.

In einem sphärischen Dreyecke stehet allemal die größere Seite dem größeren Winkel, und der größere Winkel der größeren Seite gegenüber.



Beweis. Es sey ∠BAC > ∠B. Ziehe den Bogen AD, so daß ∠A = ∠B. So wird AD = BD (§. 14.).

Nun ist BC = BD + DC = AD + DC. Es ist aber (AD + DC) > AC, folglich ist BC > AC, das ist, weil ∠BAC > ∠B, so ist auch BC > AC.

§. 17.

In jedem sphärischen Dreyecke ist der auswendige Winkel kleiner als die Summe der beyden inwendigen die ihm gegenüber stehen.

Beweis. In voriger Figur ist ∠ADB + ∠ADC oder ∠D + ∠ADC = 180g. Es ist aber ∠A + ∠B + ∠D ▷ 180g (§. 9.). Also ist ∠A + ∠B + ∠D ▷ ∠D + ∠ADC, oder ∠A + ∠B ▷ ∠ADC.

§. 18.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß man auf einer Kugel aus jedem Pole einen Kreis beschreiben könne. Um dieses in der That zu verrichten, gebrauchet man einen sphärischen Zirkel, das ist, einen solchen, dessen Spitzen einwärts gebogen sind, daß die Risse auf der Kugel desto reiner und deutlicher werden.

Wird eine Spitze des Instruments in einem Punkte gestellet, den man zum Pole annimmt, und die andere Spitze auf der Kugelfläche herumgedrehet, so beschreibet sie einen Zirkel auf solcher Fläche.

Soll es ein großer Zirkel seyn, so muß man noch einen Ring haben der in Grade eingetheilet sey, und genau auf der Kugel passe. Mit solchem Ringe kann man die Entfernung vom Pole bis zum Umkreise eines großen Zirkels abmessen, daß sie 90 Grade ausmache.

Oder man mißt den Durchmesser der Kugel, beschreibt einen Zirkel darüber auf einer Ebne, und nimmt die Sehne von 90 Grad zur Oeffnung des sphärischen Zirkels, so wird ebenfalls ein großer Zirkel beschrieben.

§. 19.

Gesetzt es soll am Ende D eines Bogens ED (Figur bey §. 3.) ein Bogen DM senkrecht aufgestellt werden.

Man verlängere DE nach A bis DA = 90 Grad, welche Grade man mit dem erwähnten Ringe abmessen kann.

Aus dem Pol A beschreibe man den Bogen DM, so ist dieser senkrecht auf DE.

Denn der Pol A des Bogens DM lieget im Bogen DE oder dessen Verlängerung. Wenn man DM hinlänglich

lich verlängerte, so würde DM durch alle Punkte gehen die 90 Grad von A entfernt sind, also auch durch den Pol des Bogens DE oder des Zirkels AEDB, welcher Pol von A und B um 90 Grade entfernet ist. Folglich sind beyde Bogen DE und DM senkrecht auf einander (IX §. 46).

§. 20.

Gesetzt, aus dem Punkte M sollte ein Bogen auf ED senkrecht gefället werden, so müste man ebenfalls nehmen DA = 90 Grad, und dann aus dem Pole A durch M den Bogen MD ziehen, welcher aus den nemlich Gründen als vorher auf DE senkrecht seyn würde (Fig. bey §. 3.).

§. 21.

Wir wollen uns weiter nicht bey der Zeichnung der Bogen auf der Kugelfläche aufhalten. Es ist hinlänglich, daß man sich entweder die Figuren in Gedanken vorstelle, oder sie nur auf eine ohngefähre Art auf eine Kugel zeichne, um die Beweise zu begreifen. Wir schreiten nun zu den wichtigen Lehrsätzen, worauf die Auflösung der sphärischen Dreyecke beruhet, und fangen mit den rechtwinklichen Dreyecken an,

§. 22.

Die sphärischen rechtwinklichen Dreyecke sind dreyerley; nemlich es sind entweder alle drey Winkel lauter rechte, oder zwey sind rechte und einer schief, oder einer ist recht und die beyden übrigen sind schief.

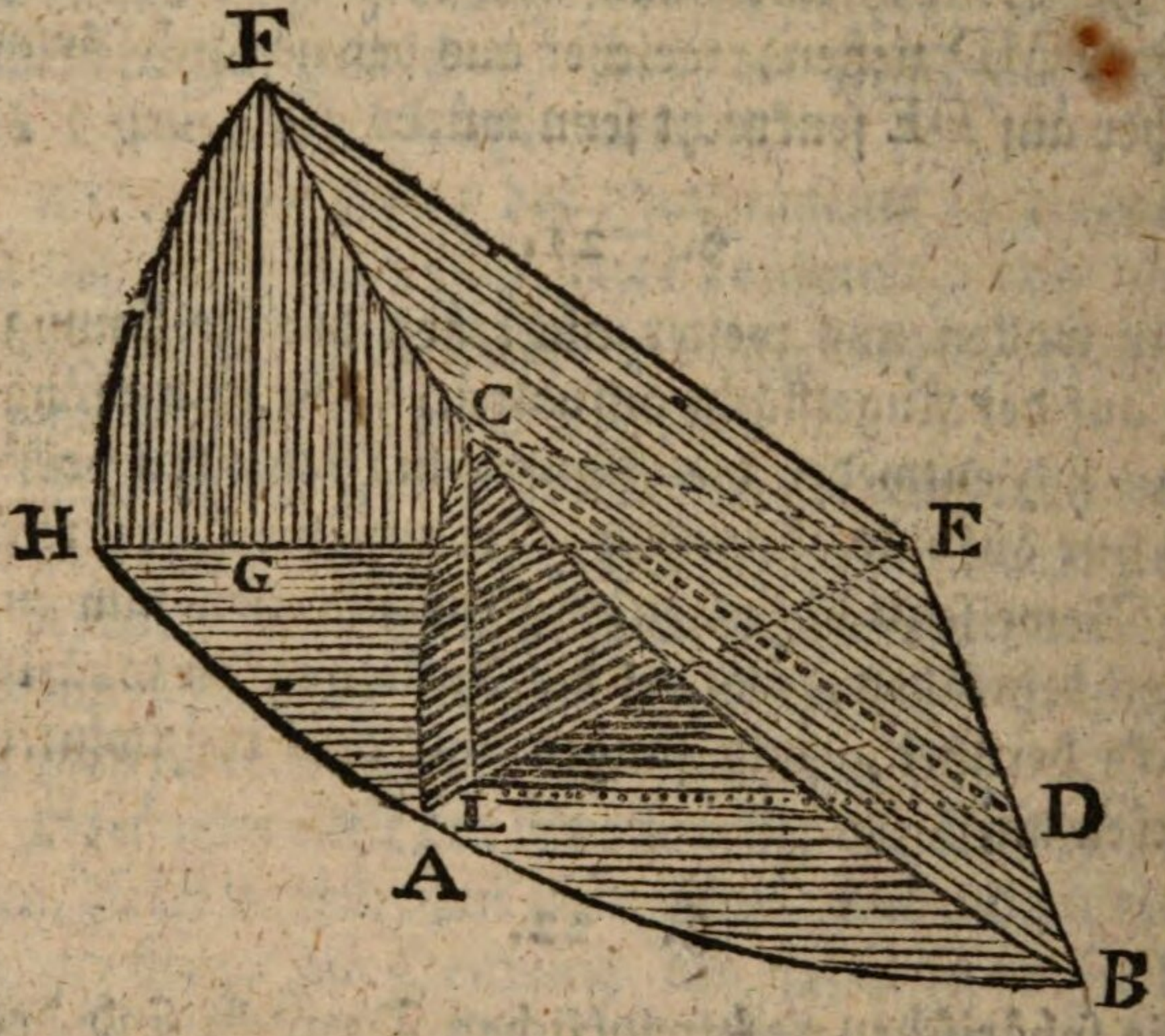
Sind die Winkel alle drey rechte, so sind die Seiten auch alle drey von 90^g, und umgekehrt. In diesem Falle ist also nichts unbekanntes zu suchen.

Sind zwey Winkel rechte, so sind ihre Gegenseiten von 90^g, und umgekehrt. Hierdurch wird aber die dritte Seite und der dritte Winkel nicht gegeben, und man weiß nur, daß beyde von gleich viel Graden sind (IX. §. 34.). Es muß also, um das Dreyeck zu bestimmen, zugleich der

fehlende Winkel oder die fehlende Seite gegeben werden. Und dann ist weiter nichts zu suchen. Es bleibet also der dritte Fall übrig, wo nemlich nur ein rechter Winkel ist.

§. 23.

In jedem rechtwinklichen sphärischen Dreyecke verhält sich der Sinus der Hypotenuse zum Sinus eines Katheten, wie der Halbmesser zum Sinus des Gegenwinkels des Katheten.



Beweis. Es sey E der Mittelpunkt der Kugel, AB, BC, CA drey Bogen von großen Zirkeln die auf der Kugelfläche das Dreyeck ABC bilden, worin angenommen wird, daß CA auf AB senkrecht stehet, und folglich der Winkel CAB ein rechter ist.

Verlängere BA und BC bis $BH = 90^g = BF$, ziehe den Bogen FH, dessen Pol in B ist, und der das Maaß des Winkels B abgiebet.

Ziehe die Halbmesser FE, HE, CE, AE, BE, welche alle sowohl zu der Kugel als zu den Bogen der großen Zirkel gehören, und gleich sind.

Ziehe

Ziehe den Sinus FG des Bogens FH senkrecht auf HE, den Sinus CL des Bogens CA senkrecht auf AE, den Sinus CD des Bogens CB senkrecht auf BE. Verbinde die Punkte D und L vermittelst der Linie DL.

Im Dreyecke BHF sind die Seiten BD und BF jede von 90^g, folglich sind die beyden Winkel bey H und F rechte, und die Ebne EHF stehet senkrecht auf der Ebne BEH. Also stehet auch das Dreyeck EFG senkrecht auf der Ebne BEH. Und da FG in der Ebne des Dreyeckes FGE lieget, und auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte GE beyder Ebnen senkrecht ist, so ist FG auch auf der Ebne BEH senkrecht.

Weil angenommen worden, daß CAB ein rechter Winkel ist, so ist die Ebne CAE senkrecht auf der Ebne BAE, und weil CL in der Ebne CAE lieget, nnd auch auf dem Durchschnitte AE beyder Ebnen senkrecht stehet, so ist CL senkrecht auf der Ebne BAE, oder BHE.

Da nun FG und CL beyde auf der Ebne BHE senkrecht stehen, so sind FG und CL Parallel-Linien.

Weil BF ein Bogen von 90^g ist, so ist FE senkrecht auf BE. Da nun auch CD auf BE senkrecht ist, so ist CD paraallel mit FE.

Da nun CL mit FG, und CD mit FE parallel sind, so sind die Ebnen der Dreyecke FGE und CLD parallel. Und da diese Parallel-Ebnen von der Ebne BEH geschnitten werden, so sind auch die Durchschnitte GE und LD parallel.

Weil nun die Dreyecke FGE und CLD parallele Seiten haben, obgleich in zwey verschiedenen Ebnen, so sind diese Dreyecke ähnlich, und es ist

CD, CL :: EF, FG

das ist: der Sinus CD der Hyporenuse CB verhält sich zum Sinus CL des Katheten CA, wie der Halbmesser EF zum Sinus FG des Bogens FH oder des Winkels B.

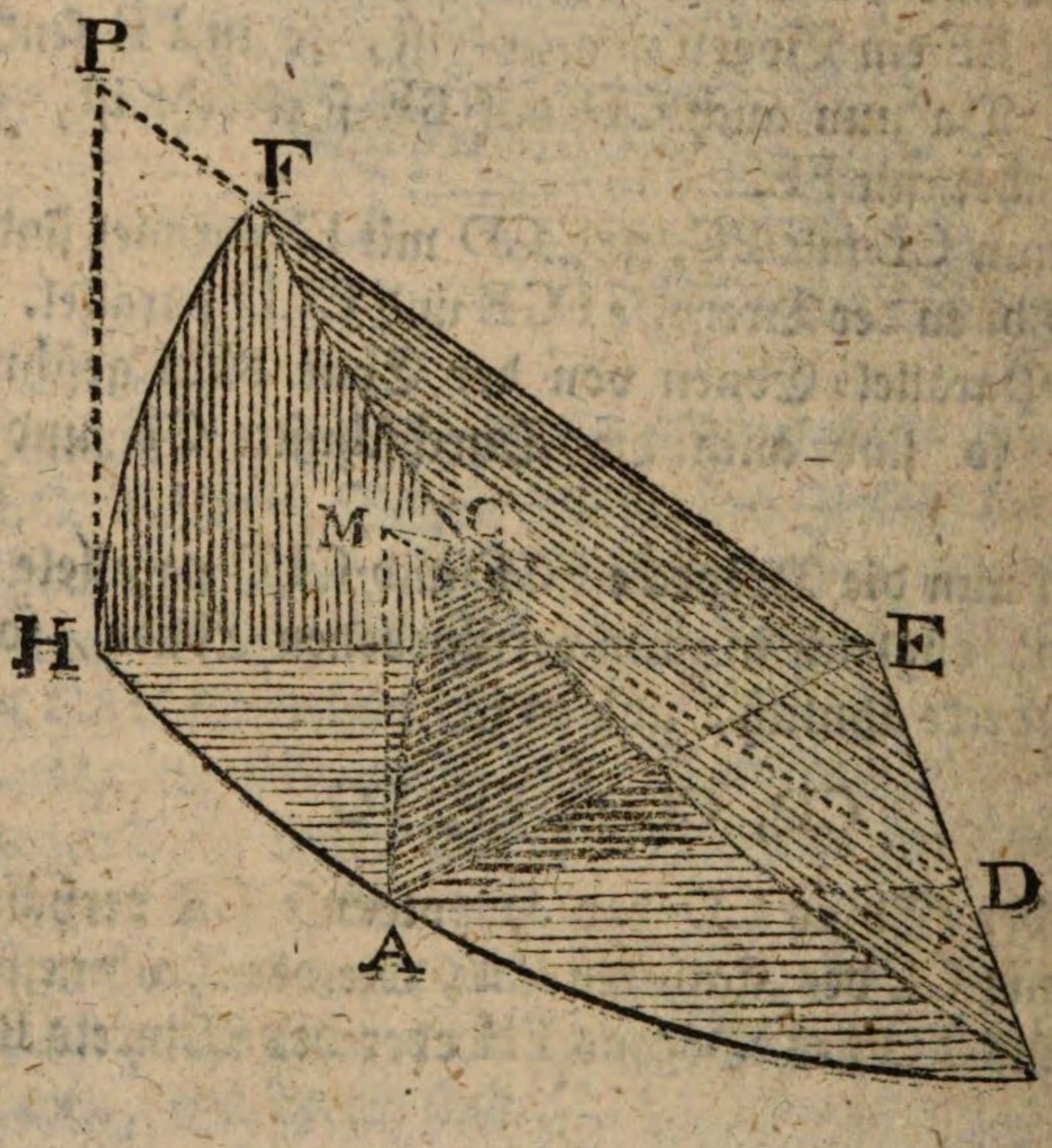
Und da alle diese Bogen und Winkel sich auf den nemlichen Halbmesser EF beziehen, so findet dieses Verhältniß statt, in welchem Zirkel man auch die Grade der Bogen und Winkel nehmen mag, folglich auch in dem Zirkel der bey der Verfertigung der Tafeln zum Grunde gelegt wird.

Der Lehrsatz hat also seine völlige Richtigkeit.

Anmerkung. Um das viele Nachschlagen zu vermeiden, haben wir bey diesem Beweise die Stellen nicht angeführt, wo die Sätze aufgesucht werden müssen. Der Leser wird sie alle im VII. Hauptstücke antreffen.

§. 24.

In jedem sphärischen rechtwinklichen Dreyecke verhält sich der Halbmesser zur Tangente eines schiefen Winkels, wie der Sinus des anliegenden Katheten zur Tangente des gegenüberstehenden Katheten.



Beweis.

Beweis. Es sey wie vorher E der Mittelpunkt der Kugel; AB, BC, CA drey Bogen großer Zirkel auf der Kugelfläche, die ein Dreyeck bilden, welches in A oder CAB einen rechten Winkel hat.

Es werden BA und BC verlängert bis BH = 90^g = BF, und aus dem Pole B wird der Bogen HF beschrieben, welcher den Winkel B mißt.

Ziehe die Halbmesser FE = HE = CE = AE = BE.

Ziehe AD, den Sinus des Katheten AB, senkrecht auf BE.

Verlängere in Gedanken die Ebne EHF, und errichte in derselben die Tangente HP des Bogens FH oder des Winkels B. Verlängere auch den Halbmesser EF bis er die Tangente in P schneidet, und also deren Länge HP bestimmet.

Verlängere nun in Gedanken die Ebne AEC, und errichte in derselben die Tangente AM des Bogens AC senkrecht auf AE. In der nemlichen Ebne verlängere den Halbmesser EC, bis er die Tangente in M schneidet, und ihre Länge AM bestimmet.

Ziehe MD. Da die Linie EC oder EM der Durchschnitt der Ebnen AEC und BEF ist, so lieget sie in beyden Ebnen. Also lieget ME in der Ebne BEF, und zum Theile in deren Verlängerung. Da nun der Punkt D in der nemlichen Ebne lieget, so lieget die Linie MD in der Ebne BEF.

Die Ebnen HEF und AEC, oder HEP und AEM sind senkrecht auf der Ebne BEH, und da HP und AM auf den Durchschnitten HE und AE senkrecht sind, so sind HP und AM beyde auf der Ebne BEH senkrecht, folglich parallel mit einander.

Ferner ist HE senkrecht auf BE, weil der Bogen BH = 90^g ist. Auch ist AD auf BE senkrecht gezogen worden. Demnach HE parallel mit AD.

Also ist die Ebne die durch PH und HE gehet, mit derjenigen parallel, die durch MA und AD gehet.

Da nun diese beyde Parallel-Ebnen von einer dritten Ebne BEF geschnitten werden, so sind die Durchschnittte PE und MD parallel. Also bestehen die Dreyecke PHE und MAD aus Seiten die mit einander parallel sind.

Demnach sind diese beyden Dreyecke ähnlich, und es ist

EH, HP :: DA, AM

oder der Halbmesser EH verhält sich zur Tangente HP des Winkels B, wie der Sinus DA des anliegenden Katheten AB, zur Tangente AM des Gegenkatheten AC.

Anmerkung. Wer beyde vorigen Beweise nicht gut aus den perspektivischen Zeichnungen begreifen kann, mache sich die nöthigen Figuren von etwas starkem Papiere oder von Holz. Wir hätten zwar diesen letzten Lehrsatz aus dem vorigen herleiten können, wie Herr *Cagnoli* in seinem Traité de Trigonométrie rectiligne & sphérique, nach Herrn *Chompré* Uebersetzung, im XVten Hauptstücke gethan hat. Es scheint uns aber besser zu seyn, daß man die Hauptsätze, worauf eine mathematische Wissenschaft gegründet ist, so viel als möglich gerades Weges aus der Natur der Sache beweise. Die analytischen Folgerungen geben nicht eine so helle Evidenz, ob sie gleich zur Ueberzeugung hinlänglich sind.

§. 25.

In jedem sphärischen rechtwinklichen Dreyecke ist jeder Kathete von einerley Beschaffenheit mit seinem Gegenwinkel, das heißt, es sind beyde entweder größer oder kleiner als 90°.

Dieses erhellet aus der Proporzion (§. 24.)

R, TB :: SAB, TAC

woraus man erhält

$$TAC = \frac{TB \times SAB}{R}$$

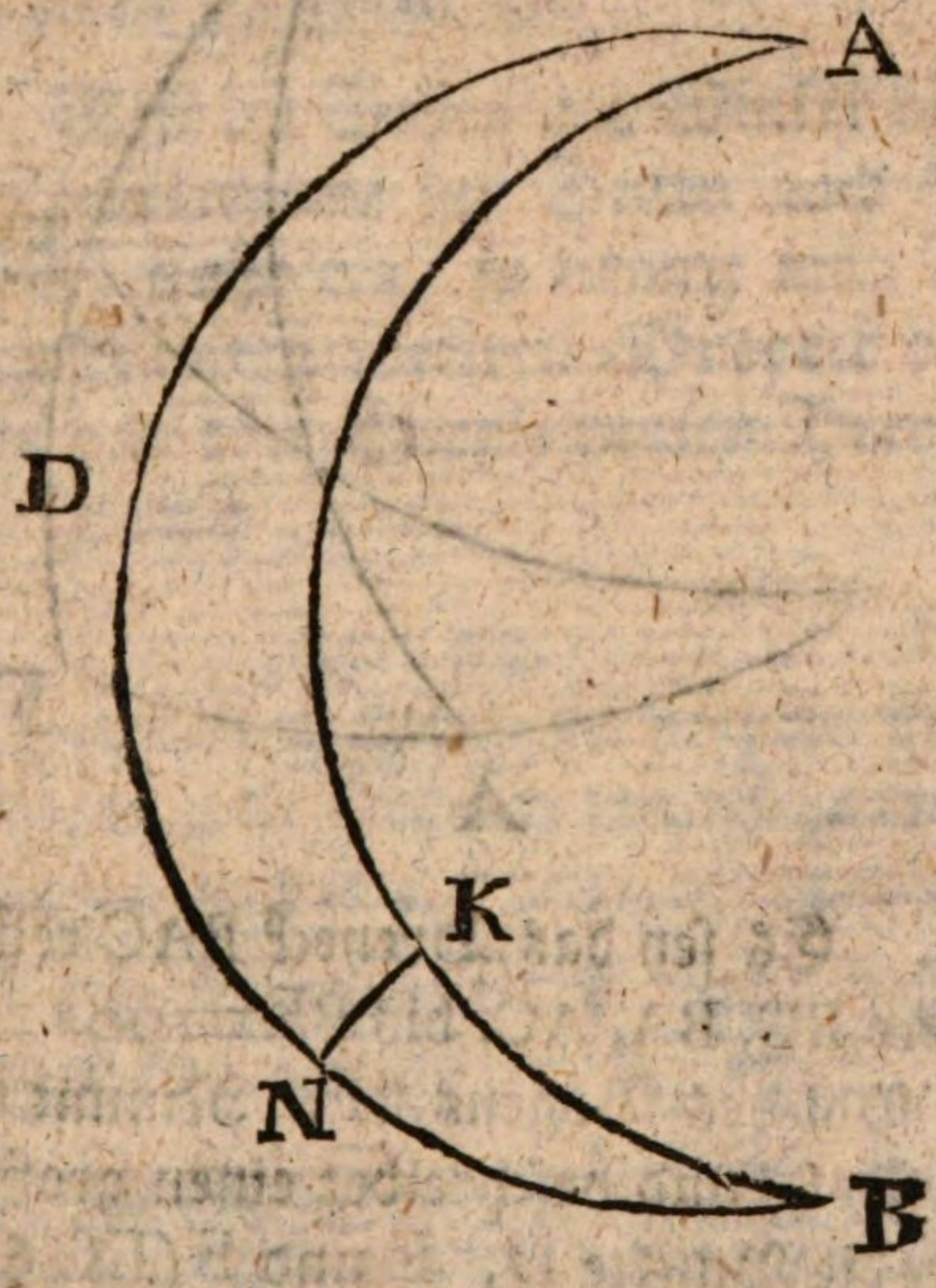
Der

Der Halbmesser R ist allemal positiv, desgleichen der SAB. Ist also TB positiv oder negativ, so wird TAC ebenfalls positiv oder negativ, das ist, wenn der Winkel B unter oder über 90 Grade hält, so hält auch der Bogen AC mehr oder weniger als 90 Grad. (XI. §. 21).

Anmerkung. Die gewöhnlichen Regeln für die Abwechslung der Zeichen, sind also hinlänglich, um die Beschaffenheit der unbekannten Größen zu bestimmen, ausgenommen in den Fällen, die an und für sich selbst zweifelhaft sind.

§. 26.

Wenn in einem sphärischen rechtwinklichen Dreyecke ein Winkel und die Gegenseite gegeben sind, so sind die übrigen Größen des Dreyecks zweifelhaft, ob sie nemlich größer oder kleiner als 90s sind, und die Umstände der Aufgabe müssen den Zweifel heben.

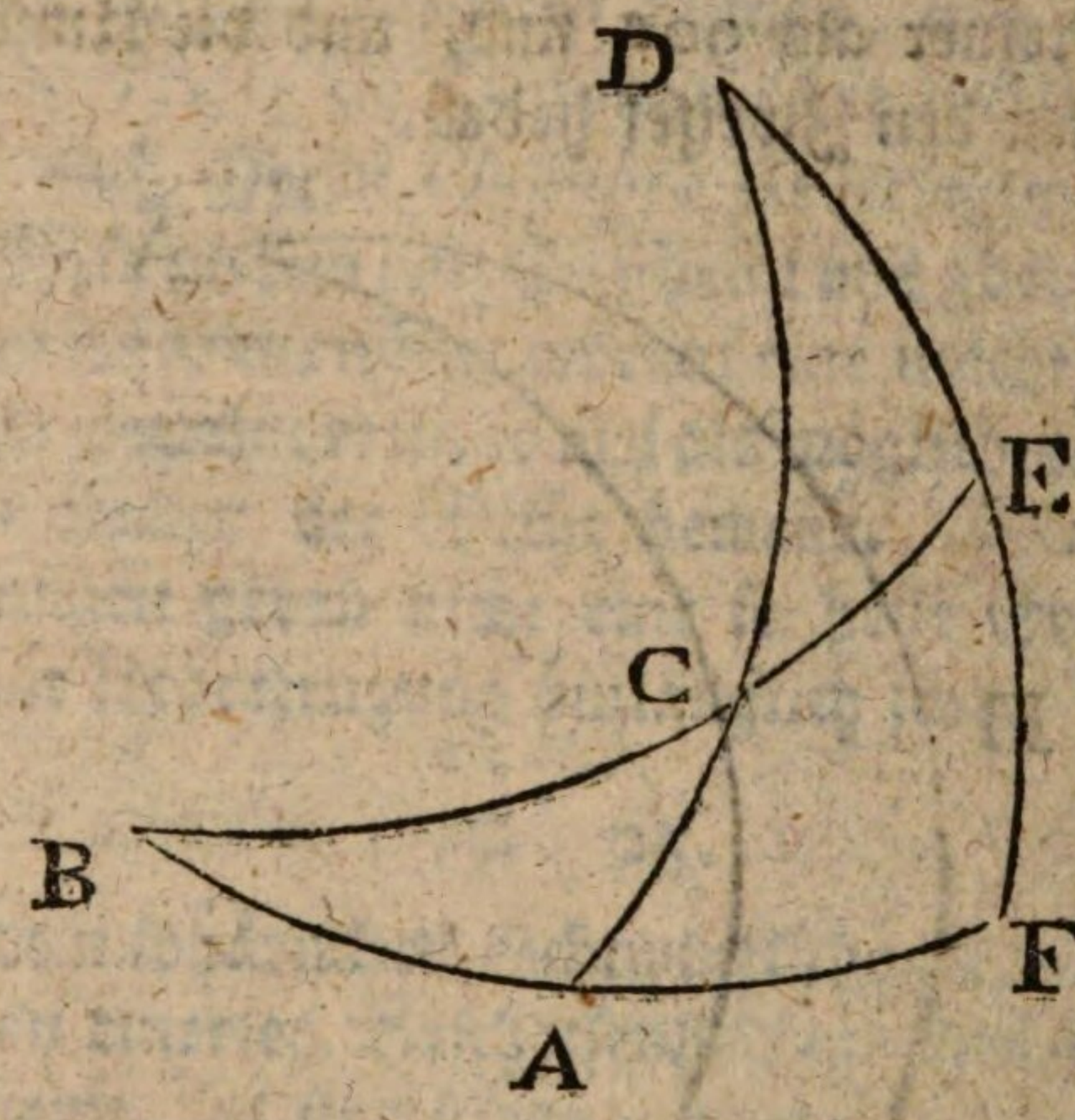


Es sey AB eine Spindel der Kugel und KN sey senkrecht auf ADB, so haben die Dreyecke ANK, BNK die gemeine Seite NK, und es ist auch ∠KAN = ∠KBN (IX. §. 34).

Gesetzt also, es sind KN und ∠B (= ∠A) gegeben, so entscheiden diese gegebene Größen nicht, ob die gegebene Seite KN und der gegebene Winkel B oder A zum Dreyecke BNK oder zum Dreyecke ANK gehören, ob die Hypotenuse BK oder deren Supplement AK, ob der andere Katheete BN oder dessen Supplement ADN ist, ob der andere schiefe Winkel BKN oder dessen Supplement AKN ist.

§. 27.

In jedem sphärischen rechtwinklichen Dreyecke verhält sich der Kosinus eines Katheten zum Kosinus der Hypotenuse, wie der Halbmesser zum Kosinus des andern Katheten.



Beweis. Es sey das Dreyeck BAC rechtwinklich in A. Verlängere BC, BA, AC, bis BE = 90g = BF = AD. So ist D der Pol des Bogens BF. Nimmt man nun den Punkt B zum Pol, und beschreibet einen großen Zirkel, so gehet er durch die Punkte D, E und F (IX. §. 46) und die Winkel in F und in E sind rechte. Da nun in A und F rechte Winkel sind, so ist auch FD = 90g.

Folglich ist DE das Komplement des Bogens EF, welcher den Winkel B mißt, oder DE ist das Komplement des Winkels B.

CE ist das Komplement der Hypotenuse BC.

AF, oder der Winkel D ist das Komplement des Katheten BA.

CD ist das Komplement des Katheten AC.

Da nun das Dreyeck DEC in E rechtwinklich ist, so lassen sich auf dasselbe die oben angeführten Lehrsätze anwenden. Es ist also (§. 23)

$$\text{S}CD, \text{S}CE :: R, \text{S}D$$

Es ist aber $\text{S}CD = \text{S}'AC$, $\text{S}CE = \text{S}'BC$, $\text{S}D (= \text{S}AF) = \text{S}'BA$, also ist im Dreyecke BAC

$$\text{S}'AC, \text{S}'BC :: R, \text{S}'AB$$

das ist, der Kosinus des Katheten AC verhält sich zum Kosinus der Hypotenuse BC, wie der Halbmesser zum Kosinus des anderen Katheten AB.

Anmerkung. Weil die Seiten und Winkel des Dreyecks DCE die Komplemente der Seiten und Winkel des Dreyecks BAC enthalten, so nennet man eines dieser Dreyecke das **Komplementen-Dreyeck** des anderen, welches nicht mit dem Supplementen-Dreyecke zu verwechseln ist. (§. 8.)

§. 28.

In jedem sphärischen Dreyecke verhält sich der Kosinus eines Katheten zum Kosinus des Gegenwinkels, wie der Halbmesser zum Sinus des anderen schiefen Winkels.

Beweis. Im Dreyecke CDE (letzte Figur) ist

$$\text{S}CD, \text{S}DE :: R, \text{S}C$$

Es ist aber CD das Komplement von AC, DE das Komplement des Bogens EF oder des Winkels B, und $\angle C$ im Dreyeck DEC ist $= \angle C$ im Dreyeck BAC (IX. §. 49). Also ist

$$\text{S}'AC, \text{S}'B :: R, \text{S}C$$

§. 29.

§. 29.

In jedem sphärischen rechtwinklichen Dreyecke verhält sich die Tangente der Hypotenuse zur Tangente eines Katheten, wie der Halbmesser zum Kosinus des anliegenden schiefen Winkels.

(Siehe die vorige Figur.)

Beweis. Im Dreyecke DEC ist (§. 24)

$$R, \mathfrak{T}D :: \mathfrak{S}DE, \mathfrak{T}CE$$

Es ist aber $\angle D$ oder der Bogen AF das Komplement des Katheten BA, DE ist das Komplement des Bogens EF oder des Winkels B, und CE ist das Komplement der Hypotenuse BC. Also ist

$$R, \mathfrak{T}'BA :: \mathfrak{S}'B, \mathfrak{T}'BC$$

oder $$R, \mathfrak{S}'B :: \mathfrak{T}'BA, \mathfrak{T}'BC$$

Will man zu mehrerer Bequemlichkeit die Tangenten gebrauchen, so ist (XI. § 49.)

$$R, \mathfrak{S}'B :: \frac{R.R}{\mathfrak{T}BA}, \frac{R.R}{\mathfrak{T}BC}$$

oder $$R, \mathfrak{S}'B :: \frac{1}{\mathfrak{T}BA}, \frac{1}{\mathfrak{T}BC}$$

Man multiplizire die beyden letzten Sätze mit $\mathfrak{T}BA \times \mathfrak{T}BC$, so kömmt

$$R, \mathfrak{S}'B :: \mathfrak{T}BC, \mathfrak{T}BA$$

und diese Proporzion drücket unsern Lehrsatz aus.

§. 30.

In jedem sphärischen rechtwinklichen Dreyecke verhält sich der Halbmesser zum Kosinus der Hypotenuse, wie die Tangente des einen schiefen Winkels zur Kotangente des anderen. (Fig. bey §. 27.)

Beweis. Im Dreyecke CED ist (§. 24)

$$R, \mathfrak{T}C :: \mathfrak{S}CE, \mathfrak{T}DE$$

Es ist aber ∠C beyden Dreyecken CED, CBA gemein, CE ist das Komplement der Hypotenuse BC, und DE ist das Komplement des Bogens EF oder des Winkels B. Also ist

$$R, \mathfrak{T}C :: \mathfrak{S}'BC, \mathfrak{T}'B$$

oder $$R, \mathfrak{S}'BC :: \mathfrak{T}C, \mathfrak{T}'B$$

Setzet man $\frac{R.R}{\mathfrak{T}'C}$ anstatt $\mathfrak{T}C$, und $\frac{R.R}{\mathfrak{T}B}$ anstatt $\mathfrak{T}'B$, so ist

$$R, \mathfrak{S}'BC :: \frac{R.R}{\mathfrak{T}'C}, \frac{R.R}{\mathfrak{T}B}$$

$$R, \mathfrak{S}'BC :: \frac{1}{\mathfrak{T}'C}, \frac{1}{\mathfrak{T}B}$$

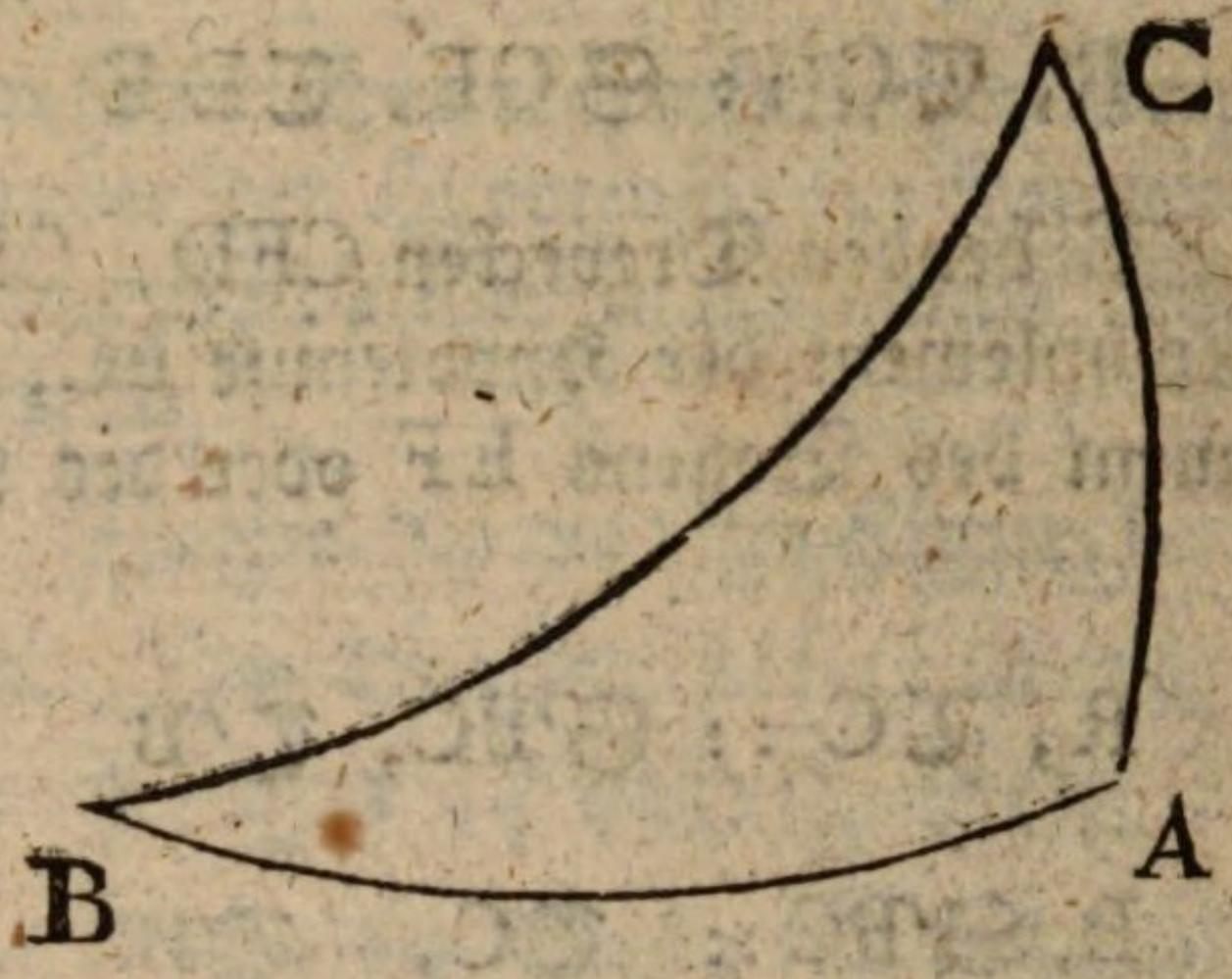
oder $$R, \mathfrak{S}'BC :: \mathfrak{T}B, \mathfrak{T}'C$$

Also gilt das Verhältniß von beyden schiefen Winkeln, in welcher Ordnung man sie auch nehmen mag.

§. 31.

Zu mehrerer Bequemlichkeit der Leser wollen wir hier die vornehmsten Verhältnisse wiederholen, die bisher bewiesen worden.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sey demnach BAC ein sphärisches rechtwinkliches Dreyeck, so ist

I) $\mathfrak{S}BC, \mathfrak{S}AB :: R, \mathfrak{S}C$ (§. 23.)
folglich auch $\mathfrak{S}BC, \mathfrak{S}AC :: R, \mathfrak{S}B$

II) $R, \mathfrak{T}B :: \mathfrak{S}AB, \mathfrak{T}AC$ (§. 24)
folglich auch $R, \mathfrak{T}C :: \mathfrak{S}AC, \mathfrak{T}AB$

III) $\mathfrak{S}'AC, \mathfrak{S}'BC :: R, \mathfrak{S}'AB$ (§. 27)
folglich auch $\mathfrak{S}'AB, \mathfrak{S}'BC :: R, \mathfrak{S}'AC$

IV) $\mathfrak{S}'AC, \mathfrak{S}'B :: R, \mathfrak{S}C$ (§. 28)
folglich auch $\mathfrak{S}'AB, \mathfrak{S}'C :: R, \mathfrak{S}B$

V) $\mathfrak{T}BC, \mathfrak{T}AB :: R, \mathfrak{S}'B$ (§. 29)
folglich auch $\mathfrak{T}BC, \mathfrak{T}AC :: R, \mathfrak{S}'C$

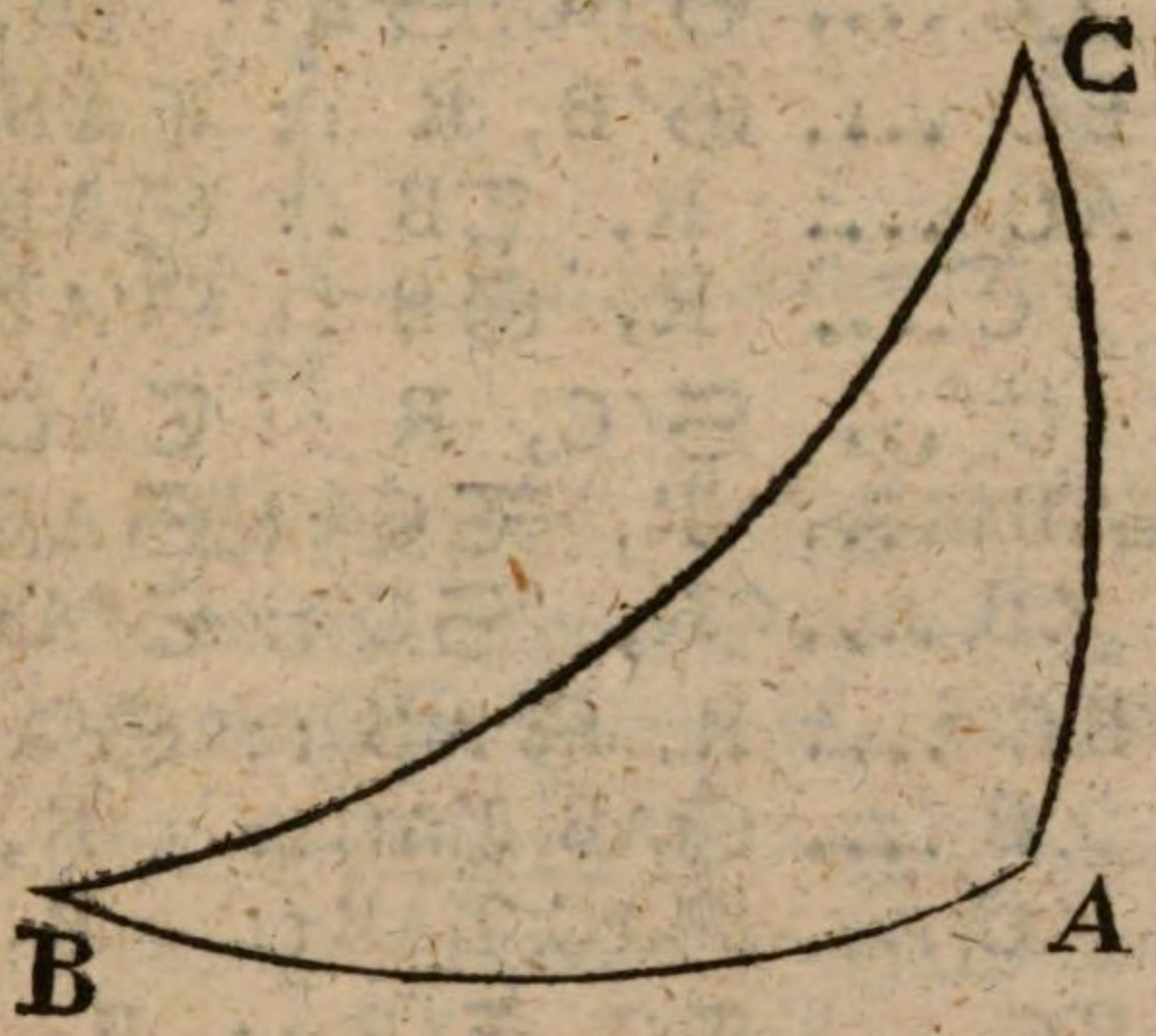
VI) $R, \mathfrak{S}'BC :: \mathfrak{T}C, \mathfrak{T}'B$ (§. 30)
folglich auch $R, \mathfrak{S}'BC :: \mathfrak{T}B, \mathfrak{T}'C$.

Vermittelst dieser sechs Proporzionen kann man jedes sphärische Dreyeck auflösen, das heißt, aus zwey gegebnen Größen die übrigen finden.

§. 32.

Aufgabe.

Aus zwey bekannten Größen eines sphärischen rechtwinklichen Dreyecks, jede andere unbekannte Größe des nemlichen Dreyecks finden.



Auflösung. Es sey das Dreyeck rechtwinklich in A, so gebrauche man folgende Proporzionen, welche nichts anders als die sechs im vorigen Paragraph angeführten sind.

Gegeben. Gesuchet. Proporzion.

BC, ∠B { AC .... R, ☉BC :: ☉B*, ☉AC*
AB .... R, ☉'B :: ☉BC, ☉AB
∠C .... R, ☉'BC :: ☉B, ☉'C

BC, ∠C { AB .... R, ☉C :: ☉BC, ☉AB
AC .... R, ☉'C :: ☉BC, ☉AC
∠B .... R, ☉'BC :: ☉C, ☉'B

BC, AB { AC .... ☉'AB, R :: ☉'BC, ☉'AC
∠B .... ☉BC, ☉AB :: R, ☉'B
∠C .... ☉BC, ☉AB* :: R, ☉C*

BC, AC { AB .... ☉'AC, ☉'BC :: R, ☉AB
∠C .... ☉BC, ☉AC :: R, ☉'C
∠B .... ☉BC, ☉AC* :: R, ☉B*

AB,

Gegeben.	Gesuchet.	Proporzion.
AB, ∠C zweifelhaft.	BC .... SC,	R :: SAB, SBC
	AC .... TC,	R :: TAB, SAC
	∠B .... S'AB,	S'C :: R, SB
AC, ∠B zweifelhaft.	BC .... SB,	R :: SAC, SBC
	AB .... TB,	R :: TAC, SAB
	∠C .... S'AC,	S'B :: R, SC
AB, ∠B	BC .... S'B,	R :: TAB, TBC
	AC .... R,	TB :: SAB, TAC
	∠C .... R,	SB :: S'AB, S'C
AC, ∠C	BC .... S'C,	R :: TAC, TBC
	AB .... R,	TC :: SAC, TAB
	∠B .... R,	SC :: S'AC, S'B
AB, AC	BC .... R,	SAB :: S'AC, S'BC
	∠B .... SAB,	TAC :: R, TB
	∠C .... SAC,	TAB :: R, TC
∠B, ∠C	BC .... TC,	T'B :: R, S'BC
	AB .... SB,	R, :: S'C, S'AB
	AC .... SC,	R, :: S'B, S'AC

Die mit Sternen gezeichneten Bogen oder Winkel sind allemal von einerley Natur, nemlich beyde unter oder über 90g. Z. E. Die erste Formel lautet also:

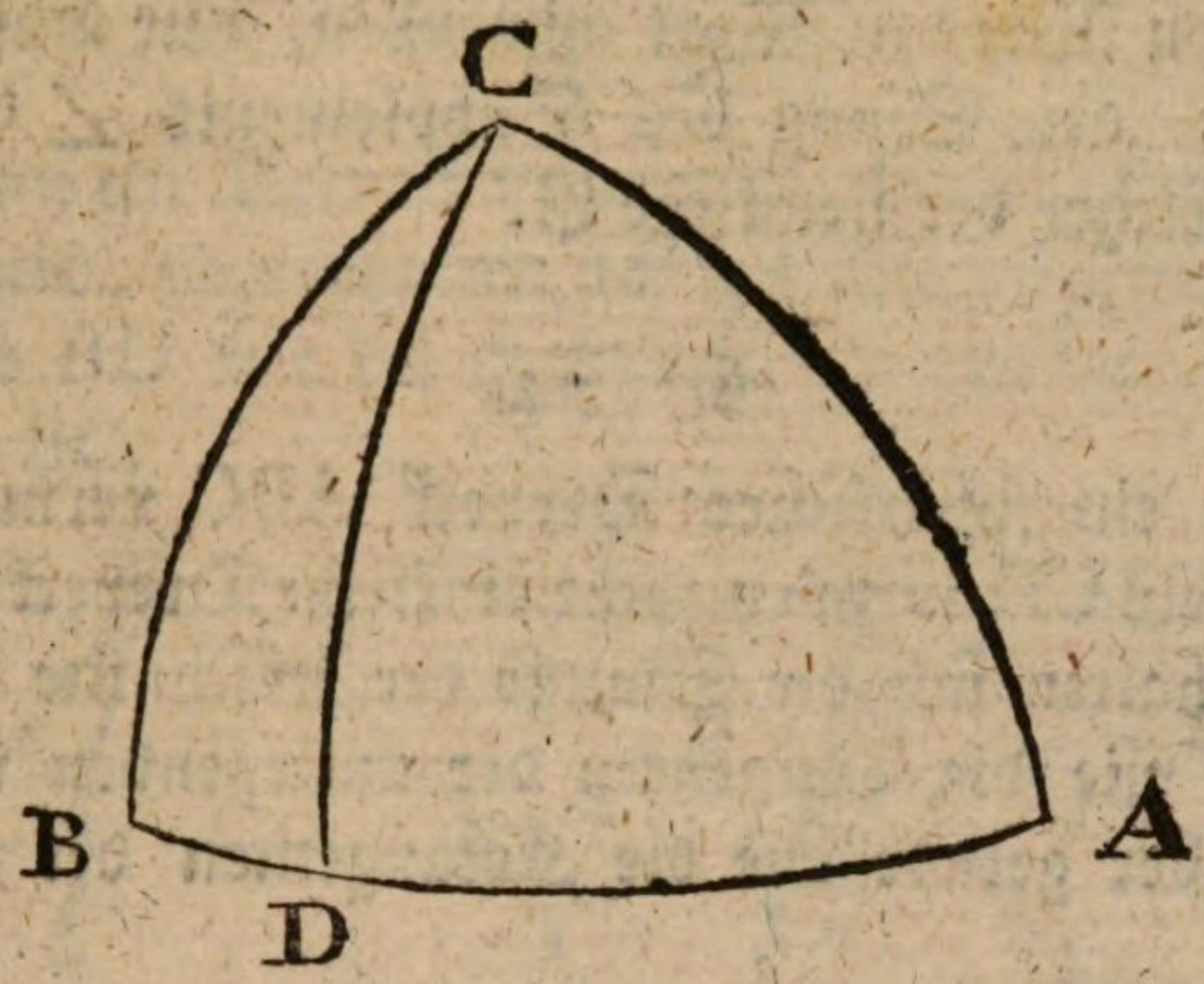
R, SBC :: SB*, SAC*

das heißt, wenn der Winkel B unter oder über 90g ist, so ist auch der Kathete AC unter oder über 90g. Bey den übrigen Formeln müssen die Zeichen die Beschaffenheit der gesuchten Bogen und Winkel bestimmen. (XI. §. 31). In den zweifelhaften Fällen müssen die Umstände der Aufgabe die Beschaffenheit der gesuchten Größe bestimmen. (§. 26.)

§. 33.

In jedem sphärischen Dreyecke verhalten sich die Sinusse zweyer Winkel allemal wie die Sinusse der Gegenseiten.

Beweis.

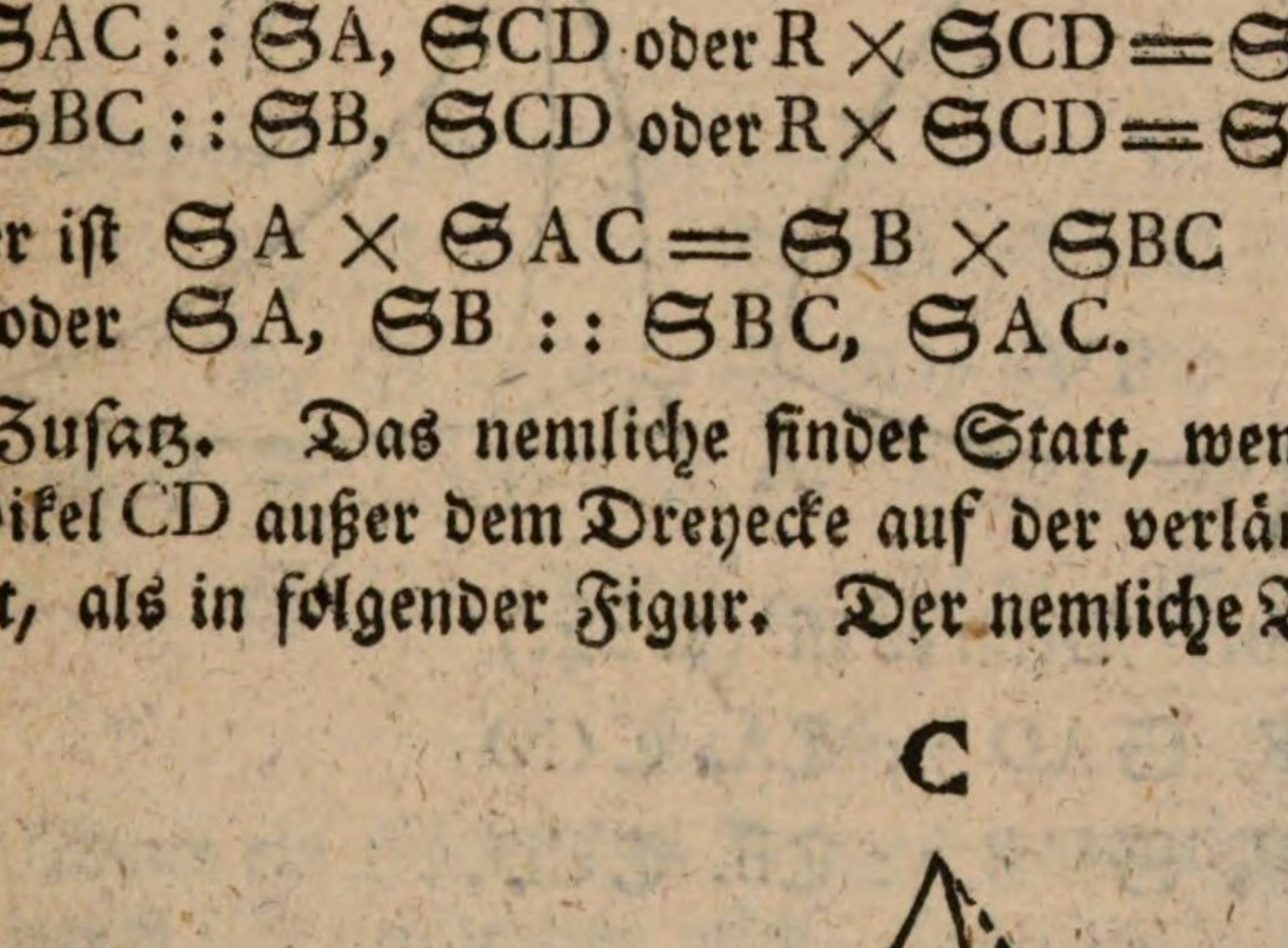


Beweis. Es sey ABC ein beliebiges Dreyeck. Aus C fälle auf BA den senkrechten Bogen CD, so sind BDC, ADC zwey rechtwinkliche Dreyecke, und es ist

R, ☉AC :: ☉A, ☉CD oder R × ☉CD = ☉A × ☉AC
R, ☉BC :: ☉B, ☉CD oder R × ☉CD = ☉B × ☉BC

daher ist ☉A × ☉AC = ☉B × ☉BC
oder ☉A, ☉B :: ☉BC, ☉AC.

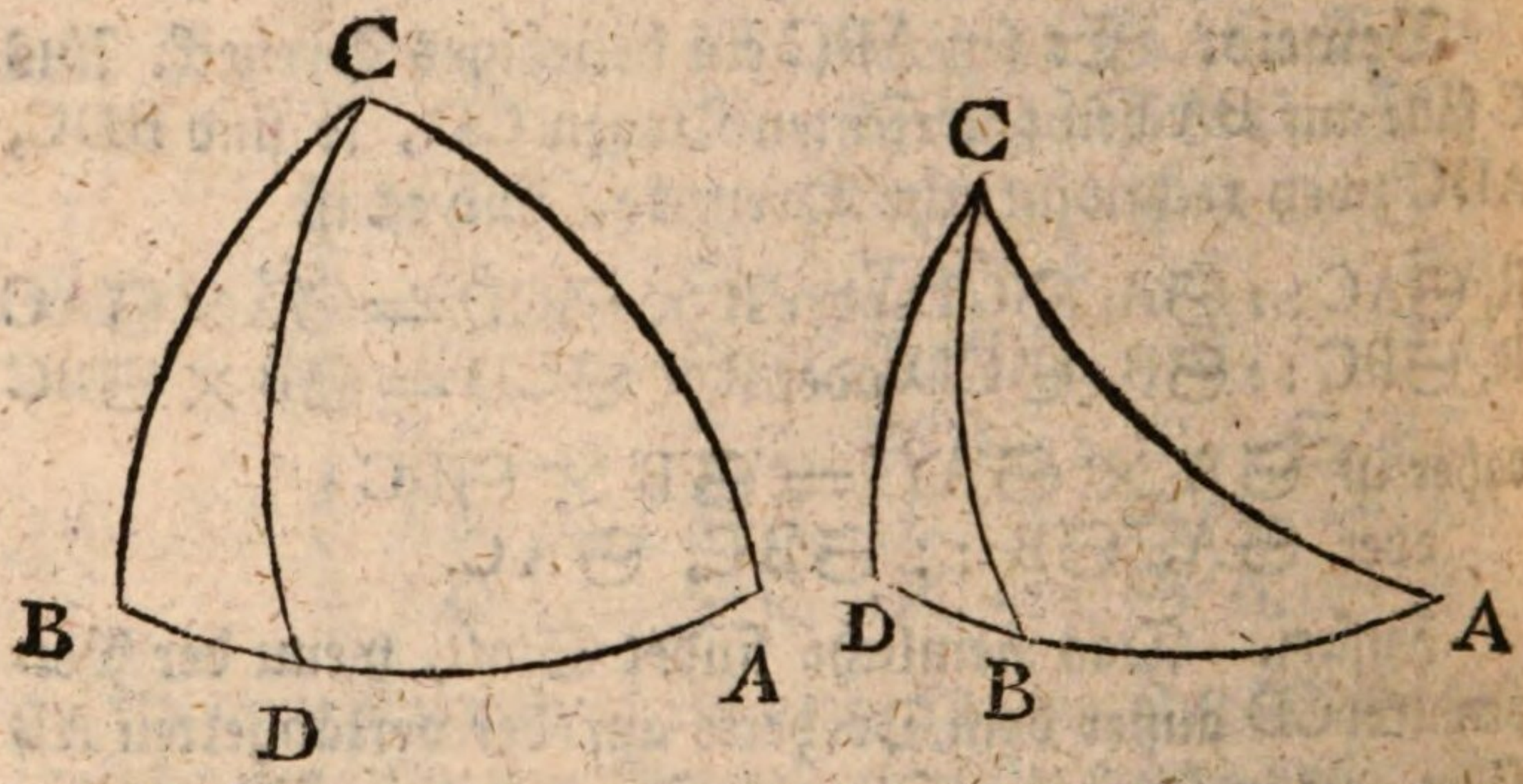
Zusatz. Das nemliche findet Statt, wenn der Perpendikel CD außer dem Dreyecke auf der verlängerten AB fället, als in folgender Figur. Der nemliche Beweis



läßt sich von Wort zu Wort anwenden, nur muß man anstatt SB, den Sinus des Supplements ∠ CBD verstehen, welcher der nemliche ist.

§. 34.

Wenn ein sphärisches Dreyeck ABC vermittelst des Perpendikels CD in zwey rechtwinkliche Dreyecke getheilet ist, so verhalten sich die Sinusse der Abschnitte BD, AD umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Winkel B und A, oder gerade wie die Kotangenten der nemlichen Winkel.



Beweis. Denn es ist (§. 24.)

R, SAD :: TA, TCD

R, SDB :: TB, TCD.

Daher ist

$R \times TCD = TA \times SAD$

$R \times TCD = TB \times SDB$

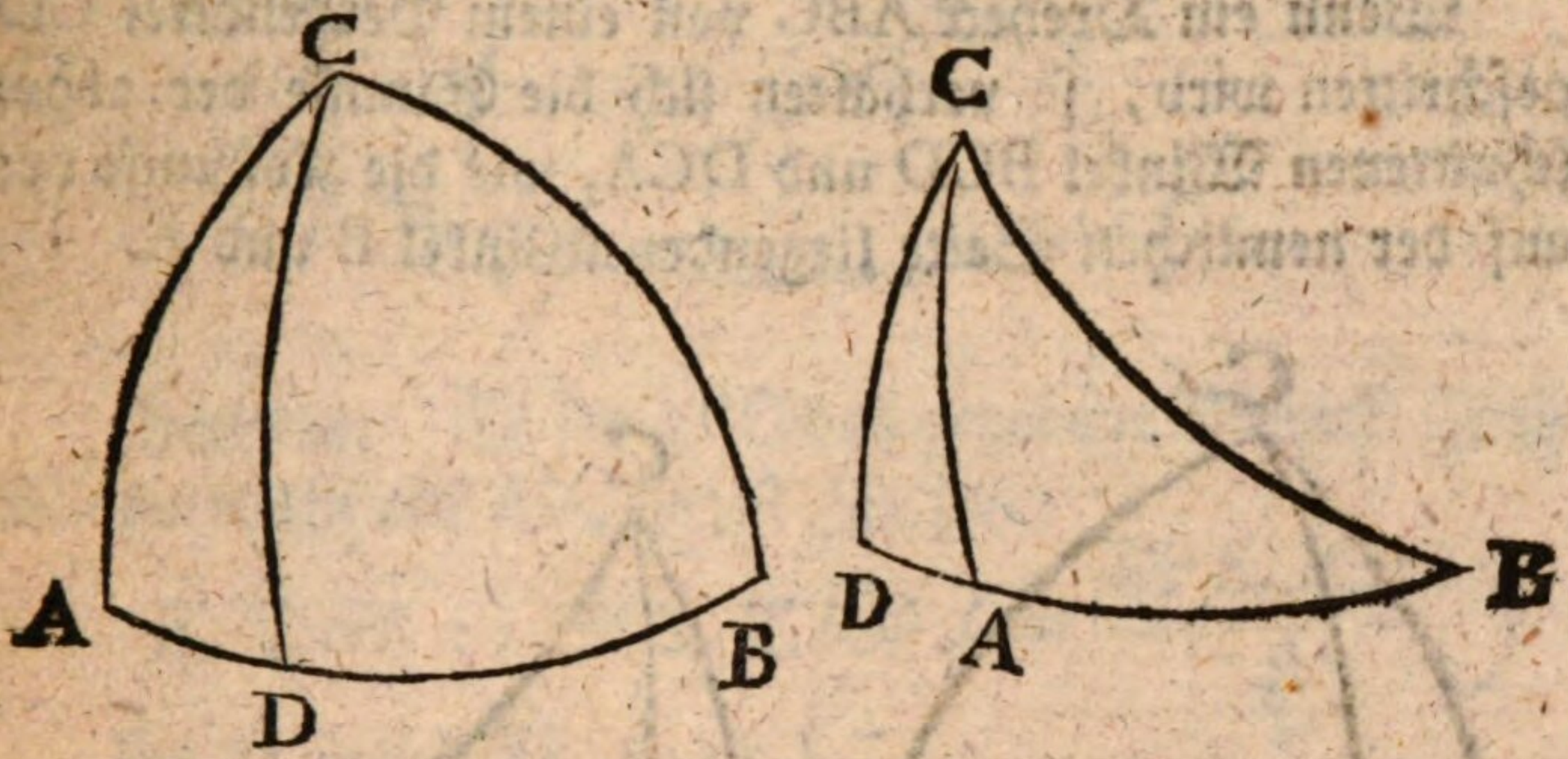
also $TA \times SAD = TB \times SDB$

folglich SAD, SBD :: TB, TA

oder SAD, SBD :: T'A, T'B (§. 29.)

§. 35.

Wenn ein Dreyeck vermittelst eines Perpendikels getheilet wird, so verhalten sich die Kosinusse der Abschnitte AD und BD wie die Kosinusse der anliegenden Seiten CA und BC.



Beweis. Es ist (§. 27.)

R, S′DC :: S′AD, S′AC

R, S′DC :: S′BD, S′BC

folglich ist S′AD, S′AC :: S′BD, S′BC

oder S′AD, S′BD :: S′AC, S′BC.

§. 36.

Wenn ein sphärisches Dreyeck vermittelst eines Perpendikels CD geschnitten wird, so verhalten sich die Kosinusse der abgeschnittenen Winkel BCD und ACD, wie die Kotangenten der anliegenden Seiten BC und AC, oder umgekehrt wie die Tangenten der nemlichen Seiten.

Beweis. Es ist

R, S′DCB :: TBC, TDC oder R × TDC = TBC × S′DCB

R, S′ACD :: TAC, TDC oder R × TDC = TAC × S′ACD

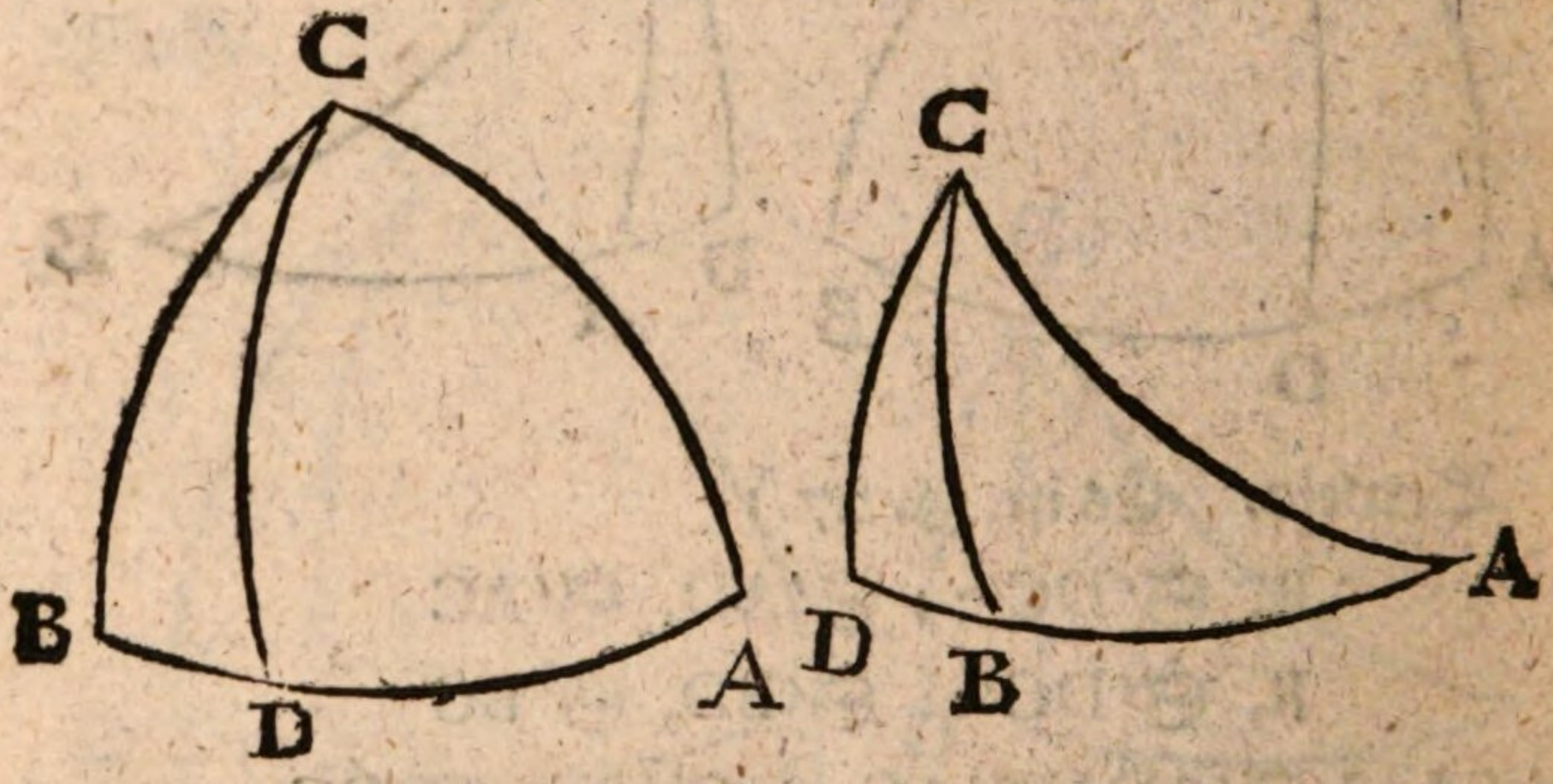
also ist $\mathfrak{T}BC \times S'DCB = \mathfrak{T}AC \times S'ACD$

oder $S'DCB, S'ACD :: \mathfrak{T}AC, \mathfrak{T}BC$

oder $S'DCB, S'ACD :: \mathfrak{T}'BC, \mathfrak{T}'AC.$

§. 37.

Wenn ein Dreyeck ABC von einem Perpendikel CD geschritten wird, so verhalten sich die Sinusse der abgeschnittenen Winkel BCD und DCA, wie die Kosinusse der auf der nemlichen Seite liegenden Winkel B und A.



Beweis. Es ist (§. 28.)

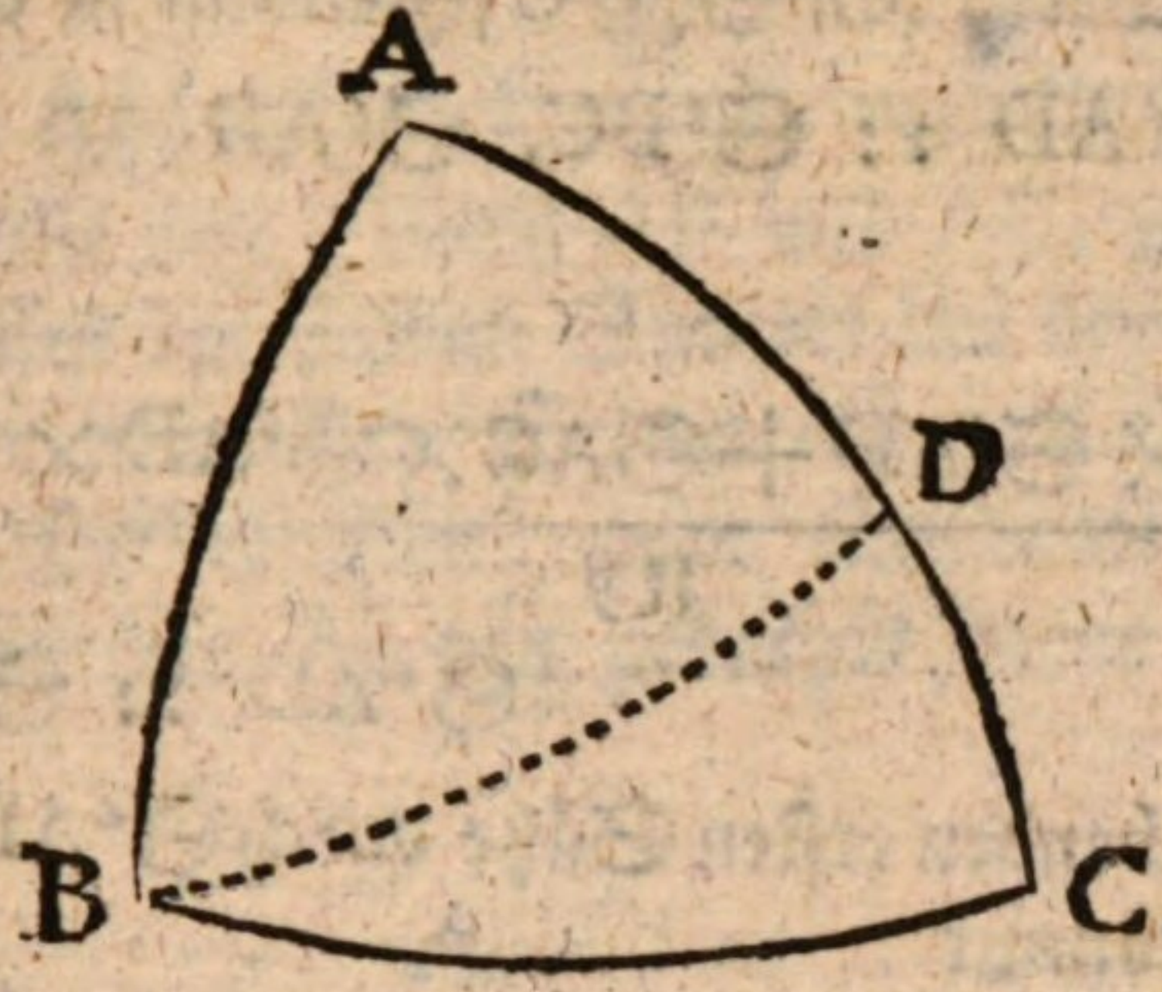
$R, S'DC :: SDCA, S'A$

$R, S'DC :: SBCD, S'B$

folglich $SDCA, SBCD :: S'A, S'B.$

§. 38.

In jedem sphärischen Dreyecke verhält sich das Produkt der Sinusse zweyer Seiten; zur Differenz der Produkte aus dem Halbmesser mit dem Kosinus der dritten Seite, und aus den Kosinussen beyder gegebenen Seiten: wie der Halbmesser, zum Kosinus des eingeschlossenen Winkels.



Beweis. Es sey ABC das gegebene Dreyeck. Ziehe BD senkrecht auf AC, so ist (§. 30.)

$$R, \mathfrak{T}AB :: \mathfrak{S}'A, \mathfrak{T}AD \left(= \frac{\mathfrak{S}'A.\mathfrak{T}AB}{R}\right)$$

Es ist auch (XI. §. 11.)

$$\mathfrak{S}'AD, \mathfrak{S}AD :: R, \mathfrak{T}AD \left(= \frac{\mathfrak{S}AD.R}{\mathfrak{S}'AD}\right)$$

Folglich ist

$$\frac{\mathfrak{S}'A.\mathfrak{T}AB}{R} = \frac{\mathfrak{S}AD.R}{\mathfrak{S}'AD}$$

$$\frac{\mathfrak{S}'AD.\mathfrak{T}AB.\mathfrak{S}'A}{R.R} = \mathfrak{S}AD$$

Ferner ist im Dreyecke ABC (§. 35.)

$$\mathfrak{S}'DC, \mathfrak{S}'AD :: \mathfrak{S}'BC, \mathfrak{S}'AB.$$

Nun ist $\mathfrak{S}'DC = \mathfrak{S}'(AC - AD)$

$$= \frac{\mathfrak{S}'AC \times \mathfrak{S}'AD + \mathfrak{S}AC \times \mathfrak{S}AD}{R}$$

oder wenn man anstatt $\mathfrak{S}AD$ den eben gefundenen Werth setzet, so ist

$$\mathfrak{S}'DC = \frac{R^2.\mathfrak{S}'AC \times \mathfrak{S}'AD + \mathfrak{S}AC.\mathfrak{S}'AD.\mathfrak{T}AB.\mathfrak{S}'A}{R^3}$$

Diesen Werth von S′DC setze man in das Verhältniß S′DC, S′AD :: S′BC, S′AB

so kömmt,

$$\frac{R^2.S'AC \times S'AD + SAC \times S'AD \times TAB \times S'A}{R^3},$$

S′AD :: S′BC, S′AB.

Dividire die beyden ersten Sätze durch S′AD, multiplizire mit R^3, so kömmt

$(R^2.S'AC + SAC \times TAB \times S'A), R^3 :: S'BC, S'AB.$

Multiplizire die äußersten und mittleren Sätze, so kömmt

$R^2.S'AC \times S'AB + SAC \times TAB \times S'A \times S'AB = R^3 . S'BC.$

Anstatt $TAB \times S'AB$ setze $R.SAB$, so ist

$R^2.S'AC \times S'AB + R.SAC.S'A.SAB = R^3 \times S'BC.$

Dividire alle Sätze durch R, so kömmt

$R \times S'AC \times S'AB + SAC.S'A.SAB = R^2 \times S'BC.$

Folglich ist

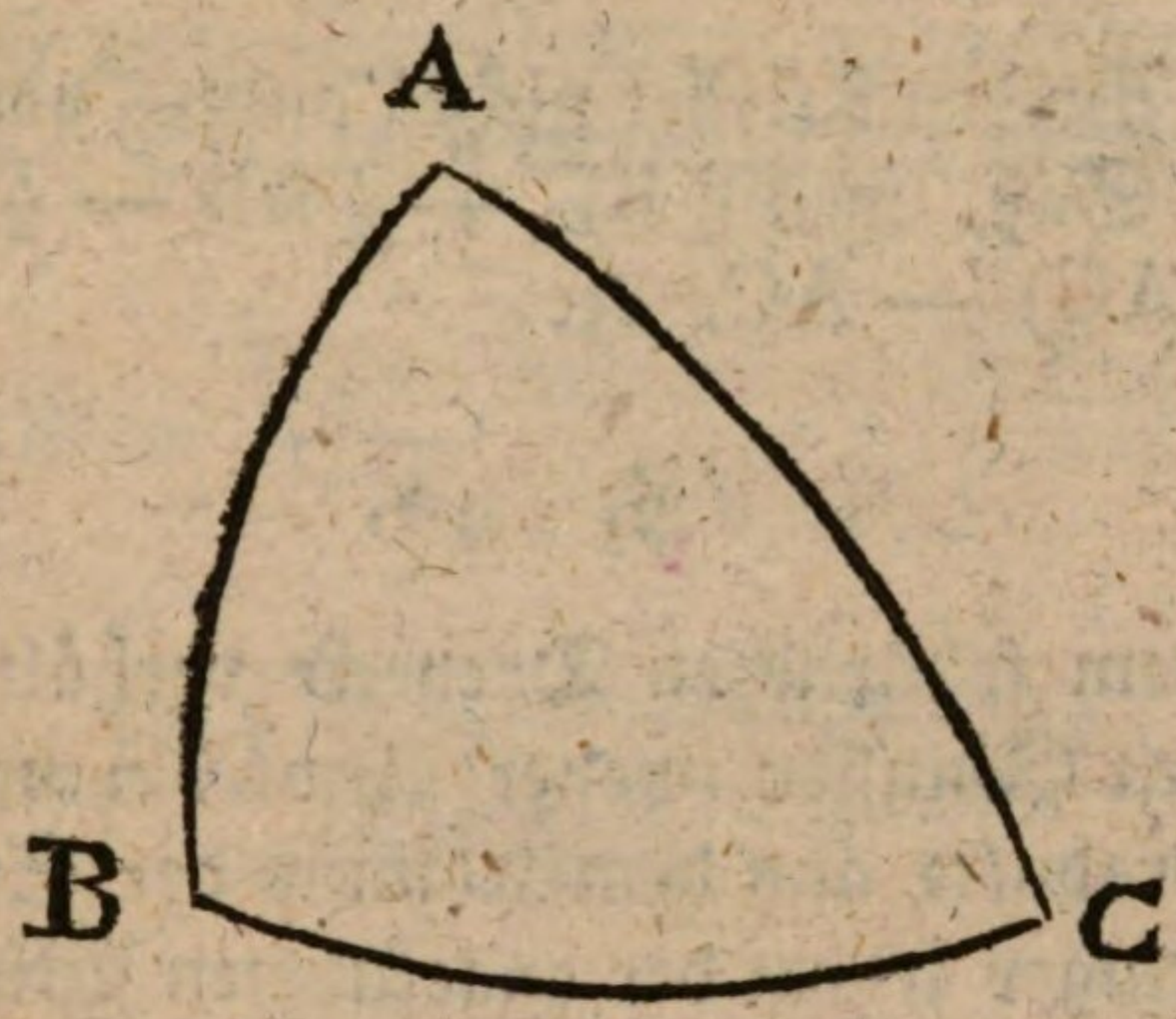
$$S'A \times SAC \times SAB = R^2 \times S'BC - R \times S'AC \times S'AB$$

$$S'A = \frac{R^2 \times S'BC - R \times S'AC \times S'AB}{SAC \times SAB.}$$

$$S'A = \frac{R\,(R.S'BC - S'AC.S'AB)}{SAC.SAB.}$$

§. 39.

In jedem sphärischen Dreyecke verhält sich das Produkt der Sinusse der Seiten AB und AC, zum Produkte aus den Sinussen der halben Summe der drey Seiten weniger jeder der nemlichen Seiten AB und AC; wie das Quadrat des Halbmessers, zum Quadrate des Sinus des halben Winkels A, den gedachte beyde Seiten einschließen.



Beweis. Es ist

$$2\,\mathfrak{S}^2\,\tfrac{1}{2}A = R\,(R - \mathfrak{S}'A) = RR - R.\mathfrak{S}'A.$$

Und da im vorigen Paragraph gefunden worden

$$\mathfrak{S}'A = \frac{R^2.\mathfrak{S}'BC - R.\mathfrak{S}'AC.\mathfrak{S}'AB}{\mathfrak{S}AC.\mathfrak{S}AB}$$

so ist

$$RR - R.\mathfrak{S}'A = RR - \frac{R^3.\mathfrak{S}'BC - R^2.\mathfrak{S}'AC.\mathfrak{S}'AB}{\mathfrak{S}AC.\mathfrak{S}AB}$$

$$= \frac{R^2.\mathfrak{S}AC.\mathfrak{S}AB - R^3.\mathfrak{S}'BC + R^2.\mathfrak{S}'AC.\mathfrak{S}'AB}{\mathfrak{S}AC.\mathfrak{S}AB}$$

oder weil $\mathfrak{S}AC.\mathfrak{S}AB + \mathfrak{S}'AC.\mathfrak{S}'AB = (\mathfrak{S}'AB - AC).R$, so ist

$$2\,\mathfrak{S}^2\,\tfrac{1}{2}A = RR.R\mathfrak{S}'A = \frac{R^3.\mathfrak{S}'(AB - AC) - R^3\mathfrak{S}'BC}{\mathfrak{S}AC.\mathfrak{S}AB}$$

Nun ist wiederum

$$S'(AB-AC)-S'BC=2S(\tfrac{1}{2}BC+\tfrac{1}{2}AB-\tfrac{1}{2}AC)\times S(\tfrac{1}{2}BC-\tfrac{1}{2}AB+\tfrac{1}{2}AC)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad

das Supplementen-Dreyeck (§. 8.) so ist in demselben (§. 38.)

$$\mathfrak{S}'c = \frac{R(R.\mathfrak{S}'ab - \mathfrak{S}'ac.\mathfrak{S}'cb)}{\mathfrak{S}ac.\mathfrak{S}bc}$$

Es ist aber $\mathfrak{S}'c$ der Kosinus des Supplements von AB, folglich $\mathfrak{S}'C = -\mathfrak{S}'AB$. Es ist aus der nemlichen Ursach $\mathfrak{S}'ab = -\mathfrak{S}'C$, $\mathfrak{S}'cb = -\mathfrak{S}'A$, $\mathfrak{S}ac = -\mathfrak{S}'B$, es ist ferner $\mathfrak{S}ac = \mathfrak{S}B$, $\mathfrak{S}bc = \mathfrak{S}A$, weil zwey Supplemente allemal den nemlichen Sinus haben. Setzet man diese Werthe in vorige Formel, so wird

$$-\mathfrak{S}'AB = \frac{R(-R\mathfrak{S}'C - \mathfrak{S}'E.\mathfrak{S}'A)}{\mathfrak{S}B.\mathfrak{S}A}$$

oder

$$\mathfrak{S}'AB = \frac{R(R\mathfrak{S}'C + \mathfrak{S}'B.\mathfrak{S}'A)}{\mathfrak{S}B.\mathfrak{S}A.}$$

Nun ist

$$2(\mathfrak{S}'\tfrac{1}{2}AE)^2 = R(R + \mathfrak{S}'AB)$$
$$= RR + R\,\mathfrak{S}'AB$$
$$= RR + \frac{R^3\,\mathfrak{S}'C + R^2\,\mathfrak{S}'C.\mathfrak{S}'A}{\mathfrak{S}B.\mathfrak{S}A}$$
$$= \frac{R^2.\mathfrak{S}B.\mathfrak{S}A + R^3\mathfrak{S}'C + R^2\mathfrak{S}'B\mathfrak{S}'A}{\mathfrak{S}B.\mathfrak{S}A}$$

oder weil $\mathfrak{S}'A.\mathfrak{S}'B + \mathfrak{S}A.\mathfrak{S}B = R\mathfrak{S}'(A-B)$, so ist

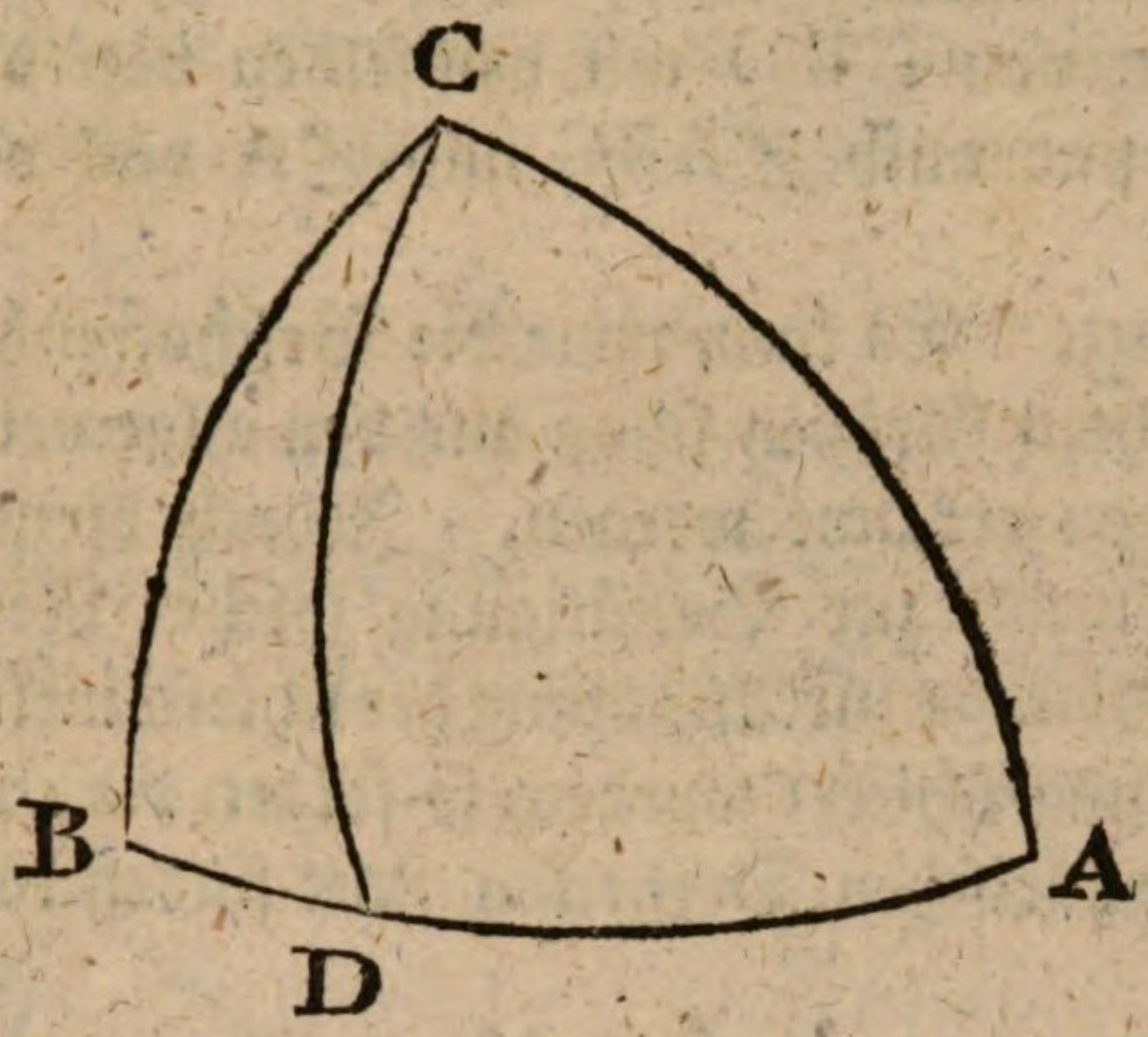
$$2(\mathfrak{S}'\tfrac{1}{2}AB)^2 = \frac{R^3\mathfrak{S}'C + R^3\,\mathfrak{S}'(A-B)}{\mathfrak{S}A.\mathfrak{S}B}$$

Nun ist

$$\mathfrak{S}'C + \mathfrak{S}'(A-B) = 2\mathfrak{S}'[\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(A-B)] \times \mathfrak{S}'[\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(A-B)]$$

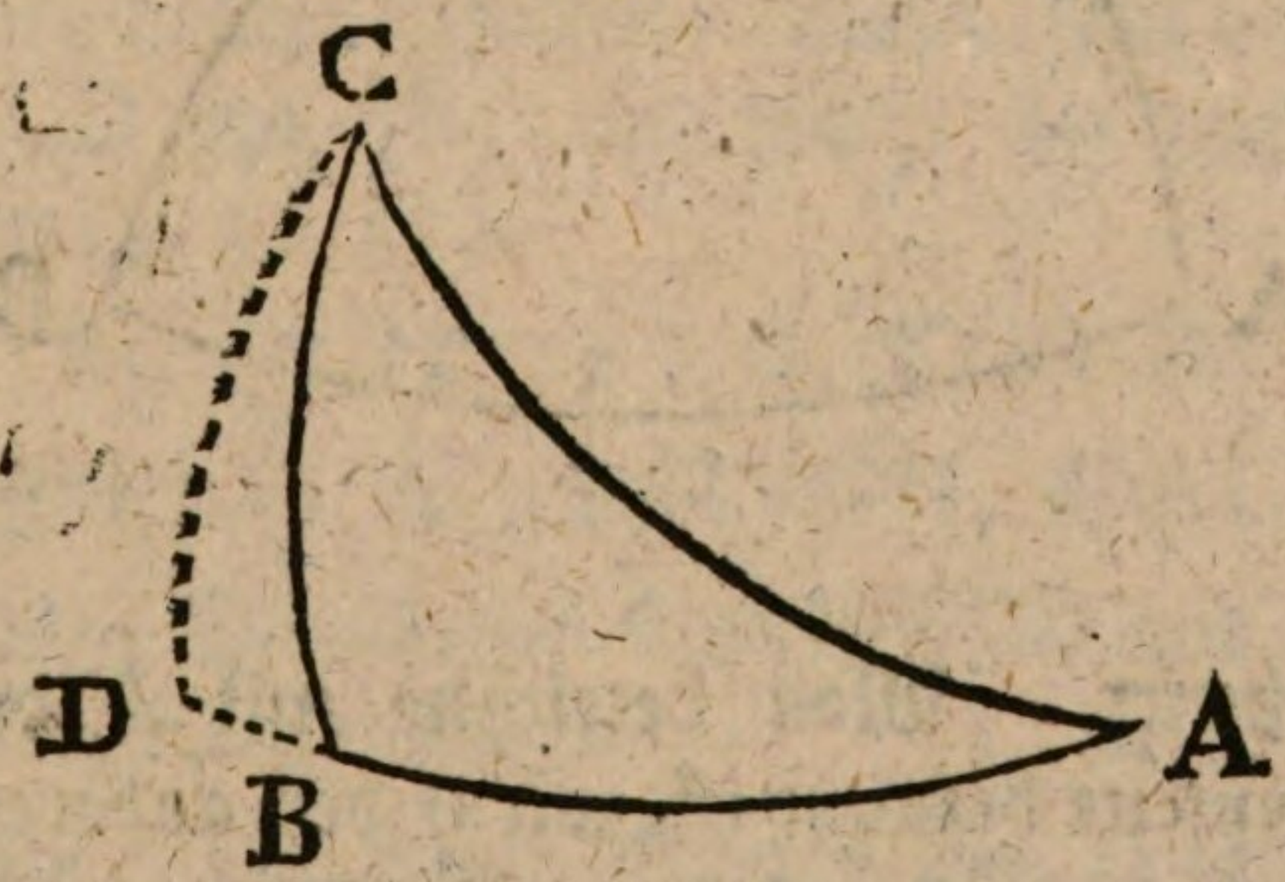
oder $\mathfrak{S}'C+\mathfrak{S}'(A-B)=2\,\mathfrak{S}'(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)\times \mathfrak{S}'(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)$

Also ist $\qquad\qquad\qquad



Beweis. Wenn der senkrechte Bogen CD innerhalb des Dreyecks ABC fällt, so setzet dieses nothwendig voraus, daß die Winkel A und B von einerley Art sind.

Denn im rechtwinklichen Dreyecke ADC ist ∠A nothwendig von einerley Art mit der Gegenseite CD, und im rechtwinklichen Dreyecke BCD ist ∠B ebenfalls von einerley Art mit der Gegenseite CD. (§. 25). Da nun ∠A und ∠B von einerley Art mit CD sind, so sind sie von einerley Art unter einander.



Fällt aber CD ausser dem Dreyecke, so ist im rechtwinklichen Dreyecke ADC der Winkel A von einerley Art mit CD (§. 25), und im rechtwinklichen Dreyecke BDC ist ∠CBD von einerley Art mit CD. Also sind ∠A und

∠CBD

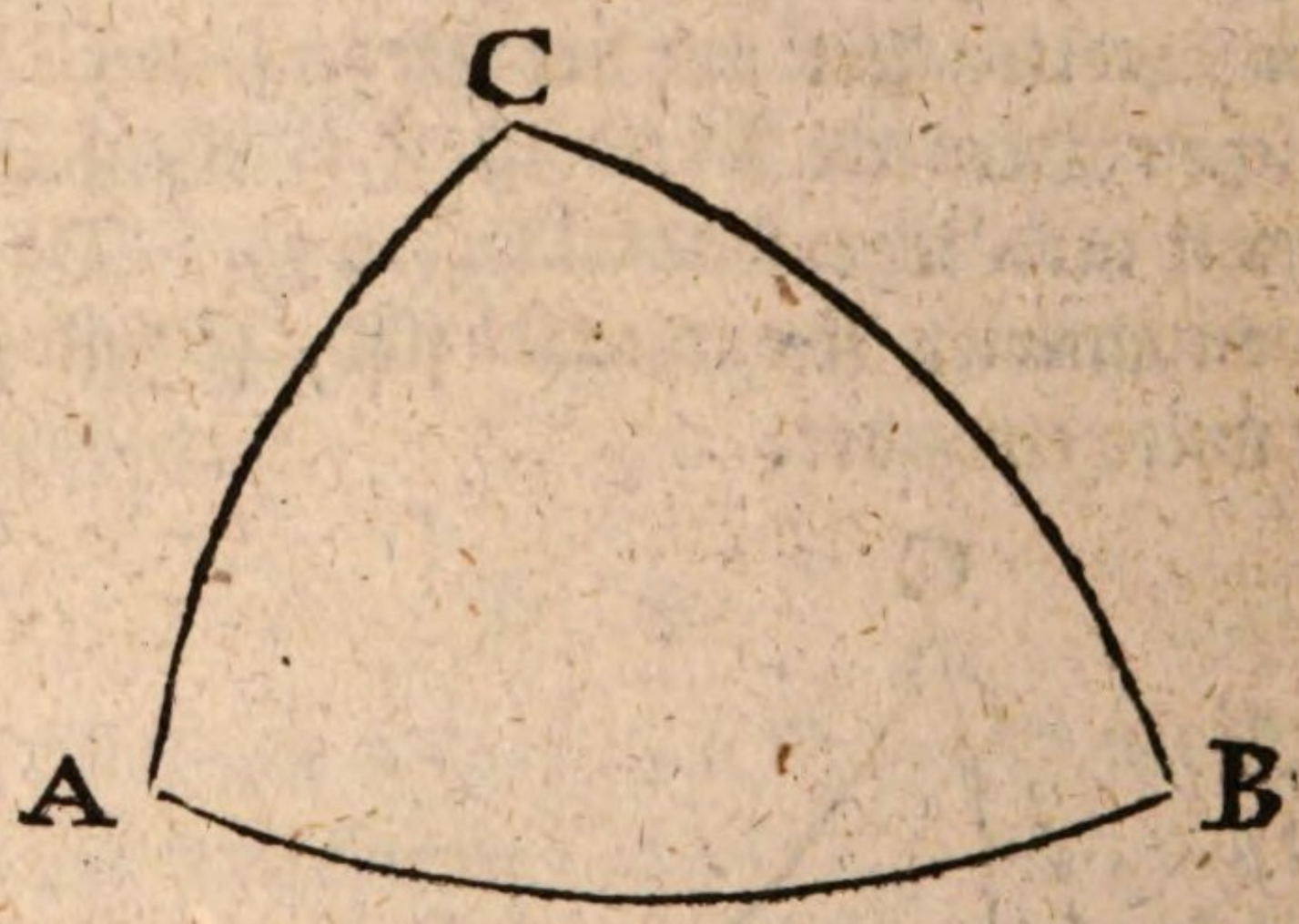
∠CBD von einerley Art. Da aber ∠ABC, als das Supplement von CBD mit demselben von verschiedener Art ist, so sind auch ∠ABC und ∠A von verschiedener Art.

Anmerkung. Es kann zwar die Beschaffenheit oder Art der gesuchten Größen schon aus den allgemeinen Regeln der Zeichen erkannt werden. Jedoch dienet der angeführte Lehrsatz zur Bestätigung solcher Regeln. Da nun die Gründe zur Auflösung der schiefwinklichen Dreyecke vorausgeschicket worden, so folgen die 12 Aufgaben, die bey sphärischen Dreyecken statt finden können.

§. 43.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Winkeln und der Gegenseite des einen, die Gegenseite des anderen finden.



Auflösung. Man bezeichne mit A den Winkel, dessen Gegenseite bekannt ist, mit B den anderen gegebenen Winkel, und mit C den dritten Winkel, und sage (§. 33)

$$\text{S}A, \text{S}B :: \text{S}BC, \text{S}AC.$$

Anmerkung. Weil der Sinus allemal positiv ist, es mag der Bogen oder Winkel entweder spitzig oder

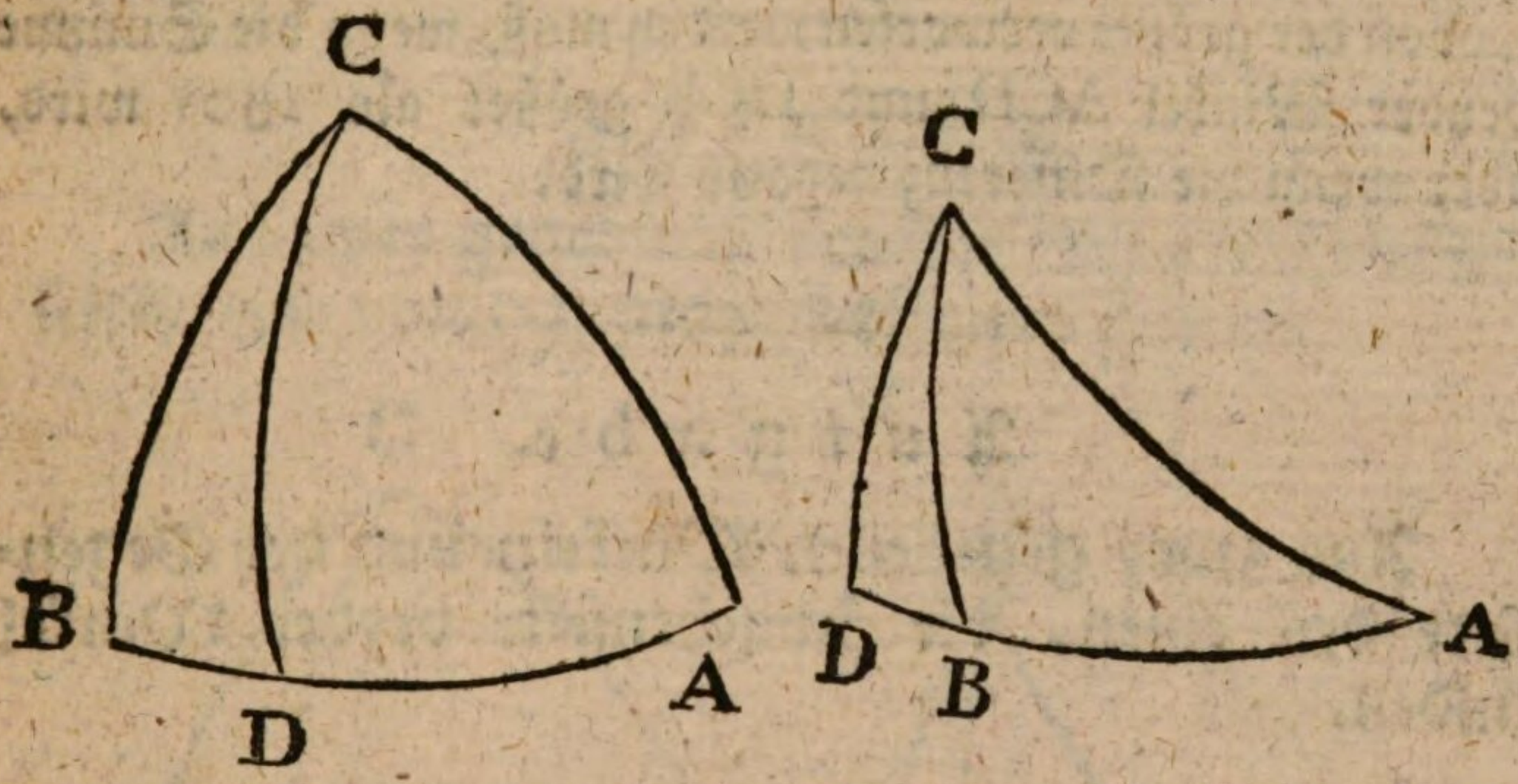
stumpf

stumpf seyn, so bleibet bey dieser Proporzion die Beschaffenheit der gesuchten Seite AC unbestimmet, und muß aus den Umständen der Aufgabe erkannt werden.

§. 44.

Aufgabe.

Aus zwei gegebnen Winkeln und der Gegenseite des einen, den dritten Winkel finden.



Auflösung. Bezeichne mit A den Winkel, dessen Gegenseite gegeben ist, mit B den anderen gegebenen Winkel, mit C den dritten Winkel. Aus C fälle den senkrechten Bogen CD auf AB, und mache die zwey folgende Proporzionen (§. 30. 37)

$$R, \mathfrak{S}'BC :: \mathfrak{T}B, \mathfrak{T}'BCD$$

$$\mathfrak{S}'B, \mathfrak{S}'A :: \mathfrak{S}BCD, \mathfrak{S}ACD$$

Die algebraische Summe der Winkel BCD und ACD giebt den verlangten Winkel BCA.

Sind nun A und B von einerley Art, so fällt der Perpendikular-Bogen CD innerhalb des Dreyecks, und man muß eigentlich die arithmetische Summe beyder Winkel BCD und ACD nehmen. Sind aber ∠A und ∠B von verschiedener Art, so fällt der Perpendikel CD ausser dem

Dreyecke

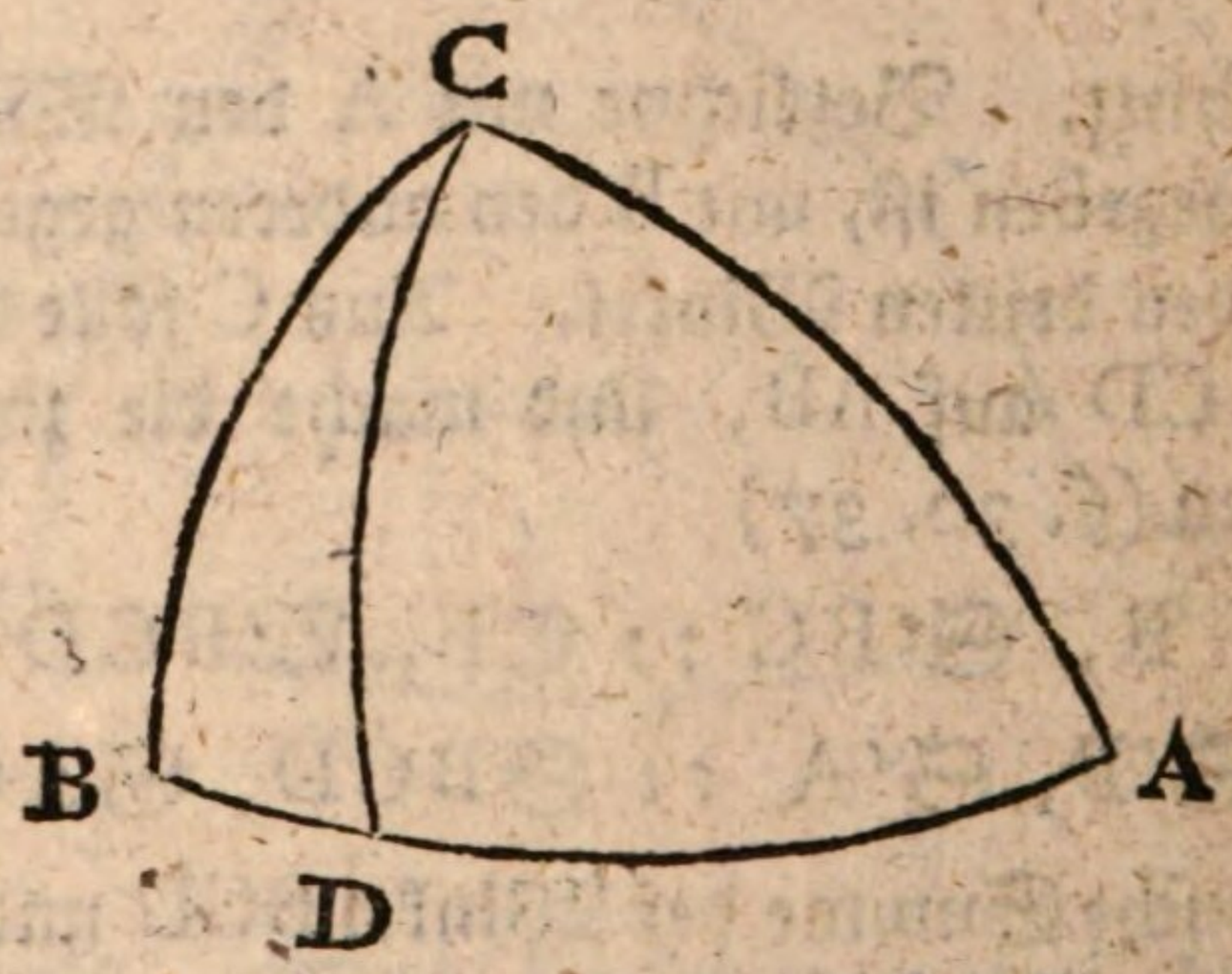
Dreyecke, und die Summe verwandelt sich in die Differenz $\angle ACD - \angle BCD$.

Ohne sich aber weiter darum zu bekümmern, halte man sich bloß an die Regeln der Zeichen. Was über 90^g ist, dessen Kosinus, Tangente und Kotangente ist allemal negativ, setzet man nun die negativen Größen gehörigermaßen in die Proporzion, so wird sich von selbst ausweisen, wie die gesuchte Größe beschaffen ist. Man merke noch, daß SACD allemal zwey Werthe des Winkels ACD giebt, wovon der größte verworfen werden muß, wenn die Summe beyder Winkel ACD und DCB größer als 180^g wird, oder wenn die Differenz negativ wird.

§. 45.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Winkeln und der Gegenseite des einen, die Zwischenseite beyder Winkel finden.



Auflösung. Bezeichne mit A den Winkel, dessen Gegenseite gegeben ist, mit B den anderen gegebenen Winkel, mit C den dritten Winkel, ziehe CD senkrecht auf AB, sage

erstlich (§. 29) R, S'B :: TBC, TBD

ferner (§. 34) TA, TB :: SBD, SAD

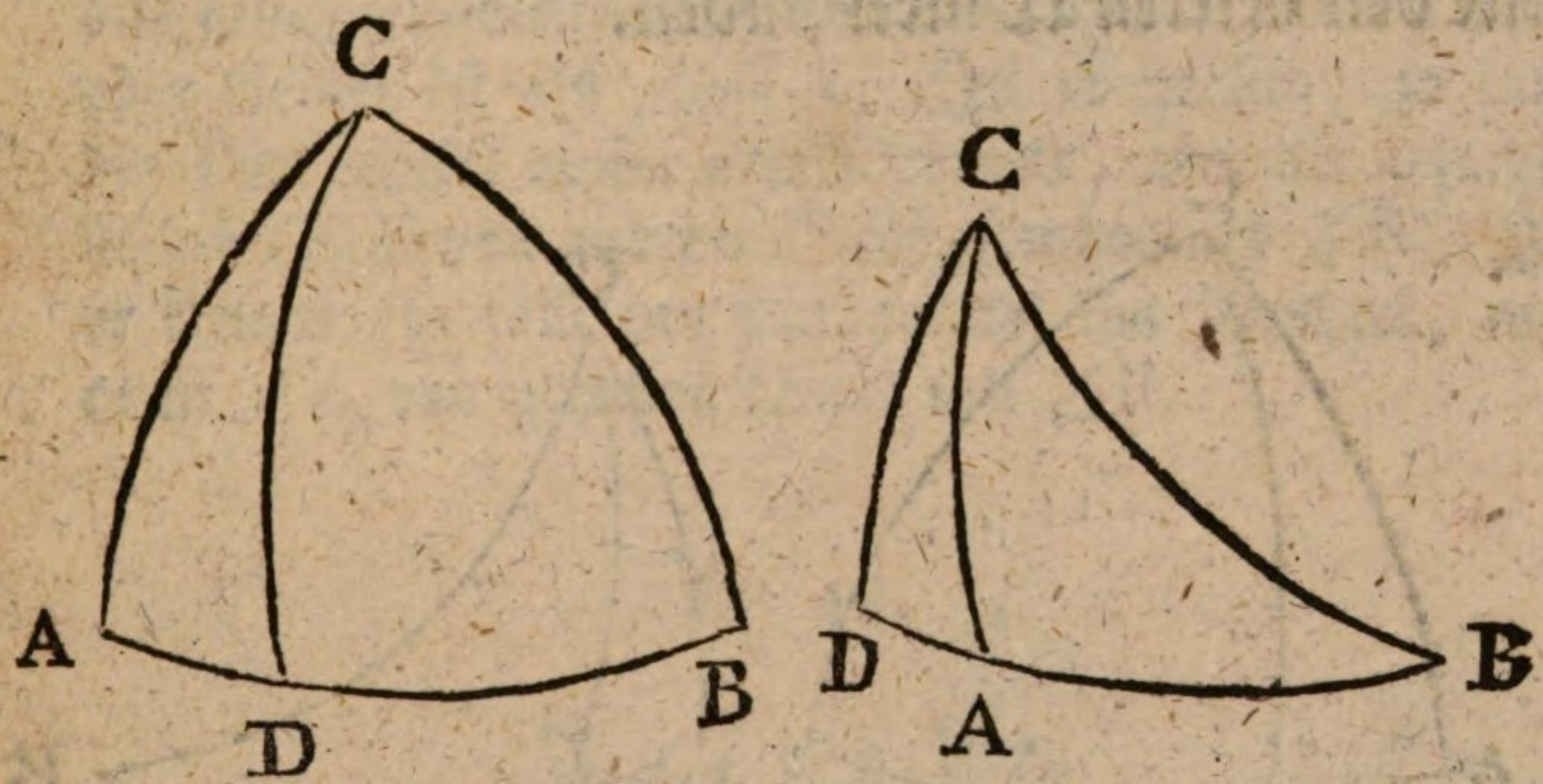
Hier-

Hierbey ist wiederum zu merken, daß man entweder die Summe oder die Differenz der Abschnitte AD und DB nehmen muß, nachdem A und B von einerley Art oder von verschiedener Art sind. Die Zeichen allein werden dieses hinlänglich bestimmen. Der ☉AD giebt wiederum für AD einen doppelten Werth, wovon der größte verworfen werden muß, wenn dadurch die gesuchte Seite AB > 180^{g} oder negativ werden sollte.

§. 46.

Aufgabe.

Aus zwey gegebnen Winkeln und der Zwischenseite, eine von den übrigen Seiten finden.



Auflösung. Bezeichne mit B den Gegenwinkel der gesuchten Seite AC, mit C den anderen gegebenen Winkel, und mit A den dritten Winkel. Ziehe den senkrechten Bogen CD. Sage erstlich (§. 30)

$$R, \mathfrak{S}'BC :: \mathfrak{T}B, \mathfrak{T}'BCD$$

Ferner $\angle ACD = \angle BCA - \angle BCD$

Endlich (§. 34) $\mathfrak{S}'BCD, \mathfrak{S}'ACD :: \mathfrak{T}'BC, \mathfrak{T}'AC$

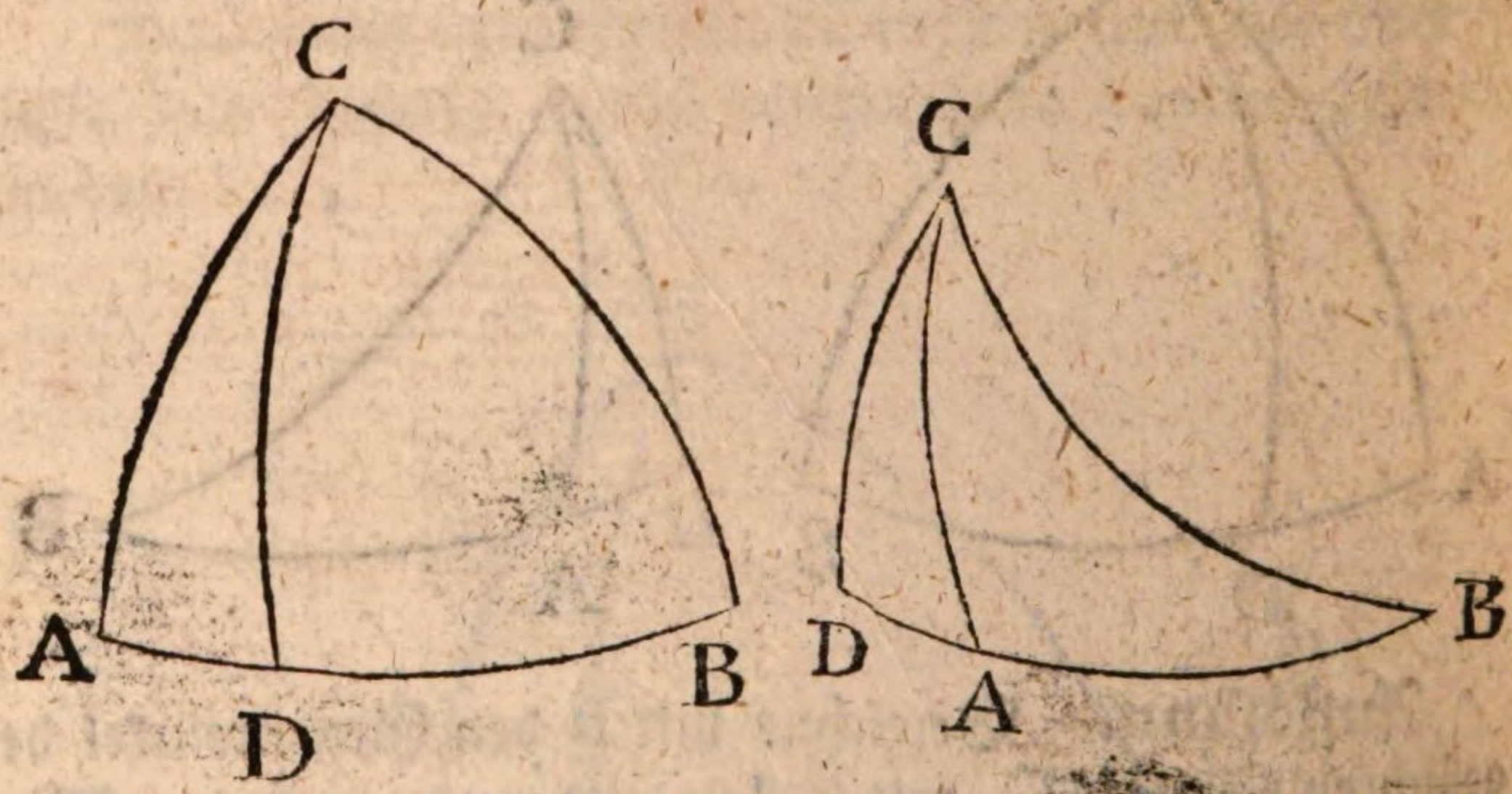
Anmerkung. Es mag der Perpendikel CD innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks fallen, so ist der Winkel ACD

ACD allemal die Differenz, und nie die Summe der Winkel BCD und BCE. Es ist also ein Versehen, wenn *de la Caille* in der sphärischen Trigonometrie, die in seinen Leçons élementaires d'Astronomie stehet, die Summe oder die Differenz vorschreibet. Dieses hat auch schon *Cagnoli* in seinem Traité de Trigonométrie angemerket, und es muß deswegeu berühret werden, weil ein Anfänger sich leicht könnte in einen Irrthum verleiten lassen.

§. 47.

Aufgabe.

Aus zwey gegebnen Winkeln und der Zwischenseite den dritten Winkel finden.



Auflösung. Bezeichne die gegebenen Winkel mit B und C, den gesuchten mit A, fälle CD senkrecht auf AB. Sage

erstlich (§. 30) R, S'BC :: TB, T'BCD

zweitens $\angle ACD = \angle BCA - \angle BCD$

oder $= \angle BCD - \angle BCA$

drittens (§. 34) SBCD, SACD :: S'B, S'A

Anmer-

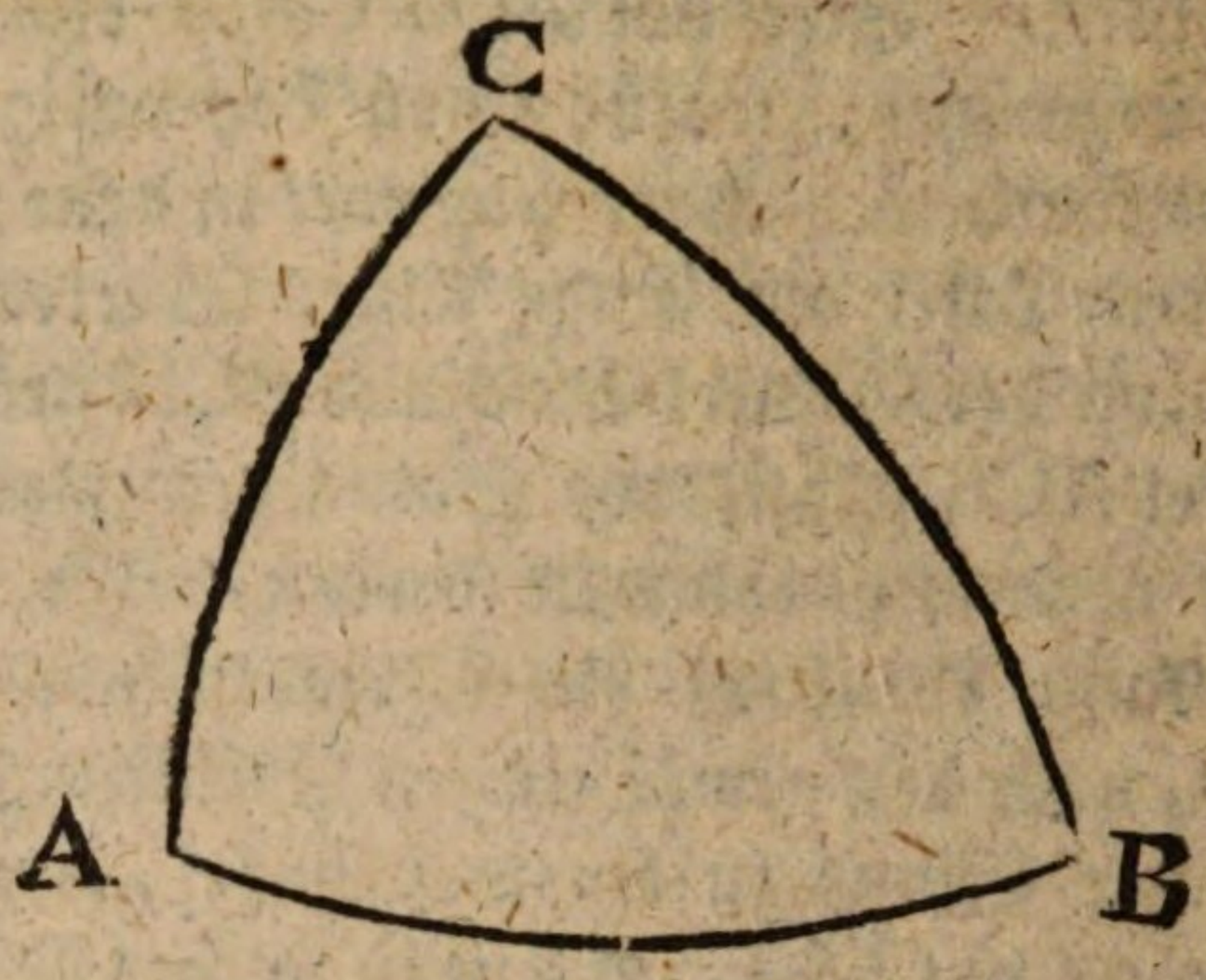
Anmerkung. Hier hat *de la Caille* das nemliche Versehen begangen, wofür schon bey voriger Aufgabe gewarnet worden. Herr *Cagnoli* in dem zweyten Theile der 8ten Tafel am Ende seines Werkes schreibet vor, daß wenn der Winkel-Abschnitt BCD größer ist, als der Winkel ACB selbst, der Sinus des zweyten Abschnitts ACD negativ genommen werden müsse. Diese Regel aber kann ebenfalls ein Mißverständniß verursachen. Denn, nach den gewöhnlichen Erklärungen, gehöret ein negativer Sinus zu einem Winkel, der zwischen 180 und 360^{g} ist (XI. §. 31.). Ein solcher Winkel aber kann in einem sphärischen Dreyecke unmöglich Statt finden. Das beste ist also, daß man sich an den gewöhnlichen Regeln der Zeichen halte. Man erkennet auch sogleich aus dem gefundenen Werthe des ∠BCD, ob er größer oder kleiner ist als ∠BCA. Ist er größer, so fällt der Perpendikel ausser dem Dreyecke, und der gesuchte Winkel A ist von anderer Beschaffenheit als ∠B. Ist er kleiner, so fällt der Perpendikel ins Dreyeck, und es ist ∠A von gleicher Natur mit ∠B.

§. 48.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Seiten und einem Gegenwinkel, den Gegenwinkel der anderen Seite finden.

Siehe die folgende Figur.



Auflösung. Es sey B der Winkel zwischen beyden bekannten Seiten BC und BA, A der andere bekannte Winkel, C der dritte Winkel. Sage nun (§. 35.)

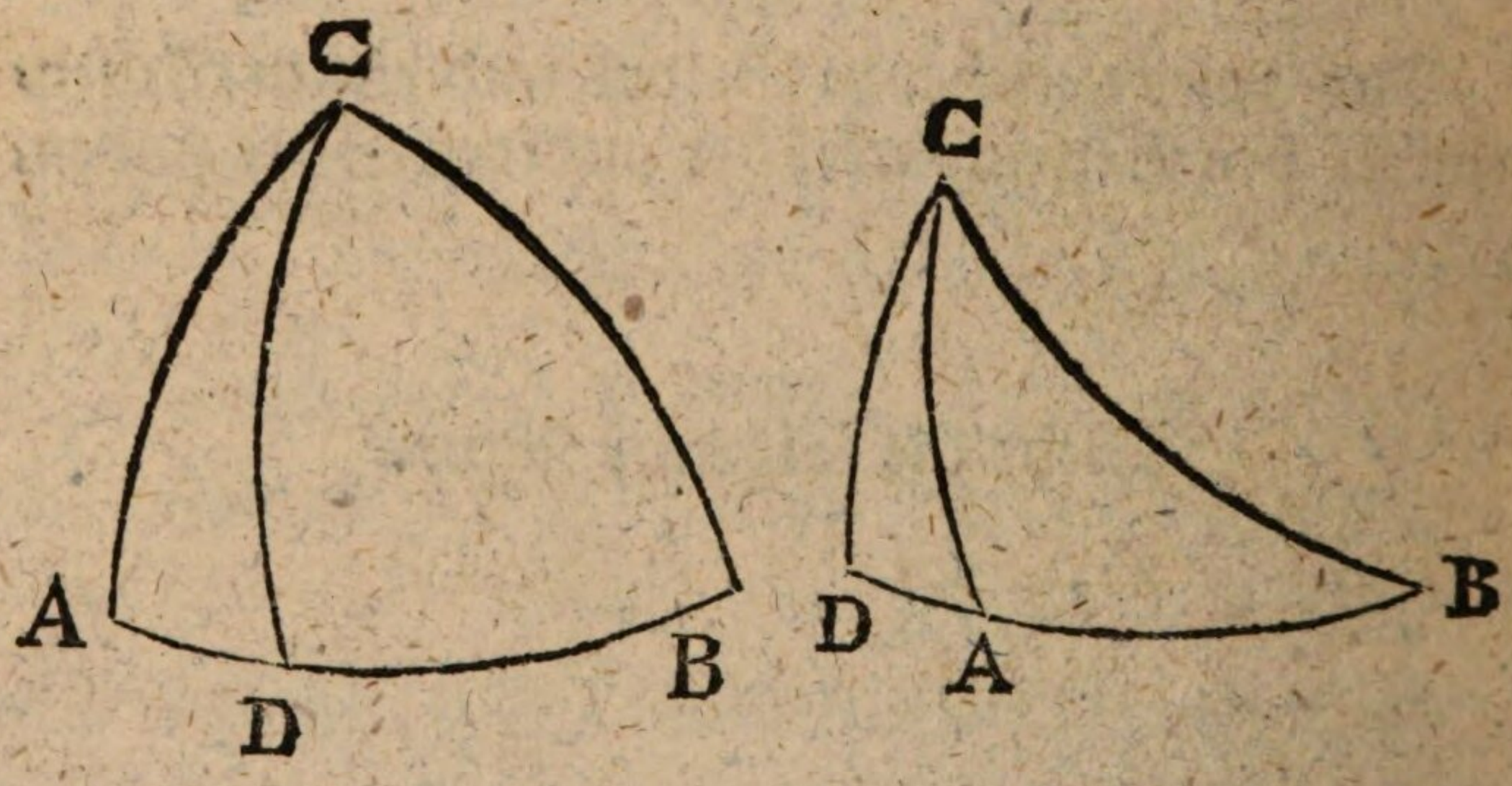
$$\text{S}BC, \text{S}AB :: \text{S}A, \text{S}C$$

Die Beschaffenheit des Winkels C, kann nicht anders als aus den Umständen der Aufgabe erkannt werden.

§. 49.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Seiten, und dem Gegenwinkel der einen, die dritte Seite finden.



Auflö-

Auflösung. Es seyen BC und AC die gegebene Seiten, B der gegebene Winkel. Ziehe CD senkrecht auf AB. Sage erstlich (§. 29.)

R, ℸBC :: S'B, ℸBD

ferner (§. 35.) S'BC, S'AC :: S'BD, S'AD

Endlich ist $AB = BD \pm AD$.

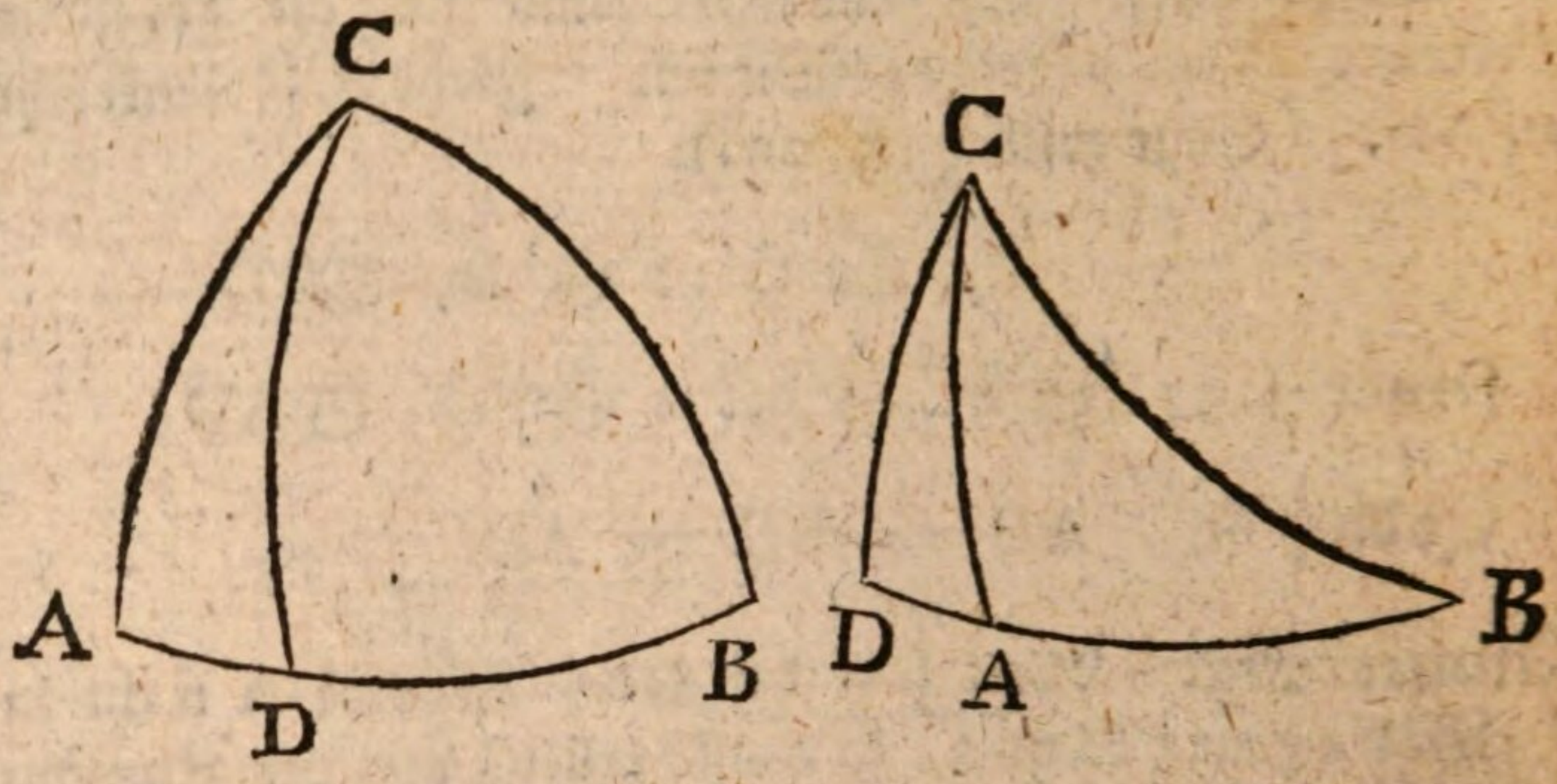
Anmerkung. Weil hier der dritte Winkel A nicht in Betrachtung kömmt, so müste erstlich aus den Umständen bestimmet werden, ob er mit B von einerley Art oder von verschiedener Art ist. Im ersten Falle fällt der Perpendikel CD innerhalb des Dreyecks, und es muß alsdann die Summe der Abschnitte AD und BD genommen werden. Im zweyten Falle liegt der Perpendikel CD ausser dem Dreyecke, und es muß die Differenz der Abschnitte BD und BA genommen werden. Noch kann man folgende Regel beobachten. Wenn die Summe beyder Abschnitte $> 180^g$ werden sollte, so muß die Differenz genommen werden, und wenn der zweyte Abschnitt größer wird als der erste, so muß die Summe genommen werden.

§. 50.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Seiten und dem Gegenwinkel der einen, soll der Zwischenwinkel gefunden werden.

Siehe die folgende Figur.



Auflösung. Es seyen gegeben die Seiten BC, AC, und der Winkel B, und gesuchet der Winkel ACB. Sage erstlich (§. 30.)

$$R, \mathfrak{S}'BC :: \mathfrak{T}B, \mathfrak{T}'BCD$$

ferner $\mathfrak{T}AC, \mathfrak{T}BC :: \mathfrak{S}'BCD, \mathfrak{S}'ACD$ (§. 36.)

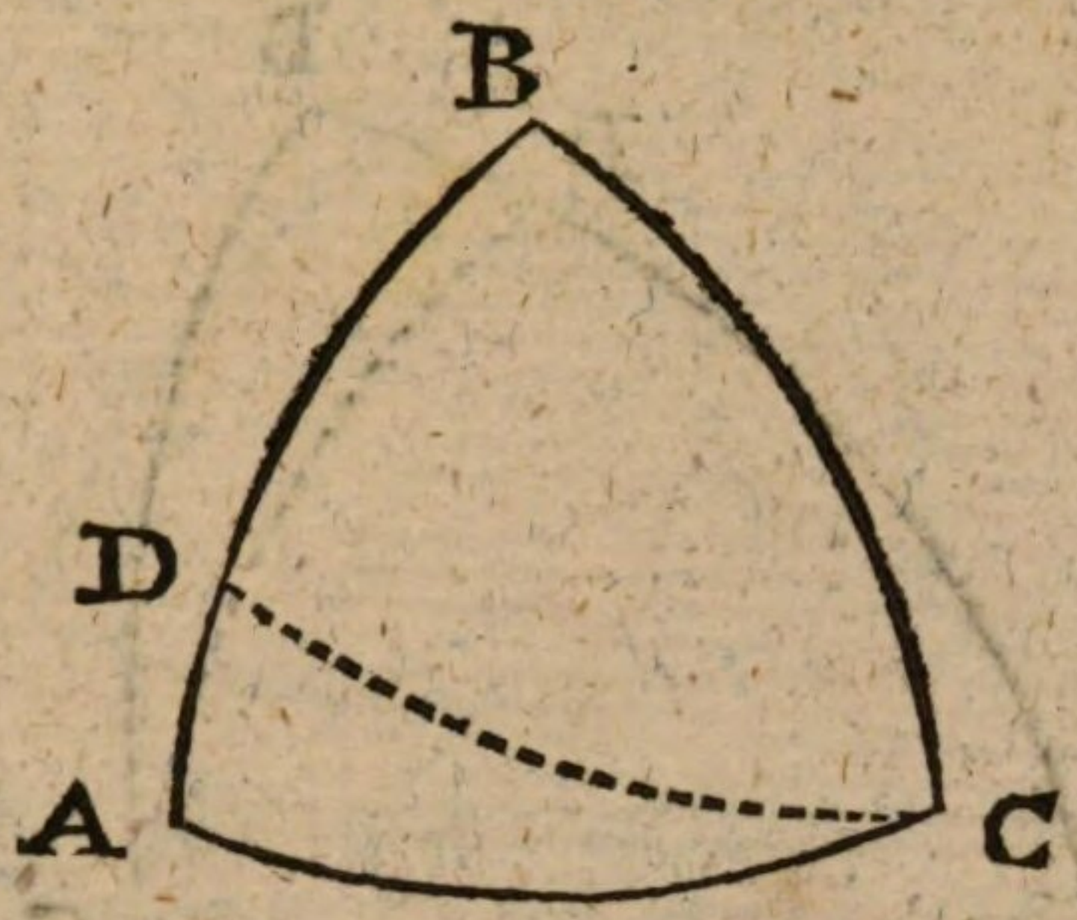
endlich $\angle ACB = \angle BCD \pm \angle ACD$

Anmerkung. Da hier wiederum der Winkel A unbestimmt ist, so muß aus anderen Umständen bekannt seyn, ob $\angle A$ mit $\angle B$ von einerley oder verschiedener Beschaffenheit ist, und folglich, ob CD innerhalb oder außerhalb des Dreyecks lieget. Im ersten Falle nimmt man die Summe, im anderen die Differenz der Winkel BCD und ACD.

§. 51.

Aufgabe.

Aus zwey gegebnen Seiten und dem Zwischenwinkel, einen der übrigen Winkel finden.



Auflösung. Es seyen gegeben die Seiten AB und BC nebst dem Winkel B. Fälle CD senkrecht auf AB, und sage (§. 29.)

R, ℸBC :: S′B, ℸBD

Nun nehme man die Differenz oder die Summe von AB und BD, nachdem der Perpendikel CD innerhalb oder ausserhalb des Dreyeckes fällt, und sage ferner (§. 34.)

SAD, SBD :: ℸB, ℸA

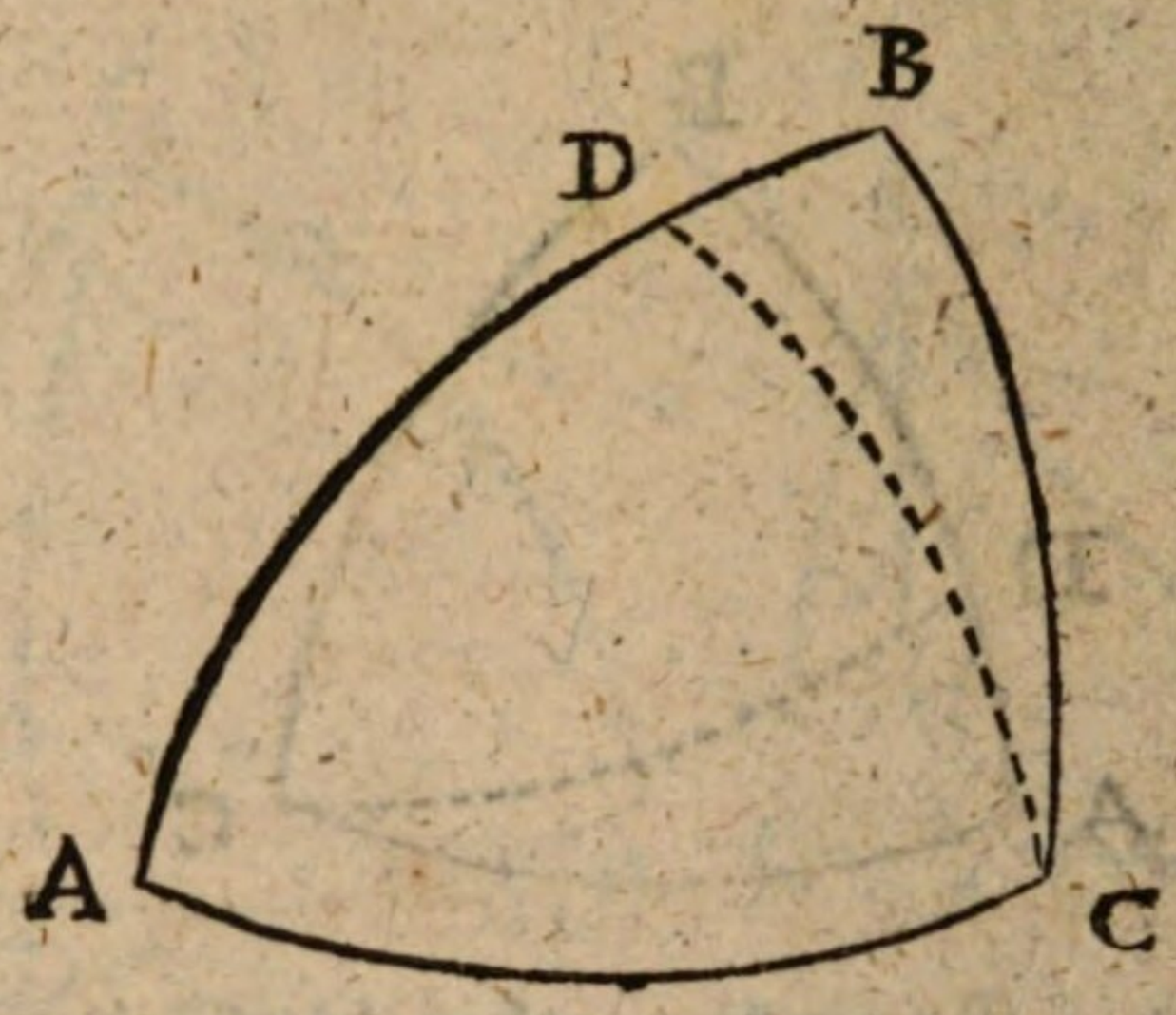
Anmerkung. Was die Beschaffenheit des ∠A betrift, ob er nemlich unter oder über 90 Grade ist, so wird man dieses am besten erfahren, wenn man bey den Proporzionen, die gehörigen Zeichen + und — gebrauchet. Diese Anmerkung ist allgemein, und gilt bey allen Auflösungen der sphärischen Trigonometrie.

§. 52.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen Seiten, und dem Zwischenwinkel, die dritte Seite finden.

(Siehe die folgende Figur.)



Auflösung. Es sey B der gegebene Winkel, BC die kleinste der gegebenen Seiten, BA die größere. Fälle CD senkrecht auf AB, so wird dieser Perpendikel meistentheils innerhalb des Dreyecks fallen, hauptsächlich, wenn der Winkel B spitzig ist. Nun sage (§. 29.)

R, ℸBC :: S'B, ℸBD

Von BA nimm BD ab, so bleibet AD. Fiele aber der Perpendikel ausserhalb des Dreyecks, auf der Seite, wo B lieget, so müste man nehmen AB + BD. Fiele der Perpendikel ausserhalb des Dreyecks auf der Seite, wo A lieget, so müste BA von BD abgenommen werden. In allen Fällen bekömmt man AD. Sage ferner (§. 35.)

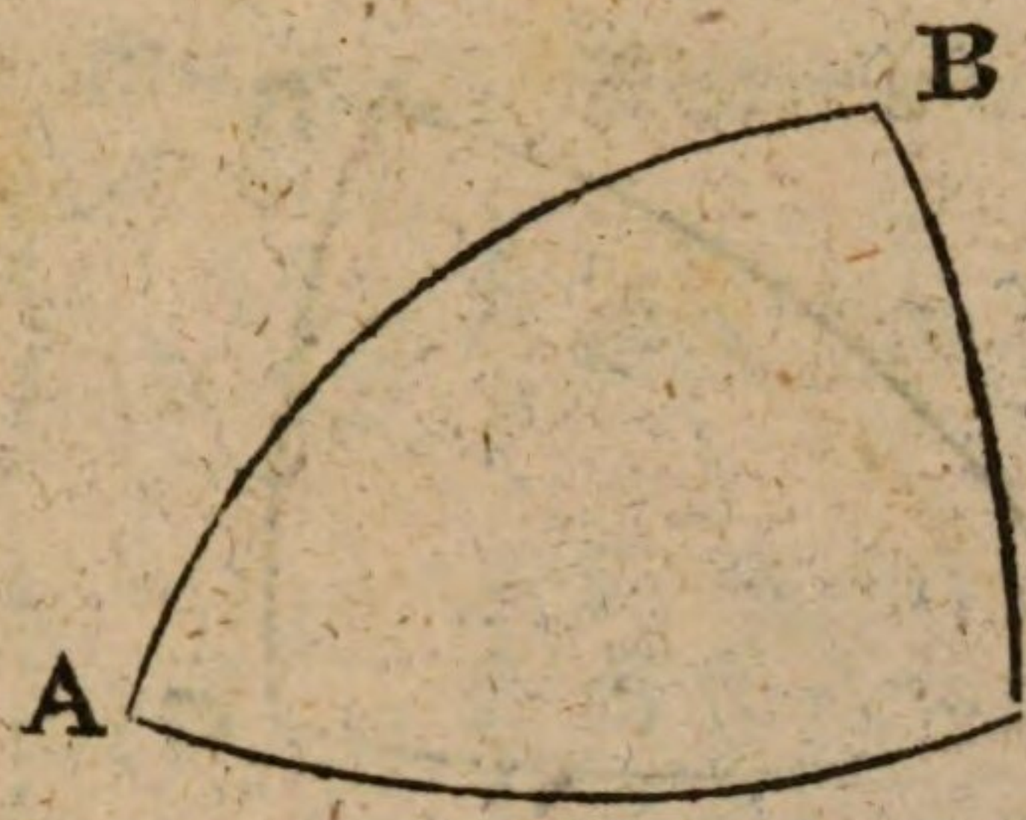
S'BD, S'AD :: S'BC, S'AC

Die Zeichen müssen die Beschaffenheit der Seite AC bestimmen.

§. 53.

Aufgabe.

Aus den drey gegebenen Seiten eines sphärischen Dreyecks, einen seiner Winkel bestimmen.



Auflösung. Es werde der Winkel A gesucht.

I) Multiplizire den Sinus von AB mit dem Sinus von AC.

II) Nimm die Hälfte der Seiten AB, BC, AC. Suche den Sinus von $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$AB — $\frac{1}{2}$AC, desgleichen den Sinus von $\frac{1}{2}$BC + $\frac{1}{2}$AC — $\frac{1}{2}$AB. Multiplizire beyde Sinusse in einander.

Nun sage §. 39. : wie das erste Produkt sich zum zweyten verhält, so verhält sich das Quadrat des Halbmessers, zum Quadrat des Sinus vom halben Winkel A.

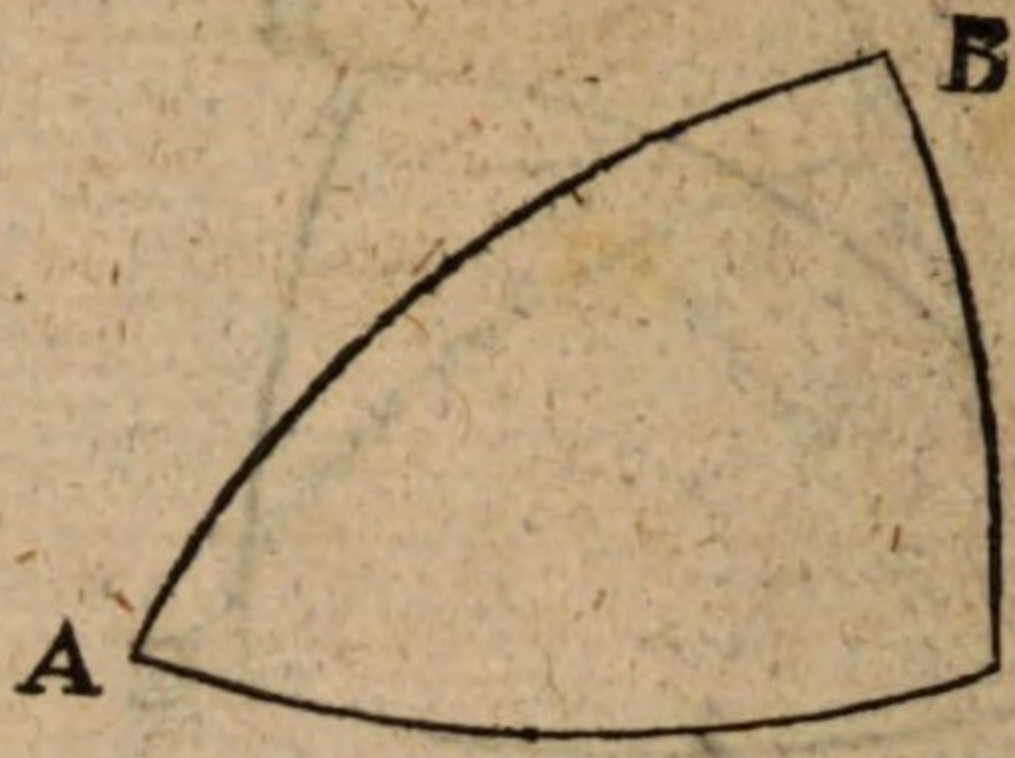
Aus dem gefundenen Quadrate ziehe demnach die Wurzel, so kömmt ein Sinus, dessen Winkel die Hälfte des Winkels A ist.

§. 54.

Aufgabe.

Aus den drey Winkeln eine Seite bestimmen.

(Siehe folgende Figur.)



Auflösung. Es werde gesuchet die Seite AB.

I) Multiplizire die Sinusse der Winkel A und B.

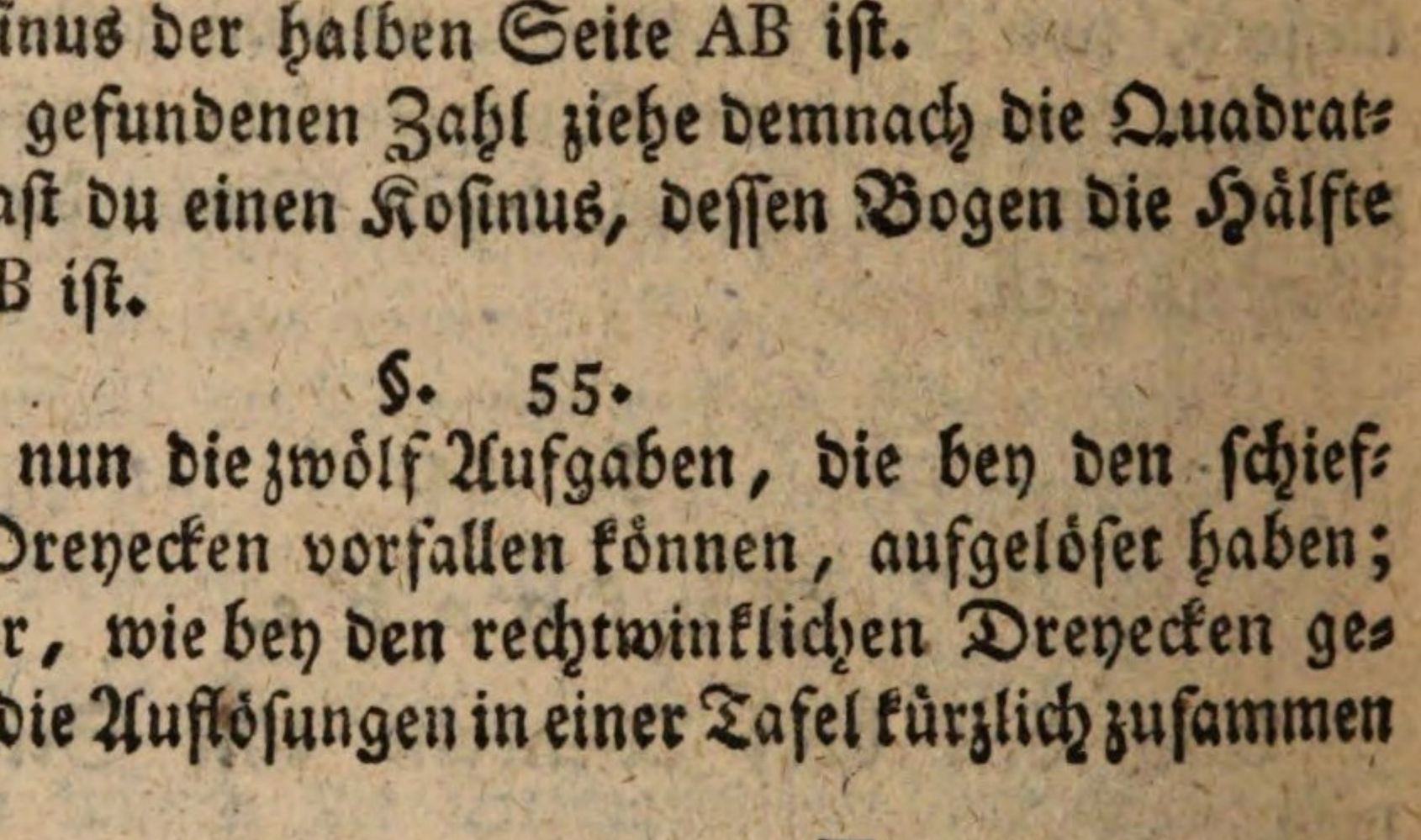
II) Nimm die Hälften der Winkel A, B, C. Suche den Kosinus zu $\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$, desgleichen den Kosinus zu $\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$. Multiplizire beyde Kosinusse in einander.

Nun sage (§. 40): Wie sich das erste Produkt (No. I) zum zweyten (No, II) verhält, so verhält sich das Quadrat des Halbmessers, zu einer vierten Zahl, welche das Quadrat des Kosinus der halben Seite AB ist.

Aus der gefundenen Zahl ziehe demnach die Quadratwurzel, so hast du einen Kosinus, dessen Bogen die Hälfte der Seite AB ist.

§. 55.

Da wir nun die zwölf Aufgaben, die bey den schiefwinklichen Dreyecken vorfallen können, aufgelöset haben; so wollen wir, wie bey den rechtwinklichen Dreyecken geschehen ist, die Auflösungen in einer Tafel kürzlich zusammen fassen.



Ge

Gegeben	Gesuchet.	Proporzion.
∠A, ∠B, BC	AC (§. 43)	SA, SB :: SBC, SAC
∠A, ∠B, BC	∠C (§. 44)	R, S′BC :: TB, T′BCD S′B, S′A :: SBCD, SACD ∠BCD = ∠ACD ± ∠BCD
∠A, ∠B, BC	AB (§. 45)	R, S′B :: TBC, TBD TA, TB :: SBD, SAD AB = BD ± AD
∠B, ∠C, BC	AC (§. 46)	R, S′BC :: TB, T′BCD ∠ACB ∓ ∠BCD = ∠ACD S′BCD, S′ACD :: T′BC, T′AC
∠B, ∠C, BC	∠A (§. 47.)	R, S′BC :: TB, T′BCD ∠BCA ∓ ∠BCD = ∠ACD SBCD, SACD :: S′B, S′A
∠A, AB, BC	∠C (§. 48.)	SBC, SAB :: SA, SC
∠B, AC, BC	AB (§. 49)	R, TBC :: S′B, TBD S′BC, S′AC :: S′BD, S′AD AD ± BD = AB
∠B, AC, BC	∠C (§. 50.)	R, S′BC :: TB, T′BCD TAC, TBC :: S′BCD, S′ACD ∠ACD ± ∠BCD = ∠C
∠B, AB, BC	∠A (§. 51)	R, TBC :: S′B, T′BD AB ∓ BD = AD SAD, SBD :: TB, TA

Gegeb. Gesucht. Proporzion.

$$\left.\begin{matrix}\angle B\\ AB\\ BC\end{matrix}\right\} AC \left\{\begin{matrix}R, \mathfrak{T}BC :: \mathfrak{S}'B, \mathfrak{T}BD\\ AB + BD = AD\\ \mathfrak{S}'BD, \mathfrak{S}'AD :: \mathfrak{S}'BC, \mathfrak{S}'AC\end{matrix}\right. (\S.52)$$

$$\left.\begin{matrix}AB\\ BC\\ AC\end{matrix}\right\} \angle A \left\{\begin{matrix}\mathfrak{S}AB \times \mathfrak{S}AC,\\ \mathfrak{S}(\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}AB) \times \mathfrak{S}(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AC)\\ :: R^2, (\mathfrak{S}\frac{1}{2}A)^2\end{matrix}\right. (\S.54)$$

$$\left.\begin{matrix}\angle A\\ \angle B\\ \angle C\end{matrix}\right\} BC \left\{\begin{matrix}\mathfrak{S}B \times \mathfrak{S}C,\\ \mathfrak{S}'(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B) \times \mathfrak{S}'(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C)\\ :: R^2, (\mathfrak{S}'\frac{1}{2}BC)^2.\end{matrix}\right. (\S.54)$$

Was bey diesen Formeln noch sonst zu merken ist, kann man bey den vollständigeren Auflösungen sehen, woher sie genommen sind.

§. 56.

Der Gebrauch der angeführten Regeln und Formeln wird weit bequemer, wenn man mit Logarithmen rechnet; und da überhaupt in der sphärischen Trigonometrie die Logarithmen fast noch unentbehrlicher sind als in der geradlinichten, so wollen wir hier einige Vortheile lehren, wodurch die Rechnungen mit Logarithmen oft merklich verkürzet werden können.

§. 57.

Die Logarithmen der Dezimal-Brüche verursachen manche Schwierigkeit, wenn man nicht gewöhnt ist damit umzugehen. Sie können auf dreyerley Art ausgedrükt werden. Der erste und einfacheste Weg bestehet darin, daß man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners abziehe, da dann ein negativer Logarithmus übrig bleibet.

Z. E. es werde verlanget der Logarithmus von 0;073, oder von $\frac{73}{1000}$, so ist dieser, nach den gewöhnlichen Regeln

L 73 — L 1000

oder L 73 — 3

oder 1;8633229 — 3;0000000

oder - 1;1366771

also ist L 0;073 = — 1;1366771

Soll nun zu einem solchen negativen Logarithmus die gehörige Zahl gefunden werden, so bestehet dieselbe in einem Bruche welcher die Einheit zum Zähler, und die Zahl des gegebenen Logarithmus zum Renner hat. Wenn also der Logarithmus — 1;1366771 gegeben ist, so findet man 1;1366771 = L 13;70. Folglich ist

$$— 1;1366771 = L \frac{1}{13;70}$$

$$= L \frac{10}{137}$$

und wen man den gefundenen Bruch in Dezimal-Theilen ausdrücket, so ist

— 1;1366771 = L 0;073

Die negativen Logarithmen haben also die Unbequemlichkeit, daß ste nicht geradesweges den Dezimal-Bruch geben wozu sie gehören, sondern einen gemeinen Bruch, der erst in einem Dezimal-Bruch verwandelt werden muß.

§. 58.

Der zweyte Weg, um den Logarithmus eines Dezimal-Bruches auszudrücken, bestehet darin, daß man die Subtrakzion an der Charakteristik allein verrichte, da dann der übrige Theil des Logarithmus positiv bleibet.

Z. E. es soll zu 0;73 der Logarithmus gefunden werden, so ist

L 0;73

$$L\,0;73 = L\,\tfrac{73}{100} = 1;8633229 - 2$$
$$= +1 + 0;8633229 - 2$$
$$= -1 + 0;8633229$$

Um nun diesen halbpositiven Logarithmus $-1+0;8633229$ auf eine bequemere Art zu schreiben, so pflegen diejenigen, die sich dieser Methode bedienen, das negative Zeichen (—) über der Charakteristik zu setzen. Dieser Schreibeart zufolge ist demnach

$$L\,0;73 = \bar{1};8633229$$

Durch den nemlichen Weg findet man

$$L\ \ 0;073 = \bar{2};8633229$$
$$L\ \ 0;0073 = \bar{3};8633229$$
$$L\ \ 0;00073 = \bar{4};8633229$$
$$L\ 0;000073 = \bar{5};8633229$$

Ueberhaupt hat die negative Charakteristik eine Einheit mehr als Nullen nach dem Dezimalzeichen auf einander folgen.

Hieraus kann zugleich die Regel gefolgert werden, wornach die Zahl eines solchen halbpositiven Logarithmus gefunden wird. Es wird nemlich die Charakteristik aus der Acht gelassen, und der Logarithmus, unter welcher Charakteristik man will, in den Tafeln gesuchet. Vor der gefundenen Zahl werden eine Null, das Dezimalzeichen, und so viel Nullen weniger 1 geschrieben, als die gegebene Charakteristik Einheiten hat.

Es sey gegeben $\bar{5};8633229$

so findet man unter der Charakteristik 3

$$8633229 = L\,7300$$

Weil nun die gegebene Charakteristik -5 ist, so werden nach dem Dezimalzeichen $5 - 1 = 4$ Nullen geschrieben. Also ist

$\bar{5};$

$\overline{5};8633229 = \mathfrak{L}\, 0;00007300$

$= \mathfrak{L}\, 0;000073.$

Gegen diese zweyte Methode ist sonst nichts einzuwenden, als daß sie, wegen der halbpositiven und halbnegativen Logarithmen, in weitläftigen Rechnungen, leicht eine Verwirrung verursachen kann.

§. 59.

Der dritte und gebräuchlichste Weg bestehet darin, daß man annehme der Logarithmus des Bruches sey um 10 Einheiten in der Charakteristik vergrößert, da er dann allemal positiv wird. Erinnert man sich nun bey jeder Gelegenheit, daß solcher Logarithmus 10 Einheiten zu viel hat, so kann aus dieser Voraussetzung kein Irrthum entstehen. Einen solchen Logarithmus, der 10 Einheiten zu viel hat, wollen wir der Kürze halben einen übermäßigen Logarithmus nennen, und um einen Anfänger gegen allen Irrthum zu versichern, wollen wir dieses Zeichen (!) dabey setzen.

Es werde der übermäßige Logarithmus von 0;000073 verlanget, so ist derselbe

$$10 + \mathfrak{L}\, 0;000073$$

$$\text{oder } 10 + \mathfrak{L}\frac{73}{1000000}$$

$$\text{oder } 10 + \mathfrak{L}\, 73 - \mathfrak{L}\, 1000000$$

$$\text{oder } 10 + 1;8633229 - 6$$

$$\text{oder } 10 + 1 + 0;8633229 - 6$$

$$\text{oder } 5 + 0;8633229$$

$$\text{oder } 5;8633229$$

Also ist

$$\mathfrak{L}\, 0;000073 = 5;8633229\,!$$

Gesetzt im gegebenen Bruche folgen nach dem Dezimalzeichen m Nullen, und darauf n geltende Ziffern, so sind überhaupt im Bruche $m + n$ Dezimalziffern. Die Charakteristik des Zählers ist demnach $n - 1$, weil sie überhaupt eine Einheit weniger haben muß als Ziffern vorhanden sind. Die Charakteristik des Nenners ist $m + n$, weil sie so viel Einheiten hat als Dezimalziffern vorhanden sind. Die Charakteristik des übermäßigen Logarithmus wird demnach

$$\begin{aligned} & 10 + (n - 1) - (m + n) \\ = \; & 10 + n - 1 - m - n \\ = \; & 10 - 1 - m \\ = \; & 9 - m \end{aligned}$$

woraus man siehet, daß man die Charakteristik eines übermäßigen Logarithmus erhält, wenn man von 9 die Anzahl der Nullen abziehet, die nach dem Dezimalzeichen des gegebenen Bruches auf einander folgen. Der Renner wird, ohne auf die Charakteristik zu achten, in den Tafeln gesucht. Hier sind einige Exempel

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\, 6;005467 &= 7;7377491! \\ \mathfrak{L}\, 0;000004 &= 4;6020600! \\ \mathfrak{L}\, 0;023 &= 8;3617278! \\ \mathfrak{L}\, 0;1297 &= 9;1129400! \end{aligned}$$

Ist der Fall umgekehrt, und es wird die zu einem übermäßigen Logarithmus gehörige Zahl gesucht, so muß man den gegebenen Logarithmus, ohne Rüksicht auf die Charakteristik in den Tafeln suchen, und die dazu gehörige Zahl aufschreiben; vor derselben setzet man eine Null, das Dezimalzeichen, und so viel Nullen als Einheiten übrig bleiben, wenn man von 9 die gegebene Charakteristik abziehet. Uebrigens wird der gegebene Logarithmus am besten unter der Charakteristik 3, oder der höchsten die in den Tafeln anzutreffen ist, gesucht.

Es sey gegeben der übermäßige Logarithmus 4;6020600! So findet man in den Tafeln unter der Charakteristik 3, daß zu 6020600 die Zahl 4000 gehöret. Man setze 9 — 4 = 5 Nullen voran, so ist

4;6020600! = L 0;000004000

= L 0;000004

Diese Methode würde unzulänglich seyn, wenn im gegebenen Bruche nach dem Dezimalzeichen mehr als 9 Nullen auf einander folgeten. Denn in diesem Falle würde der übermäßige Logarithmus negativ, welches eben vermieden werden soll. Alsdann müßte man annehmen der Logarithmus sey nicht um 10, sondern um 20 vergrößert, und, wo in vorigen Regeln die Zahl 9 angegeben worden, da käme 19 an deren Stelle. Da aber solche kleine Brüche, die weniger als ein Zehntausendmillionentheil betragen, in Rechnungen nicht vorzufallen pflegen, so ist es kaum nöthig, daß man sich auf diesen Fall gefaßt mache.

Zusatz. Wenn ein negativer Logarithmus gegeben ist, so kann er leicht in einen übermäßigen verwandelt werden, und umgekehrt, man kann, wenn es verlanget wird, einen übermäßigen Logarithmus in einen negativen verwandeln. Denn wenn der eine von 10 subtrahiret wird, so bleibet der andere.

Es sey gegeben der negative Logarithmus — 1;1366771. Weil der übermäßige 10 Einheiten zu viel haben soll, so wird er

10;0000000
— 1;1366771
8;8633229!

Es sey hingegen gegeben der übermäßige Logarithmus 8;8633229!, so gilt er, weil er zehn Einheiten zu viel hat 8;8633229 — 10, oder

$$\begin{array}{r} -\ 10;0000000 \\ +\ 8;8633229! \\ \hline -\ 1;1366771 \end{array}$$

Werden demnach beyde Logarithmen, der wahre und der übermäßige ohne Achtung der Zeichen addiret, so machen sie allemal zusammen 10 ganze Einheiten aus.

$$\begin{array}{r} 1;1366771 \\ 8;8633229! \\ \hline 10;0000000. \end{array}$$

Anmerkung. Ich habe mich beflissen diese Lehre von den Logarithmen der Dezimalbrüche, welche ich übermäßige Logarithmen nenne, deutlicher zu entwickeln als man sie bey anderen Schriftstellern antrifft. *De la Caille*, in seinem Traité prélimaire de la Trigonométrie sphérique erkläret den überflüßigen Zehner in der Charakteristik also: Bey dem Gebrauche der Logarithmen, saget er, vergrößert oder verkleinert man den Logarithmus der Charakteristik, um so viel Zehner als man will, aus dem nemlichen Grunde, nach welchem man in algebraischen Formeln die Einheit und ihre Potenzen zum Koeffizienten oder zum Nenner annimmt. Wenn man, zum Beyspiele, einen größeren Logarithmus von einem kleineren abziehen soll, so giebt man dem kleineren einen Zehner in der Charakteristik zu; welches eben so viel ist, als wenn man ihn mit 1 multiplizirte. Hier siehet man, wie leicht auch die größten Männer ein Versehen begehen können. Denn es ist offenbar, daß, wenn man der Charakteristik eines Logarithmus einen Zehner zugiebt, dieser Logarithmus nicht mit 1 multiplizirt, sondern in der That um 10 vergrößert ist, und daß dessen Zahl mit 10000000000 multiplizirt ist.

Herr

Herr *Cagnoli*, in seinem Traité de Trigonométrie rectiligne & sphérique, nach Herrn *Chompré* Uebersetzung, drücket sich folgendermaßen aus: Da es in keiner Rechnung geschehen kann, daß man in einen Irrthum von zehntausend Millionen verfalle, so kann man ohne Gefahr die Charakteristik um 10 Einheiten vermehren, wenn dieses nöthig ist, um dieselbe positiv zu erhalten. Dieser Aufschluß ist nicht befriedigend. Mathematische Regeln müssen eine strenge Richtigkeit haben, und nicht auf der Voraussetzung beruhen, daß man behutsam genug seyn wird, die Fehler zu bemerken, wenn sie zu groß werden.

Ich bitte den Leser, diese Anmerkungen nicht der Tadelsucht zuzuschreiben. Ich habe selbst in diesem und beyden vorhergehenden Hauptstücken manches von beyden angeführten Schriftstellern entlehnet. Meine Absicht ist nur, den Anfängern zu warnen, daß er auch die besten Bücher mit Behutsamkeit und Prüfung lese, und daß er sich nicht allemal selbst die Schuld gebe, wenn ihm etwas ungewiß oder unrichtig zu seyn scheinet.

§. 60.

Wenn Logarithmen addiret werden sollen, worunter sich einige übermäßige befinden, so müssen von der Charakteristik der Summe so viel Zehner abgenommen werden, als übermäßige Logarithmen vorhanden sind, weil in jedem übermäßigen Logarithmus 1 Zehner zu viel ist.

Gesetzt, es soll durch Logarithmen das Produkt dieser 4 Zahlen gefunden werden.

$$333 \times 0;057 \times 0;0008364 \times 2435$$

$$\begin{aligned} 2;5224442 &= \mathfrak{L}\,333 \\ 8;7558748! &= \mathfrak{L}\,0;057 \\ 6;9224140! &= \mathfrak{L}\,0;0008364 \\ 3;3864990 &= \mathfrak{L}\,2435 \end{aligned}$$

$$\overline{\text{z}1;5872320}$$

Hier werden 2 Zehner, wegen der 2 übermäßigen Logarithmen, weggestrichen, und es bleibet der Logarithmus 1;5872320, welcher nächstens zur Zahl 38;66...., dem verlangten Produkte, gehöret.

Trift es sich aber, daß in der Summe ein Zehner weniger ist, als deren abgezogen werden sollen, oder daß kein Zehner in der Summe heraus kömmt, da doch einer subtrahiret werden soll; so ist die gefundene Summe nicht ein eigentlicher Logarithmus, sondern ein übermäßiger Logarithmus, wozu nach §. 59 die Zahl gefunden werden kann. Man soll z. E. multipliziren 13 mit 0;0000786

1;1139433 = L 13

5;8954225! = L 0;0000786

7;0093658! = L(13 × 0;0000786)

Hier sollen eigentlich 10 von der Summe abgenommen werden. Der verlangte Logarithmus ist demnach

7;0093658 — 10

= — (10 — 7;0093658) = — 2;9906342

Dieser Logarithmus machet aber 10 mit dem gefundenen, folglich ist der gefundene der übermäßige Logarithmus (§. 59. Zus.). Die Zahl, wovon 7;0093658 der übermäßige Logarithmus ist, wird nach §. 59 gefunden, und ist beynahe = 0;001022.

Es trift sich nicht in gewöhnlichen Rechnungen, daß in der Charakteristik der Summe mehr als ein Zehner fehlen sollte. Gesetzt, es fände sich am Ende der Rechnung 8;7600354 und es fehleten zwey Zehner, so würde der verlangte Logarithmus seyn

8;7600354 — 20

Suchet man 7600.... unter der Charakteristik 3, so wird die Zahl 5755 gefunden. Wegen der Charakteristik 8, kommen 19 — 8 = 11 Nullen voran (§. 59). Also ist

8;7600354! = L 0;00000000000005755.

§. 61.

Wenn ein Dezimalbruch zur *n*ten Potenz erhoben werden soll, so wird das Komplement des Logarithmus, wie gewöhnlich, mit *n* multipliziret. Vom Produkte aber müssen *n* Zehner abgenommen werden, um den Logarithmus der Potenz zu bekommen.

Es sey die vierte Potenz von 0;094 verlanget, so ist

$$8;9731274 =! L\,0;094$$
$$\times 4$$
$$35;8925096! = L\,0;00007808$$

Hier sollen vier Zehner von der Charakteristik abgenommen werden; da aber nur drey vorhanden sind, so ist 5;8925096 der übermäßige Logarithmus, und suchet man nach §. 59 die dazu gehörige Zahl, so findet man 0;00007808, als die vierte Potenz von 0;094.

Daß aber in diesem Falle vier Einheiten vom gefundenen Produkte abgenommen werden müssen, ist leicht einzusehen. Denn da der gegebene übermäßige Logarithmus mit 4 multiplizirt wird, so ist das Produkt die Summe von 4 übermäßigen Logarithmen, also sind darin vier überflüßige Zehner enthalten (§. 60). Der nemliche Schluß läßt sich auf jedes andere Multiplum anwenden.

Soll aus einem Dezimalbruche die *n*te Wurzel gezogen werden, so wird dessen übermäßiger Logarithmus gesuchet, es werden noch $n-1$ Zehner dazu gethan, es wird durch *n* dividiret, und was heraus kömmt, ist der übermäßige Logarithmus der verlangten Wurzel.

Gesetzt, man will die vierte Wurzel haben von 0;000497, so ist

$$6;6963564! = L\,0;000497$$

Weil die vierte Wurzel verlanget wird, so werden $4-1$ oder 3 Zehner hinzugethan, und dann wird durch 4 dividiret.

4) $\frac{36;6963564}{9;1740891! = L\,0;1493}$

Dieses kann am besten folgendermaßen erkläret werden. Der Logarithmus von 0;000497 ist 6;6963564 — 10, oder wenn man drey Zehner zum positiven und negativen Theile hinzuthut, so ist der Logarithmus

Div. 4) $\frac{36;6963564 - 40}{9;1740891 - 10}$

Wenn also ein übermäßiger Logarithmus um $n - 1$ Zehner vergrößert wird, so ist der $n$te Theil davon wiederum ein übermäßiger Logarithmus, weil ein Zehner davon abgezogen werden müste, um den wahren negativen Logarithmus zu bekommen.

Anmerkung. Herr *Cagnoli* im §. 167 seiner Trigonometrie scheinet überhaupt anzunehmen, daß in dem Logarithmus der $n$ten Potenz eines Dezimalbruches allemal $n - 1$ Zehner vorhanden sind, welches aber nicht allemal eintrift. Denn es werde verlangt die vierte Potenz von 0;001234, so ist

$$7;09131521 = L\,0;001234$$
$$\times\ 4$$
$$28;3652608$$

Hier hat der übermäßige Logarithmus der 4ten Potenz nur zwey Zehner. Wollte man also bloß, nach der Regel des Hrn. *Cagnoli*, die Zehner wegstreichen, so bekäme man

$$8;3652608! = L\,0;02319$$

welches unrichtig ist. Der wahre Logarithmus ist

$$28;3652608 - 40$$
oder $$8;3652608 - 20$$

Und folglich kommen in der Charakteristik 19 — 8 = 11 Nullen. Also ist

$$28;3652608!! = L\,0;00000000000023\,19$$

Viel

Vielleicht wird man sagen, man brauche diese Fälle gar nicht zu achten, weil das Resultat so klein wird, daß es füglich vernachläßiget werden kann. Aber, wenigstens muß man doch wissen, daß es in der That so klein wird: sonst könnte man, bey einiger Zerstreuung der Gedanken, leicht annehmen, die vierte Potenz von 0;001234 sey 0;02319.

§. 62.

Zu mehrerer Erleichterung der Rechnungen pfleget man noch anstatt der Logarithmen ihre arithmetischen Komplemente zu gebrauchen. Das arithmetische Komplement eines Logarithmus ist nichts anders als der Rest, welcher übrig bleibet, wenn man den gegebenen Logarithmus von 10 abziehet.

Dieses Abziehen kann aber sehr leicht, ohne die förmliche Operazion der Subtrakzion, verrichtet werden.

Von 10;0000000
ziehe ab 2;0430976

7;9569024, Kompl. von 2;0430976

Hier siehet man, daß man das Komplement erhält, wenn man die lezte Ziffer zur Rechten von 10 und alle übrigen von 9 abziehet. Wenn aber die gegebene Zahl rechter Hand Nullen hat, so hat auch das Komplement die nemlichen Nullen; die erste geltende Ziffer, von der rechten zur linken Hand, wird alsdann von 10, und die übrigen von 9 abgezogen. Die Nullen, die nicht rechter Hand zusammen, sondern linker Hand, oder zwischen den geltenden Ziffern stehen, sind nicht unter dieser Ausnahme begriffen, sondern sie folgen der allgemeinen Regel und werden von 9 abgezogen, da dann allemal 9 übrig bleibet. Dieses kann man an folgendem Exempel bemerken.

Von 10;0000000
subtr. 2;4003900

bleibet 7;5996100, Kompl. von 2;4003900

Hier folgen einige Exempel, wodurch man sich üben kann, das Komplement eines Logarithmus sogleich, ohne förmliche Subtrakzion zu schreiben.

Logarithmus		Komplement
3;7869483	: : :	6;2130517
2;0070080	: : :	7;9929920
1;4530610	: : :	8;5469390
0;2367544	: : :	9;7632456
0;0420000	: : :	9;9580000
0;0012347	: : :	9;9987653
0;0000920	: : :	9;9999080

Durch eine kurze Uebung kömmt man bald so weit, daß man die Komplemente der Logarithmen fast so leicht, als die Logarithmen selbst aus den Tafeln abschreibet.

Zusatz. Das Komplement eines Logarithmus, nebst dem Logarithmus selbst, macht allemal 10 Einheiten, und aus dem Komplemente kann der Logarithmus wieder gefunden werden, wenn man das Komplement des Komplements nimmt, das ist, wenn man das Komplement von 10 abziehet.

Hieraus folget, daß der übermäßige Logarithmus eines Dezimalbruches nichts anders, als das Komplement des wahren negativen Logarithmus ist, und daß dieser das Komplement des übermäßigen ist.

§. 63.

Mit Hülfe der logarithmischen Komplemente kann die Subtrakzion der Logarithmen allemal in eine Addizion verwandelt werden. Anstatt einen Logarithmus zu subtrahiren, addiret man dessen Komplement, und von der Summe nimmt man einen Zehner ab.

Z. E. Es soll der Quozient von $\frac{3717}{594}$ durch Logarithmen gefunden werden, so müste man eigentlich also verfahren

Von

Von L 3717 = 3;5701926
subtrahire L 594 = 2;7.7.3.78.64

bleibt ..... 0;7964062 = L 6;258...

Man kann aber auch das nemliche Fazit durch die Addizion des logarithmischen Komplements des Nenners finden.

Zu L 3717 = 3;5701926
addire AL 594 = 7;2262136

10;7964062 = L 6;258...

Hier haben wir das Komplement des Logarithmus durch AL ausgedrücket, wie wir es noch mehrmalen der Kürze halben thun werden. In der Summe ist der Zehner ausgestrichen worden, weil er blos vom Komplemente herrühret. Das übrige ist der verlangte Logarithmus des Quozienten.

Daß übrigens dieses Verfahren allemal seine Richtigkeit hat, läßt sich leicht beweisen. Von einem Logarithmus a sey ein anderer b abzuziehen, so muß bleiben $a - b$. Gesetzt, anstatt b abzuziehen, addire ich dessen Komplement $10 - b$,

zu	a
addire ..	$10 - b$
kömmt	$10 + (a - b)$

Also kömmt die nemliche Differenz $a - b$, nur daß sie um 10 Einheiten vergrößert ist, die davon abgezogen werden müssen.

Wenn man mehrere Logarithmen zu addiren und zu subtrahiren hat, so kann man ebenfalls die Komplemente aller abzuziehenden Logarithmen addiren; nur daß von der Summe so viel Zehner abgenommen werden müssen, als Komplemente unter den Aggreganden sind. Gesetzt, es solle durch Logarithmen der Werth dieses Ausdruckes bestimmet werden.

$$\frac{917 \times 344 \times 55 \times 13}{243 \times 3214 \times 24}$$

L 917	=	2;9623693
L 344	=	2;5365584
L 55	=	1;7403627
L 13	=	1;1139433
KL 243	=	7;6143937
KL 3214	=	6;4928190
KL 24	=	8;6197888
		z1;0802352 = L12;03....

Hier sind in der Summe, wegen der 3 Komplemente, 3 Zehner weggestrichen worden, und dann gehöret der übrigbleibende Logarithmus nächstens zu 12;03, welches also der Werth des gegebenen Ausdruckes ist.

Wenn unter den gegebenen Faktoren Dezimalbrüche vorkommen, so sind ihre übermäßigen Logarithmen nichts anders als die Komplemente ihrer wahren Logarithmen, welche negativ seyn sollen. Es wird also auch für jeden solchen übermäßigen Logarithmus eine Einheit von der Summe abgenommen. Gesetzt es soll gefunden werden

$$\frac{72277 \times 0;0045}{3;147}$$

L 72277	=	3;8619524
L 0;0045	=	7;6532125!
KL 3;147	=	9;5027938
		z1;0179567 = L10;42.....

Käme ein übermäßiger Logarithmus im Nenner vor, so müßte sein Komplement genommen werden, welches dann der wahre Logarithmus des Bruches, aber mit dem positiven Zeichen wäre. Es sey gegeben

$$\frac{7 \times 0;0045}{0;000563}$$

so ist der Logarithmus dieses Ausdruckes

$$\mathfrak{L}\,7 + \mathfrak{L}\,0;0045 - \mathfrak{L}\,0;000563.$$

$\mathfrak{L}\,7$ wird wie gewöhnlich in den Tafeln gesuchet; anstatt $\mathfrak{L}\,0;0045$ wird der übermäßige Logarithmus gebraucht. Ferner ist $\mathfrak{L}\,0;000563 = \mathfrak{L}\,563 - \mathfrak{L}\,1000000 = 2;7505084 - 6 = -3;2494916$, welches der wahre negative Logarithmus von 0;000563 ist. Da nun $\mathfrak{L}\,0;000563 = -3;2494916$, so ist $-\mathfrak{L}\,0;000563 = +3;2494916$ Woraus man siehet, daß, wenn ein Dezimalbruch im Nenner ist, dessen wahrer Logarithmus, aber positiv genommen werden muß Dieser wahre Logarithmus ist aber das Komplement des übermäßigen. Also kann man ihn, wenn man will, daraus finden. Der übermäßige Logarithmus von 0;000563 ist 6;7505084, also ist der wahre 3;2494916. Um nun wieder auf das gegebene Exempel zurück zu kommen, so muß es also berechnet werden

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\,7 &= 0;8450980 \\ \mathfrak{L}\,0;0045 &= 7;6532125! \\ \mathfrak{L}\,0;000563 &= 3;2494916 \\ & \overline{\text{x}1;7478021} \end{aligned}$$

zum Logarithmus 1;7478021 gehöret nächstens die Zahl 55;95.... Also ist

$$\frac{7 \times 0;0045}{0;000563} = 55;95.....$$

Wenn, nach der in diesem Paragraph gegebenen Regel, Logarithmen addiret worden, so trift es sich oft, daß in der Summe ein Zehner weniger ist, als deren abgenommen werden sollen. Alsdann ist der gefundene Logarithmus übermäßig, oder um einen Zehner zu groß. Die

dazu gehörige Zahl wird demnach vermittelst der nemlichen Regeln gefunden, die schon oben gegeben worden, und wir wollen uns nicht länger dabey aufhalten.

Anmerkung. Man möchte vielleicht glauben, alles, was wir von übermäßigen Logarithmen und von den arithmetischen Komplementen der Logarithmen gesagt haben, sey nur eine überflüssige Schwierigkeit, wodurch die Rechnungen mehr verwickelt als befördert werden. Es lehret aber die Erfahrung, daß die angeführten Hülfsmittel, wenn man einmal daran gewöhnet ist, in der That manche Rechnung erleichtern und verkürzen. Man kann sie freylich entbehren, und ein Anfänger braucht sich nicht damit abzugeben. Deswegen haben wir sie bis hierher aufgeschoben, wo sie als ein kurzer Anhang zur reinen Trigonometrie betrachtet werden können. Das nemliche gilt auch von den noch folgenden Sätzen dieses Hauptstückes.

§. 64.

Wenn der Halbmesser = 10000000000 angenommen wird, wie es bey den Logarithmen der trigonometrischen Linien zu geschehen pfleget, so erhält man den Logarithmus der Kotangente, wenn man den Logarithmus der Tangente von 20 subtrahiret; und umgekehrt, man erhält den Logarithmus der Tangente, wenn man den Logarithmus der Kotangente von 20 abziehet. Denn es ist

$$\mathfrak{T}'A = \frac{R^2}{\mathfrak{T}A}$$

daher $\mathfrak{L}\,\mathfrak{T}'A = \mathfrak{L}(R^2) - \mathfrak{L}\,\mathfrak{T}A$

oder $\mathfrak{L}\,\mathfrak{T}'A = 2\mathfrak{L}R - \mathfrak{L}\,\mathfrak{T}A.$

Da nun bey dem angenommeneu Halbmesser, $\mathfrak{L}R = 10$, so ist

$2\mathfrak{L}R = 20$, also ist

$\mathfrak{L}\,\mathfrak{T}'A = 20 - \mathfrak{L}\,\mathfrak{T}A.$

Des-

Desgleichen, da

$$\mathfrak{T}A = \frac{R^2}{\mathfrak{T}'A}$$

so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T}A = 2\mathfrak{L}R - \mathfrak{L}\mathfrak{T}'A$

$= 20 - \mathfrak{L}\mathfrak{T}'A.$

Es werde verlanget der Logarithmus der Kotangente von $37^g\ 15'$, so findet man in den Tafeln $\mathfrak{L}\mathfrak{T}(37^g\ 15') = 9;8810522$. Subtrahiret man diese Zahl von 20, so wird $\mathfrak{L}\mathfrak{T}'(37^g\ 15') = 10;1189478$

Es sey der Fall umgekehrt, und es werde gegeben $\mathfrak{L}\mathfrak{T}'(37^g 15') = 10;1189478$, woraus der Logarithmus der Tangente gefunden werden soll. Man subtrahire 10;1189478 von 20, so wird

$\mathfrak{L}\mathfrak{T}(37^g\ 15') = 9;8810522$

Das Abziehen von 20 geschiehet wie bey den Komplementen (§. 62), nur daß die Charakteristik von 19 subtrahiret wird.

Will man den Halbmesser = 1 annehmen, also 10000000000 mal kleiner als bey den Logarithmen der Tafeln, so muß jeder Logarithmus um 10 verkleinert werden. In dieser Voraussetzung fällt der Zehner allemal weg, der bey den Logarithmen der Tangenten über 45^g stehet. Z. E. wenn der Halbmesser = 10000000000, so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\,89^g\ 35' = 12;1383263$, folglich, wenn der Halbmesser = 1, so ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\,89^g\ 35' = 2,1383263$. Die wahren Logarithmen der Tangenten unter 45^g, und aller Sinusse werden negativ, weil solche Tangenten und die Sinusse kleiner sind als der Halbmesser. Z. E. es ist für den Halbmesser 10000000000, $\mathfrak{L}\mathfrak{T}\,4^g\ 12' = 8;8659055$, also für den Halbmesser 1 ist $\mathfrak{L}\mathfrak{T}4^g\ 12' = 8;8659055 - 10$, das heißt, in diesem Falle zeiget die Tafel nicht den negativen Logarithmus selbst, sondern dessen Komplement oder den übermäßigen Logarithmus an.

Wenn

Wenn der Halbmesser = 1 ist, so ist

$$\mathfrak{T}'A = \frac{1}{\mathfrak{T}A}$$

folglich $\mathfrak{L}\mathfrak{T}'A = \mathfrak{L}1 - \mathfrak{L}\mathfrak{T}A$

$$\mathfrak{L}\mathfrak{T}'A = 0 - \mathfrak{L}\mathfrak{T}A$$

$$\mathfrak{L}\mathfrak{T}'A = -\mathfrak{L}\mathfrak{T}A$$

$$10 + \mathfrak{L}\mathfrak{T}'A = 10 - \mathfrak{L}\mathfrak{T}A$$

$$10 + \mathfrak{L}\mathfrak{T}'A = \mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{T}A.$$

Woraus man siehet, daß man den um 10 vergrößerten oder den übermäßigen Logarithmus der Kotangente erhält, wenn man das Komplement des wahren Logarithmus der Kotangente nimmt. Aus der Gleichung

$$\mathfrak{T}A = \frac{1}{\mathfrak{T}'A}$$

folget ebenfalls

$$\mathfrak{L}\mathfrak{T}A = -\mathfrak{L}\mathfrak{T}'A$$

$$10 + \mathfrak{L}\mathfrak{T}A = 10 - \mathfrak{L}\mathfrak{T}'A = \mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{T}'A$$

das heißt, das Komplement des Logarithmus der Kotangente ist gleich dem übermäßigen Logarithmus der Tangente

Zusatz. Was hier von der Tangente und Kotangente gesagt worden, gilt ebenfalls vom Kosinus und der Sekante, weil

$$\beta A = \frac{RR}{\mathfrak{S}'A}$$

und auch von dem Sinus und der Kosekante, weil

$$\beta'A = \frac{R.R}{\mathfrak{S}A}$$

Man

Man kann also diese allgemeinen Regeln geben

I) Wenn der Halbmesser 10000000000 ist, so ist 20 die Summe der Logarithmen, der Tangente und Kotangente, oder des Kosinus und der Sekante, oder des Sinus und der Kesekante.

II) Wenn der Halbmesser 1 ist, so erhält man den übermäßigen Logarithmus einer von solchen zwey trigonometrischen Linien (Tangente und Kotangente, Kosinus und Sekante, Sinus und Kosekante) wenn man das Komplement der andern nimmt.

§. 65.

Obgleich die Logarithmen hauptsächlich zur Erleichterung der Multiplikazion, Division, der Potenzen und Wurzeln gebraucht werden, so kann man sie doch auch in der Trigonometrie bey Summen und Differenzen gebrauchen. Gesetzt, es soll durch Logarithmen die Summe von $\mathfrak{S}A$ und $\mathfrak{S}B$ gefunden werden. So ist, wenn der Halbmesser $= 1$, (XI. §. 71)

$$\mathfrak{S}A + \mathfrak{S}B = 2\mathfrak{S}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \mathfrak{S}'(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$$

folglich $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}A + \mathfrak{S}B) = \mathfrak{L}2 + \mathfrak{L}\mathfrak{S}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) + \mathfrak{L}\mathfrak{S}'(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$. Z. E. es sey der Bogen A von $37^g\ 10'$ und den Bogen B von $19^g\ 30'$, so ist $A + B = 56^g\ 40'$, $A - B = 17^g\ 40'$. Also $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 28^g\ 20'$ und $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 8^g\ 50'$. Also ist für den Halbmesser 1

$$\mathfrak{L}\mathfrak{S}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) = \mathfrak{L}\mathfrak{S}\,28^g\ 20' = 9{;}6763281!$$
$$\mathfrak{L}\mathfrak{S}'(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B) = \mathfrak{L}\mathfrak{S}'\ 8^g\ 50' = 9{;}9948181!$$
$$\mathfrak{L}2 \ldots\ldots\ldots = 0{;}3010300$$
$$\mathfrak{L}(\mathfrak{S}A + \mathfrak{S}B) = 19{;}9721762!$$

Hierzu gehöret in den Tafeln ohngefähr der Bogen von $69^g\ 42'$. Woraus man siehet, daß die Summe der Sinusse der Bogen von $37^g\ 10'$ und $19^g\ 30'$ beynahe dem Sinus des Bogens von $69^g\ 43'$ gleich ist.

Um die Richtigkeit dieses Resultates zu untersuchen, nehme man in den Tafeln nicht die Logarithmen sondern die Sinusse selbst, so ist für den Halbmesser 1

$$\mathfrak{S}\, 37^g\, 10' = 0{;}6041356$$
$$\mathfrak{S}\, 19^g\, 30' = 0{;}3338069$$
$$\text{Summe } 0{;}9379425 = \mathfrak{S}\, 69^g\, 43'.$$

Auf eine ähnliche Art muß man verfahren, wenn man den Logarithmus der Differenz zweyer Sinusse erhalten will. Die Formel ist für den Halbmesser 1

$$\mathfrak{S}A - \mathfrak{S}B = 2\,\mathfrak{S}'\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right).\,\mathfrak{S}\left(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B\right).$$

Zusatz. Das nemliche Verfahren kann auf andere Zahlen angewandt werden, die nicht trigonometrische Linien sind. Gesetzt es wird der Logarithmus der Zahlen p und q verlanget, so hindert mich nichts diese Zahlen als die Sinusse gewisser Bogen zu betrachten. Es sey P der Bogen der zum Sinus p, und Q der Bogen der zum Sinus q gehöret, so ist $p = \mathfrak{S}P$ und $q = \mathfrak{S}Q$.

$$p + q = \mathfrak{S}P + \mathfrak{S}Q = 2\mathfrak{S}\left(\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q\right) \times \mathfrak{S}'\left(\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q\right)$$
$$\mathfrak{L}(p+q) = \mathfrak{L}(\mathfrak{S}P + \mathfrak{S}Q) = \mathfrak{L}2 + \mathfrak{L}\mathfrak{S}\left(\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q\right) + \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}'\left(\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q\right)$$

Würde die Differenz von p und q verlanget, so wäre

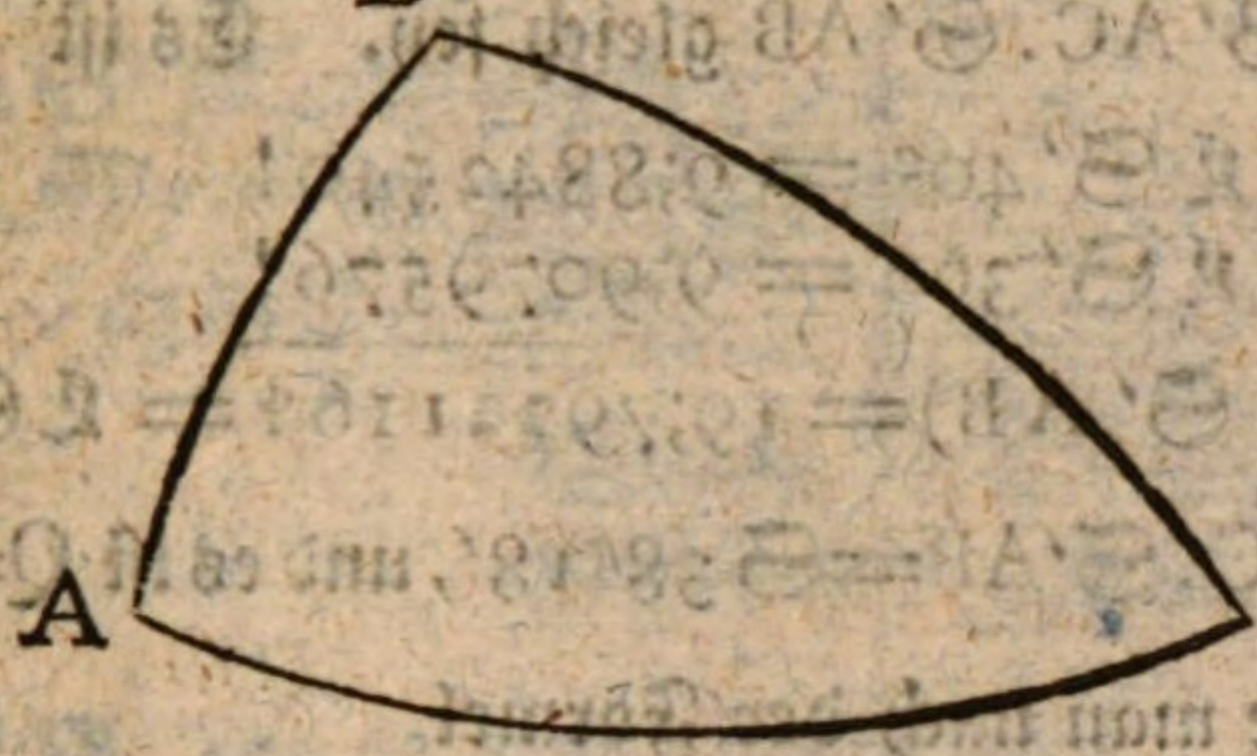
$$\mathfrak{L}(p-q) = \mathfrak{L}(\mathfrak{S}P - \mathfrak{S}Q) = 2\,\mathfrak{S}'\left(\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q\right).\,\mathfrak{S}\left(\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q\right)$$

Anmerkung. Wer mehrere solche Formeln verlanget, die theils noch bequemer und allgemeiner sind, suche sie in der Trigonometrie des Herrn *Cagnoli* §. 195. bis §. 209.

§. 66.

Zuletzt wollen wir noch mit *de la Caille* ein Exempel anführen, woraus man den Gebrauch der angeführten Regeln ersehen kann.

Im



Im Dreyecke ABC sey

$$AB = 36^g$$
$$AC = 40^g$$
$$BC = 48^g$$

Es wird der Winkel A verlanget, vermöge der Formel (§. 38)

$$\mathfrak{S}'A = \frac{\mathfrak{S}'BC - \mathfrak{S}'AC.\mathfrak{S}'AB}{\mathfrak{S}AC.\mathfrak{S}AB}$$

worin R verschwunden ist, weil wir den Halbmesser $= 1$ annehmen. Diese Formel giebt im Logarithmen

$$\mathfrak{L}\mathfrak{S}'A = \mathfrak{L}(\mathfrak{S}'BC - \mathfrak{S}'AC.\ \mathfrak{S}'AB) - \mathfrak{L}\mathfrak{S}AC - \mathfrak{L}\mathfrak{S}AB.$$

Um nun die Differenz $\mathfrak{S}'BC - \mathfrak{S}'AC.\mathfrak{S}'AB$ zu finden, so muß man, vermöge der Formel die wir im Zusatze des vorigen Paragraphs gegeben haben, annehmen, es sey

$$p = \mathfrak{S}'BC$$
$$q = \mathfrak{S}'AC.\mathfrak{S}'AB$$

Nun muß ein Bogen P gesucht werden, dessen Sinus p oder $\mathfrak{S}'BC$ sey. Ein solcher Bogen ist also das Komplement des Bogens BC oder $90^g - BC = 90^g - 48^g = 42^g$. Also ist $P = 42^g$.

Es

Es muß ferner ein Bogen gesucht werden dessen Sinus dem q oder $S'AC . S'AB$ gleich sey. Es ist

$$\mathfrak{L}S'AC = \mathfrak{L}S'40^g = 9;8842540!$$
$$\mathfrak{L}S'AB = \mathfrak{L}S'36^g = 9;9079576!$$
$$\mathfrak{L}(S'AC . S'AB) = 19;7922116! = \mathfrak{L}S\,38^g\,18'$$

Also ist $S'AC . S'AB = S\,38^g\,18'$, und es ist $Q = 38^g\,18'$

Nun verfahre man nach der Formel

$$\mathfrak{L}(p-q) = \mathfrak{L}(SP - SQ) = \mathfrak{L}2 + \mathfrak{L}S'(\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q) + \mathfrak{L}S(\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q)$$

Da $P = 42^g$

und $Q = 38^g\,18'$

so ist $P+Q = 80^g\,18'$ und $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = 40^g\,9'$

$P-Q = 3^g\,42'$ und $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q = 1^g\,51'$

$$\mathfrak{L}S'(\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}Q) = \mathfrak{L}S'40^g\,9' = 9;8832974!$$
$$\mathfrak{L}S(\tfrac{1}{2}P - \tfrac{1}{2}Q) = \mathfrak{L}S\,1^g\,51' = 8;5089736!$$
$$\mathfrak{L}2 = 0;3010300$$
$$\mathfrak{L}S(p-q) = \mathfrak{L}(S'BC - S'AC.S'AB) = 18;6933010!$$

Addire $\mathfrak{K}\mathfrak{L}SAC = \mathfrak{K}\mathfrak{L}S\,40^g = 0;1919325$

und $\mathfrak{K}\mathfrak{L}SAB = \mathfrak{K}\mathfrak{L}S\,36^g = 0;2307813$

$$\mathfrak{L}S'A = 9;1160148!$$
$$\angle A = 82^g\,30'$$

Die beyden zuletzt addirten Logarithmen sind nicht übermäßig. Denn da in den Tafeln $\mathfrak{L}S\,40^g$ schon übermäßig ist, und das Komplement genommen wird, so bekömmt man den wahren Logarithmus.

Laßt uns nun dieses Exempel und die dazu gehörigen Rechnungen kurz zusammenfassen. Wir lassen die Zeichen der übermäßigen Logarithmen weg.

Das Komplement von BC ist = = 42ᵍ 0′

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}'\mathrm{AC} &= 9;8842540 \\ \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}'\mathrm{AB} &= \underline{9;9079576} \\ \mathfrak{L}(\mathfrak{S}'\mathrm{AC}\times\mathfrak{S}\mathrm{AB}) &= 9;7922116 \end{aligned}$$

38ᵍ 18′

Summa : 80ᵍ 18′ d. Hälft. 40ᵍ 9′
Differenz 3ᵍ 18′ d. Hälfte 1ᵍ 51′,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}'\,40^{g}\,9' &= 9;8832974 \\ \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}\quad 1^{g}\,51' &= 8;5089736 \\ \mathfrak{L}\,2\;\;:\;\;: &= 0;3010300 \\ \mathfrak{AL}\,\mathfrak{S}\mathrm{AC} &= 0;1919325 \\ \mathfrak{AL}\,\mathfrak{S}\mathrm{AB} &= \underline{0;2807813} \\ \mathfrak{L}\,\mathfrak{S}'\mathrm{A} &= 9;1160148 \\ \angle\mathrm{A} &= 82^{g}\,30' \end{aligned}$$

Hier ist die doppelte Addizion vermieden worden, und alle Aggreganden sind nach einander geschrieben worden. Uebrigens haben wir in diesem und allen anderen trigonometrischen Exempeln nur die Grade und Minuten ohne Sekunden in Betrachtung gezogen, weil ein Anfänger selten Tafeln besitzet wo die Sekunden anzutreffen sind.

Zusatz. Um doch einmal zu zeigen, daß durch die Logarithmen die Rechnungen wirklich verkürzet werden, so wollen wir das nemliche Exempel auch ohne Logarithmen berechnen. Wir gebrauchen dabei die abgekürzte Multiplikazion, welche von der liken Hand zur rechten geschiehet, und vergrößern die Summe der Kolumne zur Rechten um so viel Einheiten als sie Zehner hat. Die Formel ist

$$\mathfrak{S}'\mathrm{A} = \frac{\mathfrak{S}'\mathrm{BC} - \mathfrak{S}'\mathrm{AC}\,.\,\mathfrak{S}'\mathrm{AB}}{\mathfrak{S}\mathrm{AC}\,.\,\mathfrak{S}\mathrm{AB}}$$

oder, im gegenwärtigen Falle,

$$S'A = \frac{S'48^g - S'40^g \times S'36^g}{S40^g \times S36^g}$$

$S'40^g = 0;7660444$	$S40^g = 0;6427876$
$\times S'36^g = 0;8090170$	$\times S36^g = 0;5877853$
0688022	0000505
5440333	3213433
03440	082664
6550⅓3	431565
076	02849
09	42145
44	0284
	4214
	082
	431
	00
	32
	0
	1
$S'40^g \times S'36^g = 0;6197429$	$S40^g \times S36^g = 0;3778209$

$$S'48^g = 0;6\,6\,9\cdot1\,3\,0\,6$$

$$-S'40^g \times S'36^g = -\,0;6\,1\cdot9\cdot7\cdot4\cdot2\cdot9$$

$$0;0\,4\,9\,3\,8\,7\,7$$

Divi-

Dividire 0;0493877 durch 0;3778209 oder 493877 durch 3778209

493877;0:3778209 = 0;1307172

3.778209

1160561 0

113.34.6.2.7

27097300

26.44.7.4.6.3

6498370

3.778209

27201610

26.4.4.74.6.3

7541.4.70

3556418

— 14948

Also ist für den Halbmesser 1

S'A = 0;1307172

oder für den Halbmesser 100000

S'A = 13071;72

suchet man in den Tafeln, so findet man

A = 82g 30'.

Vierzehntes Hauptstück.

Vom Nivelliren und Landmessen.

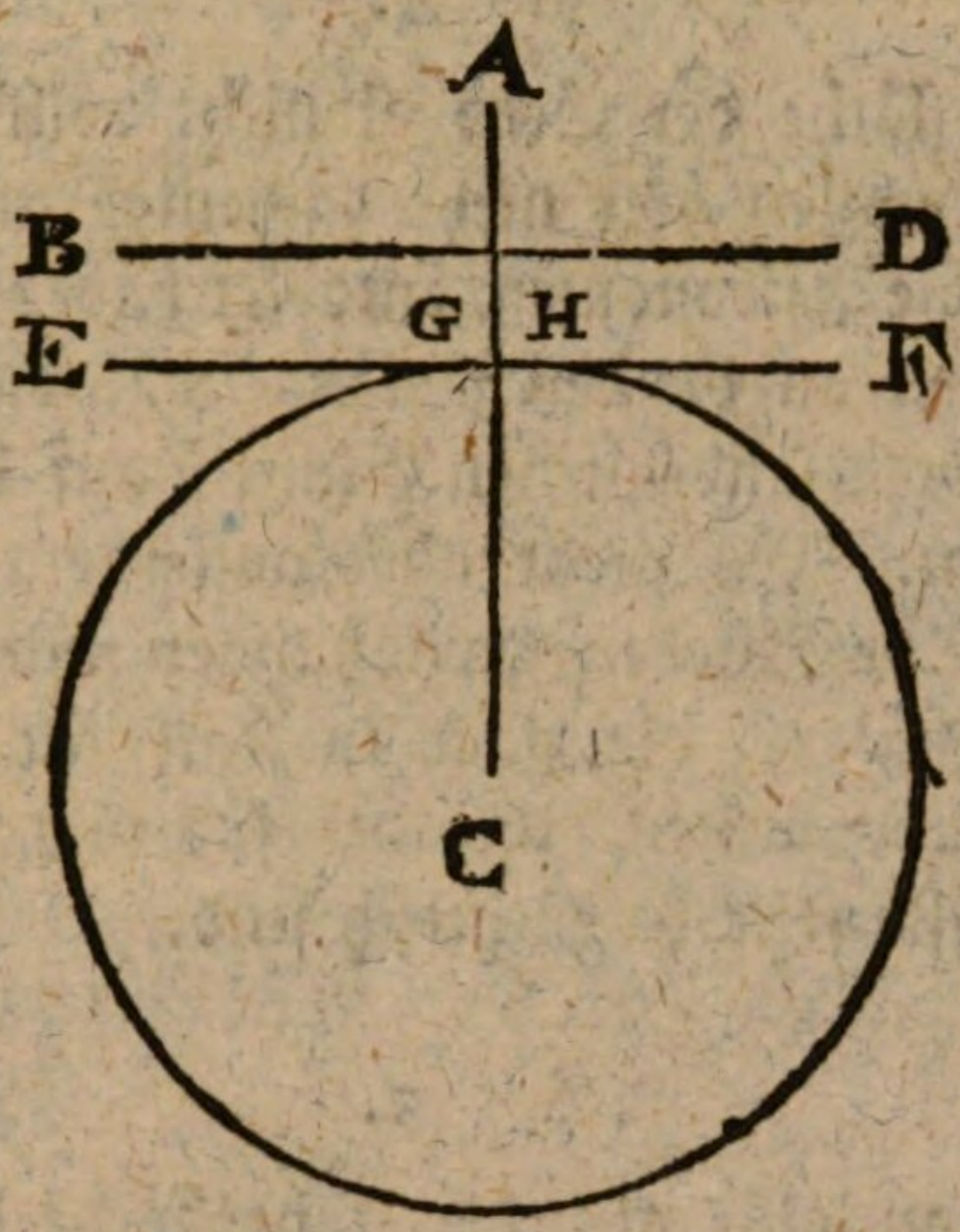
§. 1.

Es ist nicht unsere Absicht, eine vollständige Abhandlung vom Nivelliren und Landmessen zu schreiben. Beyde Künste erfordern eine ziemlich weitläuftige Anzeige und Erläuterung der verschiedenen Fälle, die da eintreffen können, und es ist die Pflicht eines geschikten Landmessers, sich bey Zeiten mit denselben bekannt zu machen. Wir betrachten das Nivelliren und Landmessen an diesem Orte nur als eine angenehme und nützliche Anwendung und Wiederholung der vornehmsten Eigenschaften des Dreyecks und der Vielecke.

§. 2.

Eine vertikale oder lothrechte Linie wird diejenige genannt, die gerade nach den Mittelpunkt der Erde gehet. Eine horizontale oder wagerechte Linie hingegen ist diejenige, welche von der Vertikallinie perpendikular geschnitten wird.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sey C der Mittelpunkt der Erde, welche beynahe kugelrund ist, so ist jede Linie als AC, die nach den Mittelpunkt gehet, eine Vertikallinie. Und jede Linie, als BD oder EF, die mit AC rechte Winkel machet, ist eine Horizontallinie.

Weil die Erde in Betrachtung der Felder, die man ausmißt, sehr groß ist, so kann ein kleiner Theil, wie GH, des Zirkels, der den Durchschnitt der Erde vorstellet, als eine gerade Horizontallinie angesehen werden.

§. 3.

Eine vertikale Ebne ist diejenige, die so stehet, daß in derselben soviel Vertikallinien gezogen werden können, als man will; und eine horizontale Ebne ist diejenige, worauf soviel Horizontallinien gezogen werden können, als man will.

Eben so wie ein kleiner Theil des Zirkels, der den Durchschnitt der Erde vorstellet, für eine gerade Linie gehalten werden kann, so kann auch ein kleiner Theil der krummen Erdfläche für eine horizontale Ebne angesehen werden.

§. 4.

Die Oberfläche der Erde ist nicht vollkommen kugelrund. Wir wollen hier nicht dasjenige in Betrachtung ziehen, was die Astronomen entdeckt haben, daß nemlich unsere Erdkugel an beyden Polen etwas eingedrücket ist. Dieses hat keinen sonderlichen Einfluß auf das Nivelliren und Landmessen. Es giebt aber ausserdem in der Oberfläche der Erde verschiedene Erhöhungen und Vertiefungen, Berge und Thäler, die zwar in Rüksicht auf die ganze Kugel wenig ausmachen, die aber für uns Menschen und unsere Geschäfte sehr beträchtlich sind.

§. 5.

Ziehet man also auf der Oberfläche der Erde eine Linie, so wird sie sehr selten horizontal seyn, sondern sie wird sich bald mehr bald weniger erheben oder senken, vom Mittelpunkte der Erde entfernen, oder sich demselben nähern.

§. 6.

Das Nivelliren ist die Kunst, die da lehret, die wahre Horizontallinie zu finden, und zu bestimmen, wie jede auf der Erdfläche gezogene Linie von der Horizontallinie abweichet.

§. 7.

Man hat verschiedene Werkzeuge ersonnen, um die Horizontallinie genau zu bestimmen. Man nennet sie meistens Wasserwagen, theils weil bey einigen das Wasser gebrauchet wird, theils auch weil die Oberfläche des Wassers allemal in einer horizontalen Lage ist.

§. 8.

Eine gemeine Wage mit einem genau halbirten Balken und einer senkrechten Zunge, zeiget schon die horizon-

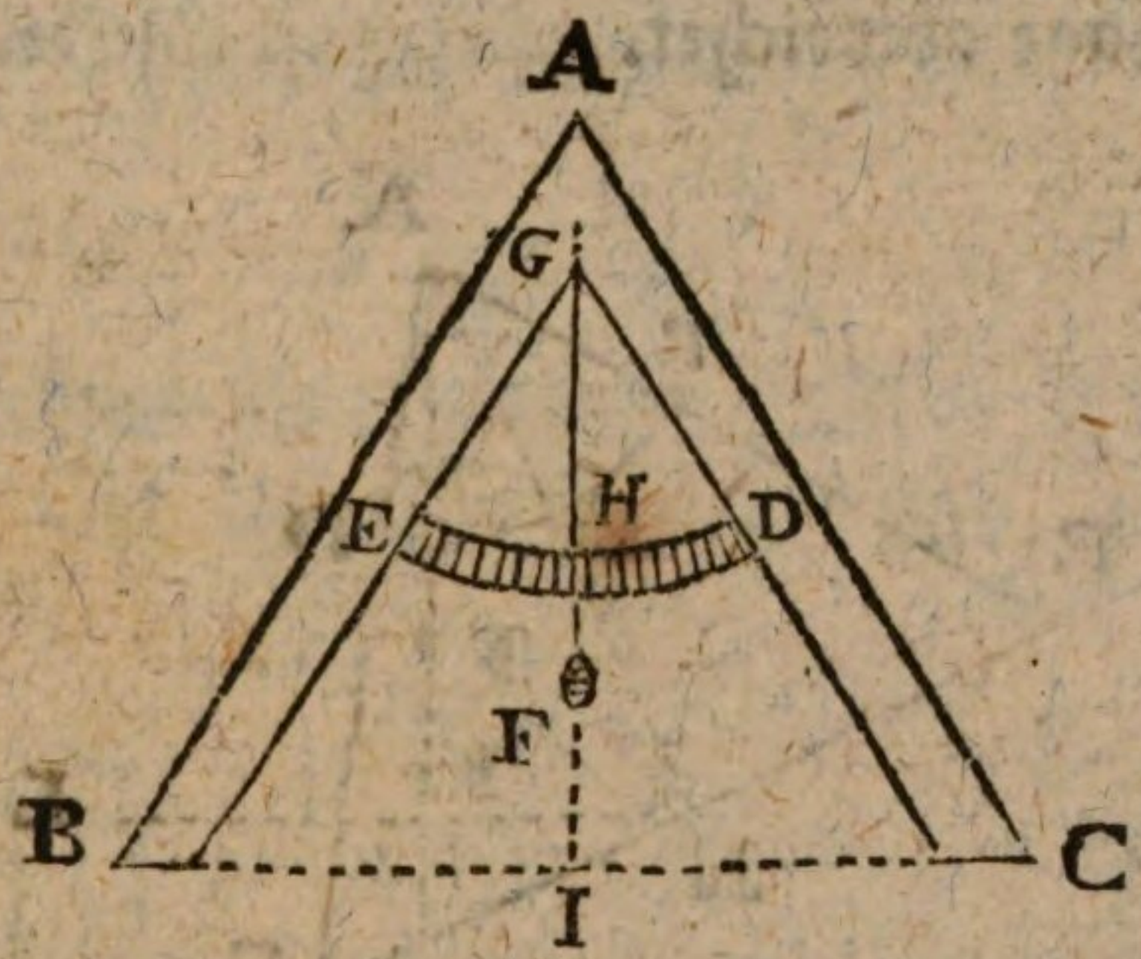
tale

tale und vertikale Linie an. Denn sobald an beyden Enden gleiche Gewichte auf den Wageschalen geleget werden, so stellet sich der Wagebalken horizontal, und die Zunge vertikal. Deswegen wird auch die Horizontallinie auf deutsch wagerecht genannt.

§. 9.

Wenn ein Gewicht an einem Faden hängt, so leget sich der Faden in die Vertikallinie. Auf solche Weise kann man erfahren, ob eine Fläche oder Linie vertikal stehet. Man pfleget das Gewicht von Bley zu machen, und nennet es ein Bleyloth. Daher kömmt das deutsche Wort lothrecht.

§. 10.



Man füge zwey gleiche Lineale AB und AC unter einem beliebigen Winkel an einander. In ED befestige man einen Zirkelbogen, dessen Mittelpunkt in G sey. Man halbire den Bogen in H, und theile ihn in Grade, die von A aus, rechts und links, gezählet werden. Im Mittelpunkte G befestige man einen Faden GF, an dessen Ende F ein Bleyloth hänget.

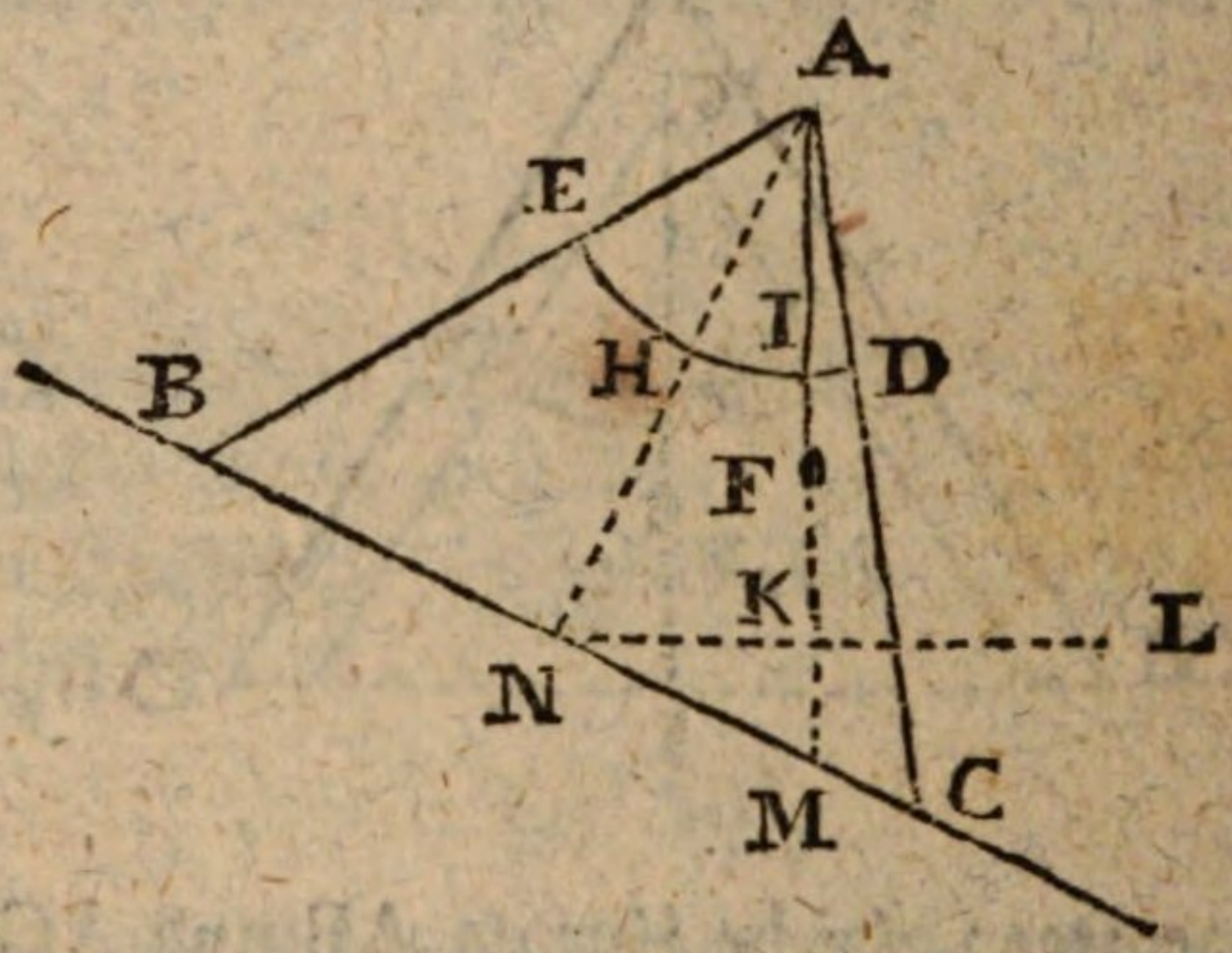
Stellet man nun dieses Instrument auf einer Ebne, so daß die Füße B und C auf der Ebne stehen, und daß

der Faden an den Bogen CD schlägt, so kann man erfahren, ob die Ebne horizontal lieget, indem man nur bemerket, ob der Faden an der Mitte H des Bogens lieget.

Auf solche Art kann auch eine bewegliche Ebne horizontal gerichtet werden. Man darf sie nur so lange rücken, bis das Bleyloth, wie man es auch stelle, allemal die Mitte des Bogens zeige.

Dieses läßt sich leicht beweisen. Denn wenn die Bogen EH und HD gleich sind, so sind in G oder in A zwey gleiche Winkel. Da nun auch AC = AB und AI = AI, so ist △AIC ≅ △AIB. Folglich sind auch in I zwey gleiche Winkel. Und weil sie auf einer geraden Linie BC stehen, so sind sie rechte, oder BC ist senkrecht auf AI. Da nun AI vertikal ist, so ist BC horizontal.

Lieget die Ebne nicht horizontal, so zeiget der Faden auf dem Bogen ED, um wie viel Grade die Ebne von der horizontalen Lage abweichet.



Denn es sey BC die Lage der Ebne, BAC das Instrument, AFKM die Vertikallinie, worin das Loth F hänget, AHN die Linie, die durch die Mitte H des Bogens ED gehet. Ziehe NKL senkrecht auf AF oder AK, so ist NKL die Horizontallinie.

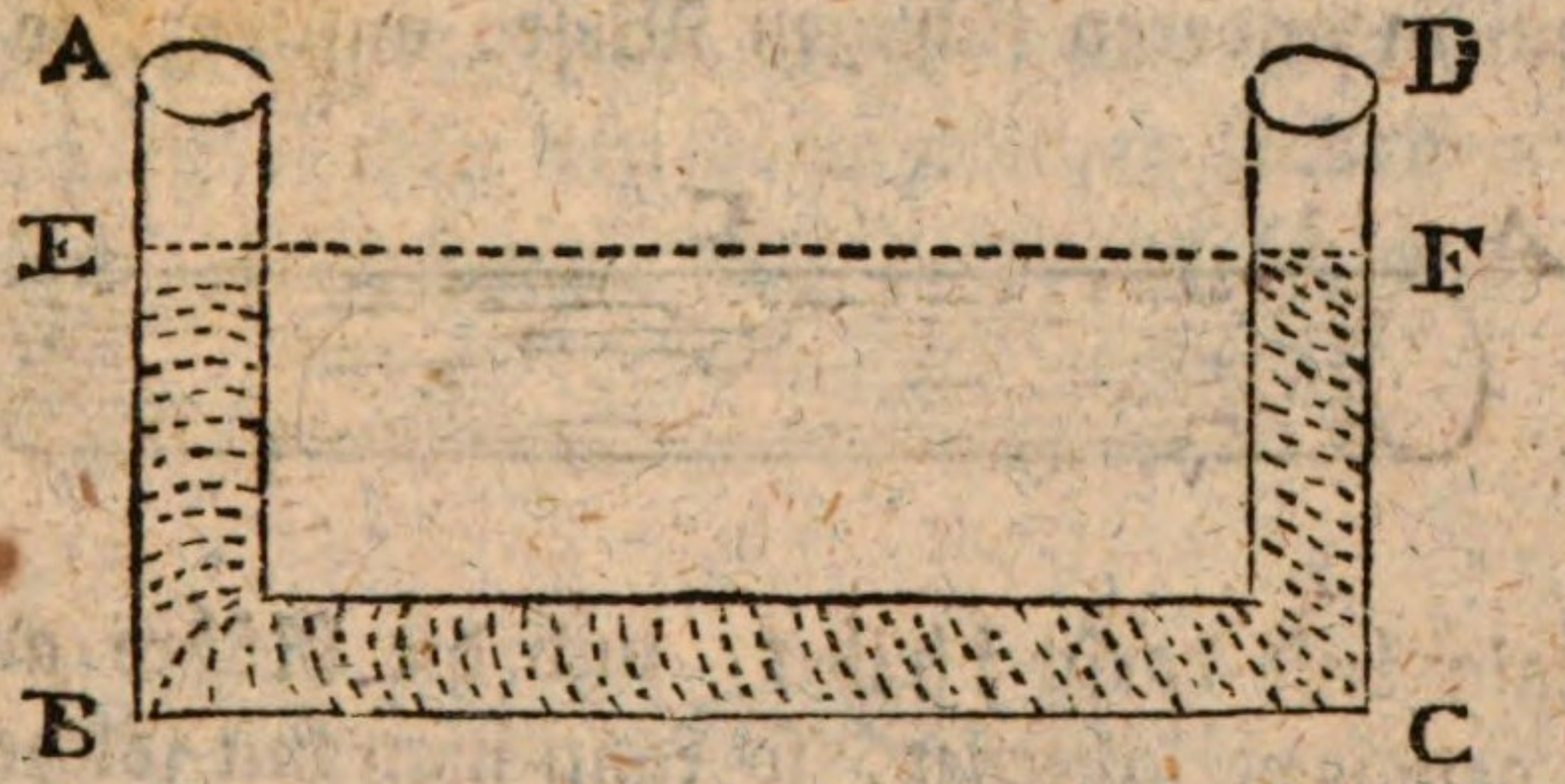
Das Dreyeck ANM ist rechtwinklich in N, und weil NK aus dem rechten Winkel N auf die Hypotenuse AM senk-

senkrecht gezogen ist, so ist △ANK ∽ △MNK, und folglich ∠KNM ∽ ∠KAN. Folglich ist der Winkel LNC, der die Abneigung der Ebne BC von der Horizontallinie anzeiget, eben so groß als der Winkel NAK, welcher die Abneigung des Perpendikels AN von der Vertikallinie AM bestimmet. Die Grade dieses letzten Winkels werden aber durch den Bogen HI gemessen, also auch die Grade des ersteren Winkels.

Uebrigens wird das eben jetzt beschriebene Instrument auf sehr verschiedene Arten eingerichtet, und entweder mehr verzieret, oder noch einfacher gemachet. Die Hauptsache ist allemal eine gerade Grundlinie BC; eine darauf senkrecht stehende Linie NA, welche entweder der ganzen Länge nach oder nur durch zwey ihrer Punkte, als A und H, angedeutet ist; ein Faden AF mit einem Gewichte F, welcher Faden auf der Linie AN anschlagen muß, wenn die Grundlinie BC horizontal lieget.

§. 11.

Man nehme eine gläserne Röhre ABCD, deren Enden AB, CD aufwärts gebogen sind, oder wenn man



will, auf dem Theile BC senkrecht stehen. Man gieße Wasser oder ein anderes flüßiges Wesen in solche Röhre, und bemerke die Punkte E und F, bis wo das Flüßige steiget, so liegen diese Punkte E und F in einer Horizontallinie EF,

EF, weil die Oberfläche des Wassers allemal eine Horizontalfläche ist.

Ist nun der Theil BC der Röhre horizontal, und stehen BA und CD senkrecht auf demselben, so ist die Höhe des Wassers, BE und CF beyderseits gleich, und wenn diese Höhe gleich ist, so lieget BC horizontal.

Man kann den Theil BC der Röhre auf einem ebnen Brette in einer Rinne befestigen, und das Brett auf einem Fuße mit einer Nuß stellen: so darf man nur das Brett so lange richten, bis $BE = CF$, welches man an gewissen Zeichen erkennen wird, die man in E und F machen kann. Auf diese Art bekömmt man allemal die Horizontallinie EF.

Anstatt der gläsernen Röhre BC kann man auch eine blecherne gebrauchen, woran man an beyden Enden, auch wohl noch in der Mitte, gläserne Flaschen anbringet. Genug, man mag so viel Röhren oder Flaschen zusammenfügen, als man will, so stehet das Wasser in allen gleich hoch; so bald es nur in Verbindung ist, und durch keine Scheidewand aufgehalten wird.

§. 12.

Wenn man eine gerade gläserne Röhre AB mit Wasser oder einem anderen flüßigen Wesen anfüllet, so daß nur

ein wenig Luft darin bleibet, und die Röhre an beyden Enden genau verschliesset, so kann man mit solcher Röhre auch die Horizontallinie finden.

Denn da die Luftblase C leichter ist als das Wasser, so suchet sie allemal den höchsten Platz in der Röhre einzunehmen. Stehet also die Röhre schief gegen die Horizontallinie, so steiget die Luftblase nach das eine Ende der

Röhre.

Röhre. Ist aber die Röhre horizontal, so bleibet die Blase zwischen A und B stehen, wie es sich trift, und wo sie sich befindet.

Ist nun irgendwo in der Röhre als in C eine kleine Aushölung, so daß der Pnnkt C ein wenig höher sey als A und B, wenn die Röhre horizontal lieget, so wird sich die Luftblase dahin begeben, und daran wird man erkennen, daß die Linie AB horizontal ist. Diesen Punkt C, wo die Röhre ein wenig weiter ist, findet man durch Erfahrung und Versuche. Man könnte auch mit Fleiß inwendig im Glase eine geringe Vertiefung anbringen.

Wenn man die Röhre auf einem Brette, und einem Fuße mit einer Nuß befestiget, so hat man eine bequeme Wasserwage.

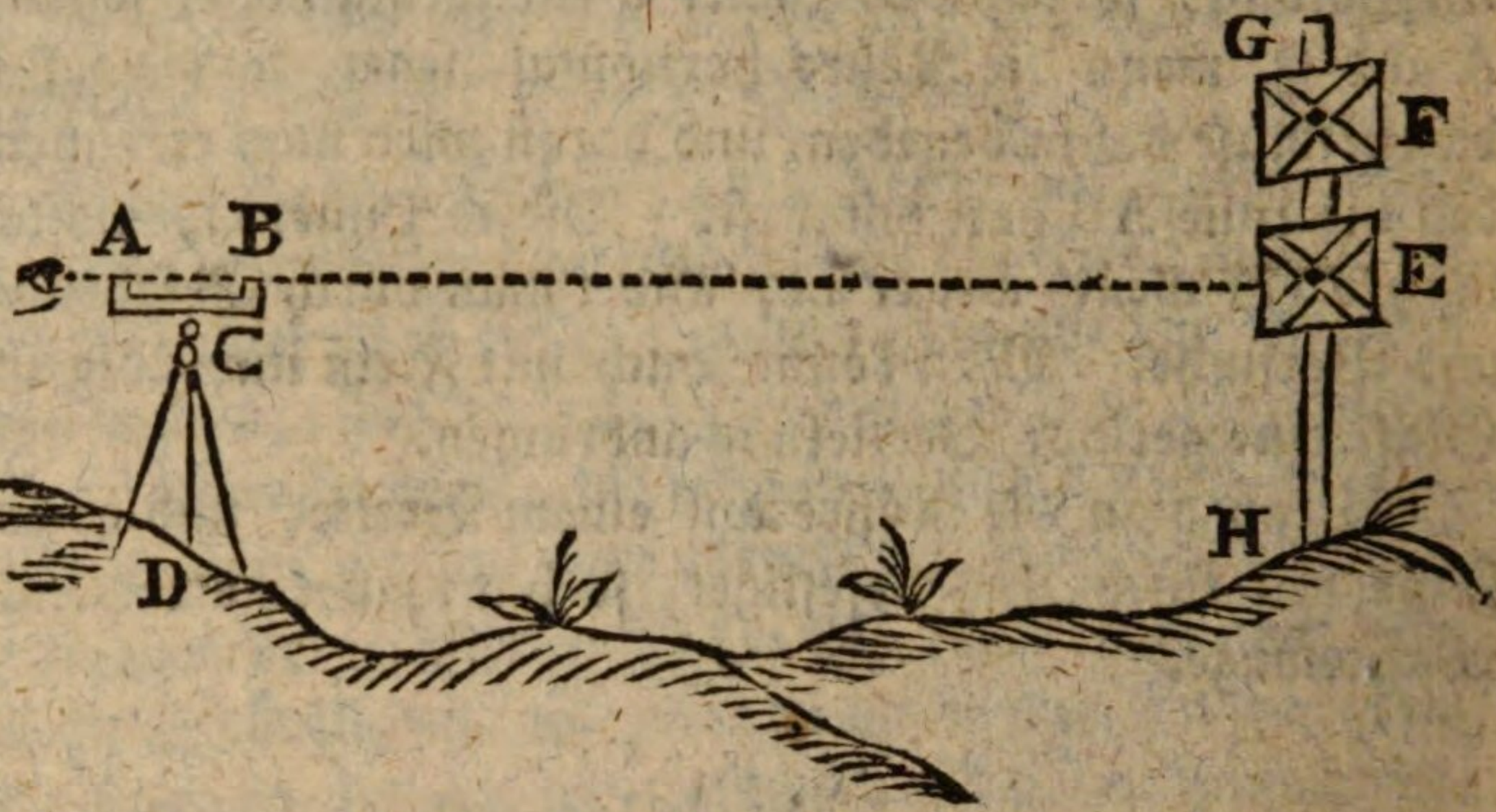
§. 13.

Wenn man einen Theil der Horizontallinie oder nur zwei Punkte derselben hat, so kann man sie leicht verlängern, oder den Punkt finden, wo sie hinzielet. Denn die Erfahrung lehret, daß der Lichtstrahl, wodurch wir einen Punkt eines Gegenstandes sehen, in gerader Linie vom Auge aus nach den bemerkten Punkt hingehet. Dieses trift zwar nicht allemal ganz genau ein, weil die Lichtstralen sich etwas in der dickeren und dünneren Luft brechen. Man braucht aber bey den gewöhnlichen Fällen und in mittelmäßigen Entfernungen nicht darauf zu achten.

(Siehe die folgende Figur.)

§. 14.

Gesetzt also, es stehet auf dem Fuße CD irgend ein Instrument AB, welches so gerichtet werden kann, daß die Puukte A und B in der Horizontallinie liegen.



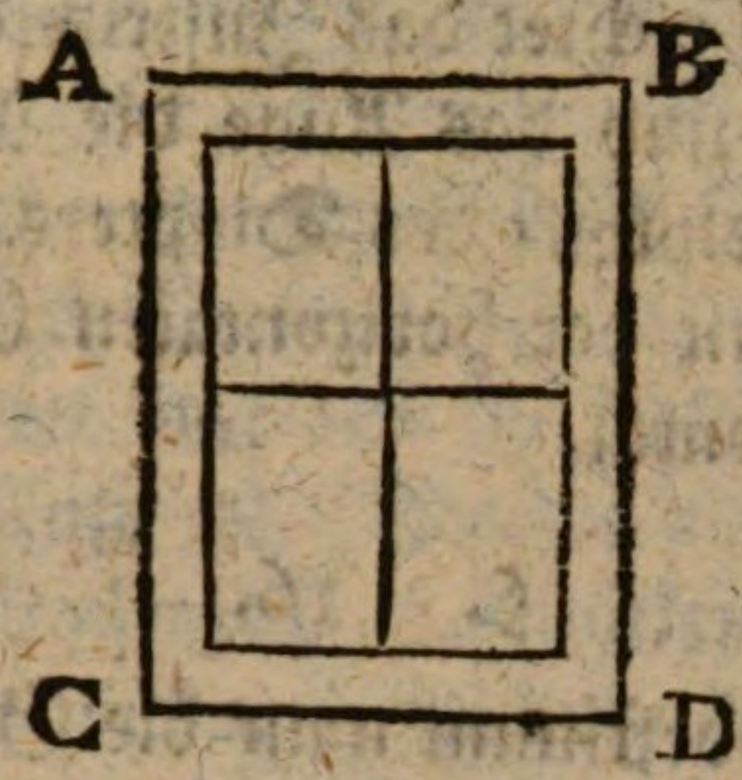
In einer gewissen Entfernung errichte man einen Stock oder Pfahl GH mit einer oder ein paar Scheiben F und E, die sich auf und abwärts schieben lassen, und deren Mitte durch ein gemahltes Kreuz angedeutet wird.

Man wende das Instrument AB links und rechts, jedoch allemal in der horizontalen Lage, so daß das Auge bey A, den Pfahl HG gerade hinter den Punkt B erblicke. Es schiebe jemand die Scheibe E, bis die Mitte derselben vom Auge bey A gerade hinter dem Punkte B gesehen wird, so ist die Linie ABE eine Horizontallinie. Wollte man mehrere Punkte derselben bemerken, so dürfte man nur zwischen D und H einige Pfähle so tief einschlagen, daß die obersten Enden alle von der Gesichtslinie AE berührt würden.

§. 15.

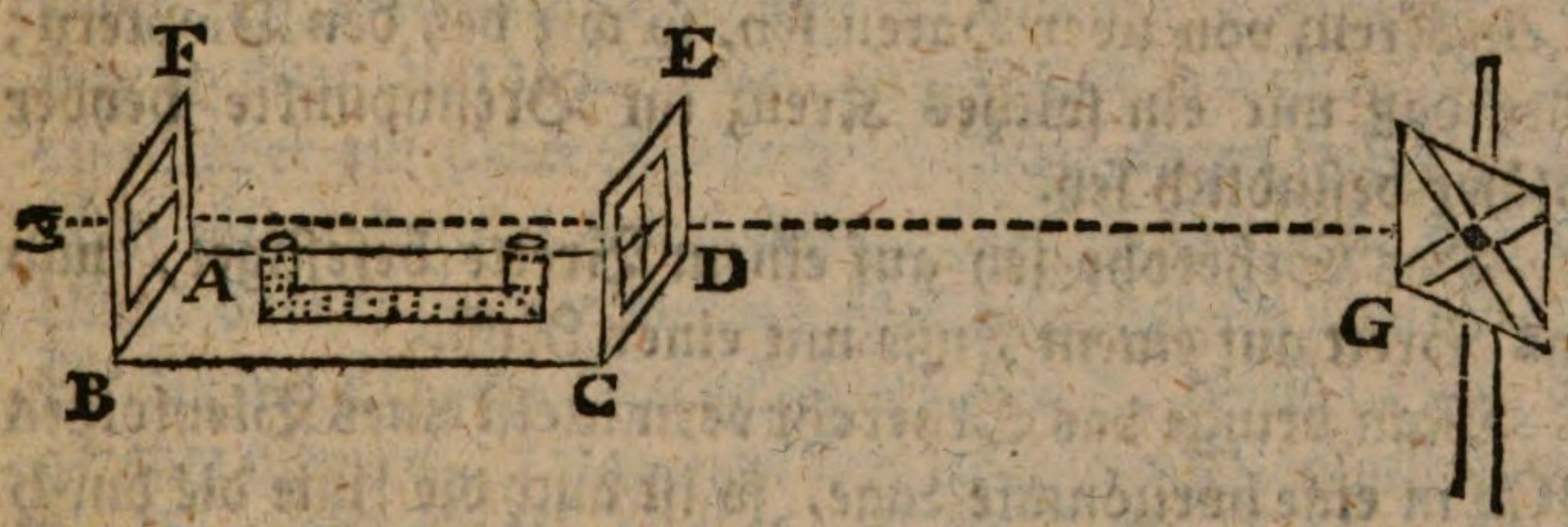
Um die Gesichtslinie genauer zu bestimmen, pfleget man sich der Dioptern zu bedienen. Ein Diopter ist ein Stückchen Blech ABDC in Gestalt eines Fenster-Rahmes

oder



oder Spiegel:Rahmes, oder eines ausgeschnittenen Parallelogramms. Durch die Oeffnung desselben gehen kreuzweise zwey Fäden oder Haare, die den Mittelpunkt des Diopters anzeigen. Oft ist auch nur ein Einschnitt, der der Länge nach das Diopter in zwey gleiche Theile theilet, oder es wird in der Mitte ein kleines Loch gemacht. Ueberhaupt ist die Einrichtung dieses Stücks nicht allemal einerley.

Es sey nun ABCD ein Brett oder Lineal, was vermittelst einer Wasserwage horizontal gestellet werden könne. An beyden Enden stehen die Dioptern CE und BF senkrecht auf dem Brette.



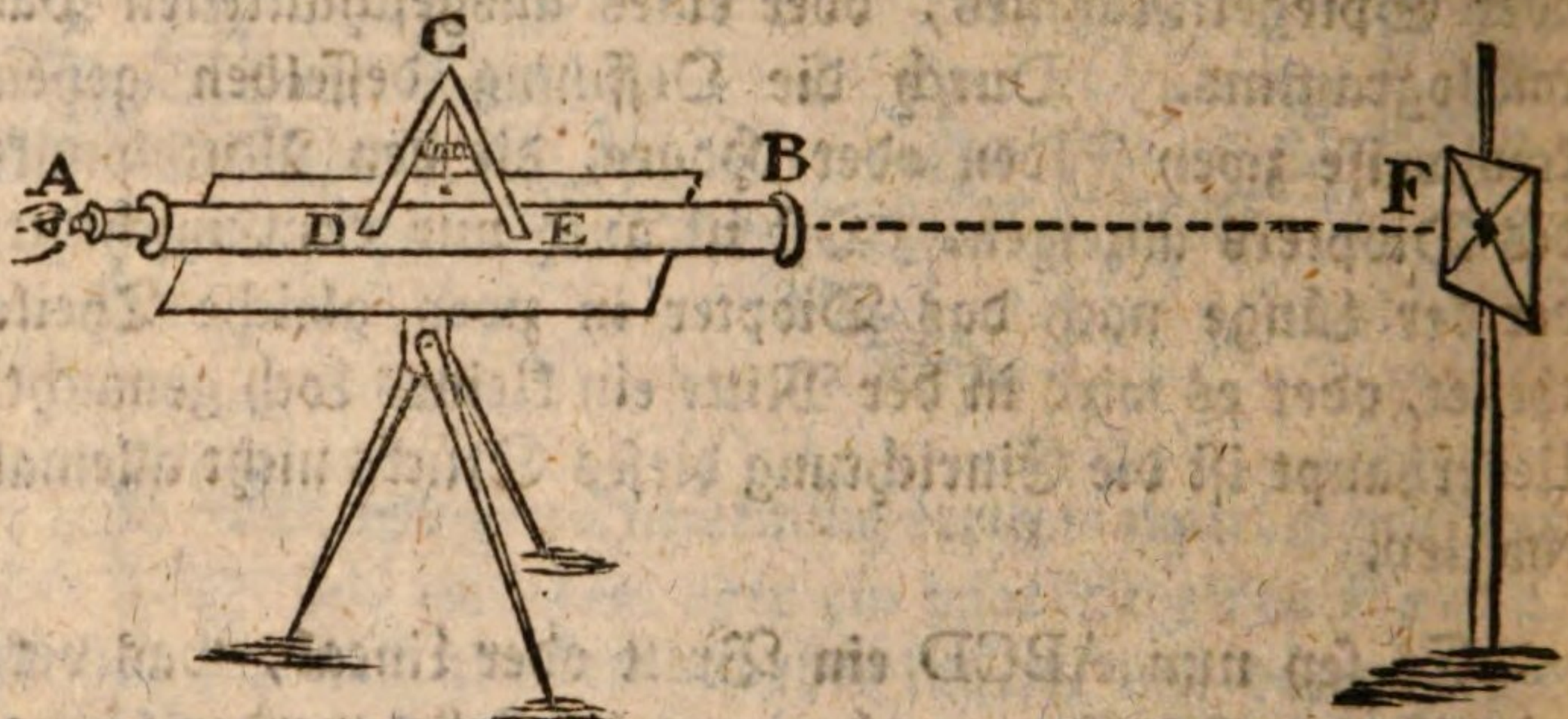
Das Diopter BF hat in der Mitte ein Loch, oder auch einen horizontalen Einschnitt. Dieses Loch muß eben so hoch stehen, als der Mittelpunkt des Diopters CE, wo sich beyde Fäden kreuzen.

Stellet

Stellet man nun das Auge vor der Oeffnung des Diopters BF, und richtet das Instrument AC so, daß es horizontal bleibe, und das Auge die Mitte der Scheibe G hinter den Mittelpunkt des Diopters CE erblicke, so ist die Gesichtslinie mit der horizontalen Ebne AC parallel, folglich auch horizontal.

§. 16.

Noch genauer bestimmt man die Gesichtslinie vermittelst eines etwas langen Perspektivs oder Seherohrs.



Es sey das Seherohr AB so eingerichtet, daß so wohl vor dem Okularglase bey A als vor dem Objektivglase bey B ein Kreuz von zwey Haren sey, so wie bey den Dioptern; oder daß nur ein solches Kreuz im Brennpunkte beyder Gläser befindlich sey.

Das Seherohr sey auf einem Brette befestiget, und das Brett auf einem Fuße mit einer Nuß.

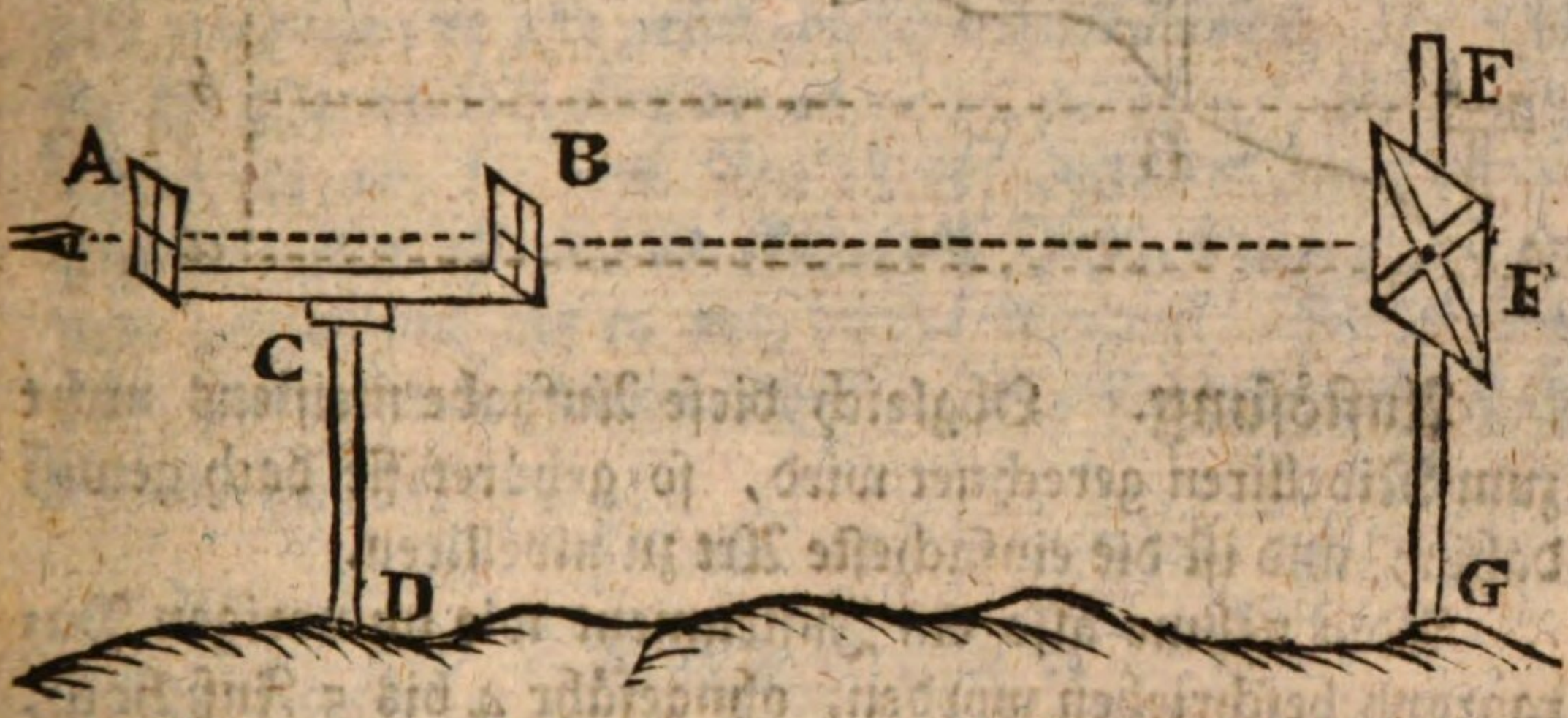
Man bringe das Seherohr vermittelst eines Bleylothes DCE in eine horizontale Lage, so ist auch die Linie die durch die gekreuzten Fäden gehet, horizontal; und zielet sie auf F, so ist ABF eine Horizontal-Linie.

§. 17.

Wenn man zwey oder mehrere von den vorher beschriebenen Mitteln verbindet, so kann man verschiedene genaue

Wasser-

Wasserwagen erhalten. Z. E. man befestige auf dem nemlichen Brette eine Wasserröhre mit einer Luftblase und zwey Teleskopen oder Seheröhre beyde mit der Wasserröhre parallel, aber in umgekehrter Lage, so daß das eine Taleskop z. E. nach Norden und das andere nach Süden ziele. Das Brett welches die drey Instrumente trägt, werde auf einem Fuße oder Stative mit einer Nuß gestellet. Wird nun die Wasserröhre vermittelst der Luftblase horizontal gestellet, so sind auch die Teleskopen horizontal, und ohne das Brett umzudrehen, kann man in zwey entgegengesetzten Richtungen die Punkte finden wo die Horizontal-Linie hinzielet.



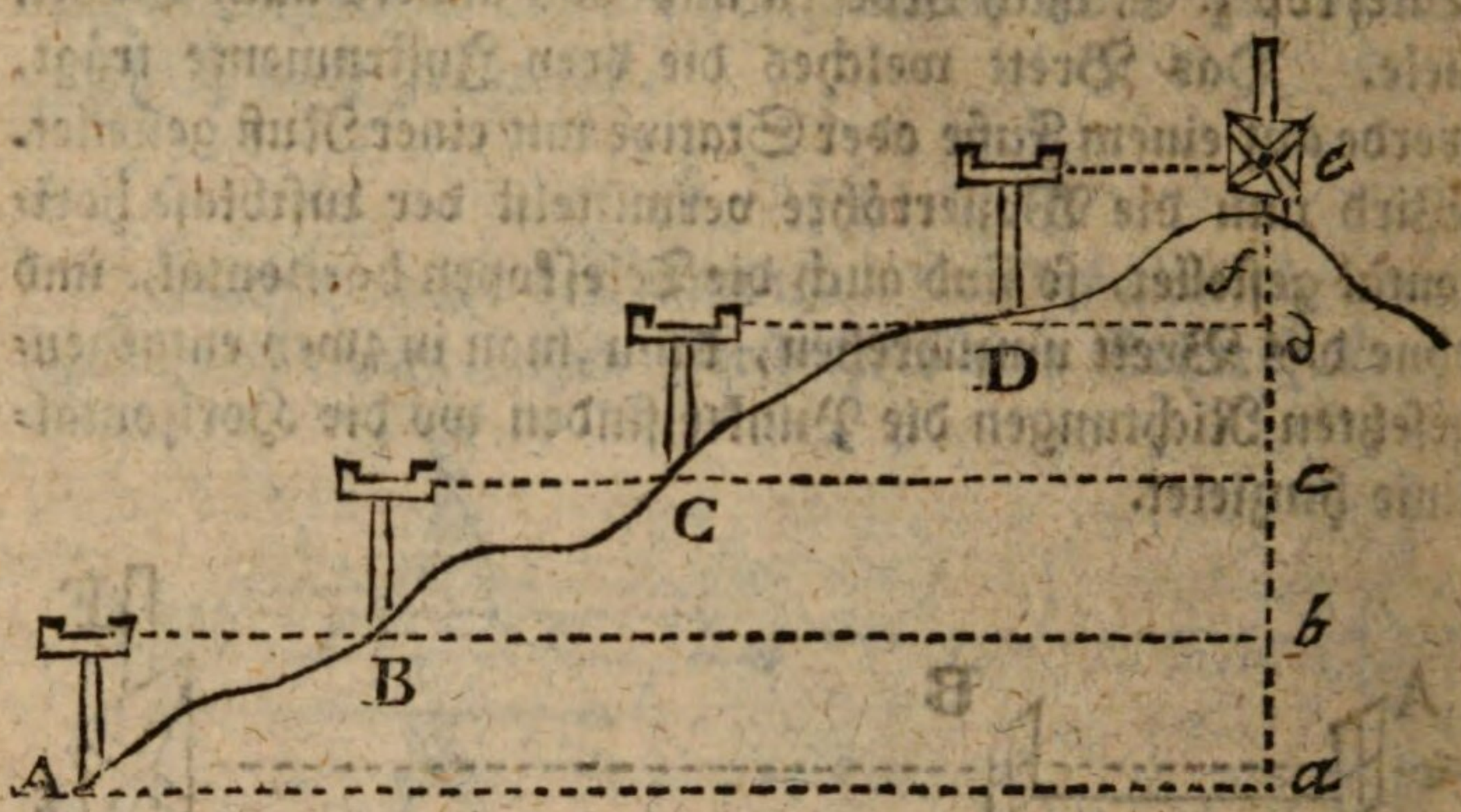
Gesetzt man fände sich in einem Falle wo man keine künstliche Instrumente bekommen könnte, so verschaffe man sich blos ein Lineal AB mit Dioptern in A und in B, und einen oder ein Paar Stäbe als CD die unten spitz sind und oben einen breiten und platten Kopf haben, so daß das Lineal darauf geleget werden könne, ferner ein Paar andere Stäbe als FG mit einer Scheibe wie E, wovon im §. 14. geredet worden. Hat man nun noch ein Bleyloth um die Stäbe vertikal und das Lineal AB horizontal zu richten, und eine Meßkette oder ein bloßes Strick das in Ruthen, Füße und Zolle getheilet ist, so kann man zur Noth jedes Feld damit nivelliren.

§. 18.

§. 18.

Aufgabe.

Die Höhe eines Berges auszumessen.



Auflösung. Obgleich diese Aufgabe meistens nicht zum Nivelliren gerechnet wird, so gehöret sie doch gewiß dahin, und ist die einfacheste Art zu nivelliren.

Man nehme also ein Instrument wie im vorigen Paragraph beschrieben worden, ohngefähr 4 bis 5 Fuß hoch, welches man einen Bergmesser zu nennen pfleget.

Man stelle es vertikal in A am Fuße des Berges, und ziele durch die Dioptern nach den Berg zu. Man lasse jemanden mit einem ähnlichen Instrumente vorausgehen, und lasse ihn dasselbe im Punkte B aufstellen, wo man siehet, daß die Horizontal-Linie hinzielet.

Nun stelle man sich hinter dem Instrumente bey B, lasse wiederum wie vorher den Gehülfen vorausgehen, und das Instrument was estlich in A war, nun in C aufstellen, wo die Horizontal-Linie hinzielet.

So gehe man weiter, bis man durch die Dioptern über den Berg weg sehen kann, als aus dem Punkte D. Man lasse den Gehülfeln auf die höchste Stelle *f* des Berges treten, und einen Stab mit einer Zielscheibe einstecken.

Man

Man lasse die Scheibe auf und nieder bewegen, bis sie in der Horizontal-Linie gesehen wird.

Wir setzen voraus, daß das Instrument mit den Dioptern allemal in gleicher Höhe aufgestellet worden. Z. E. daß der Mittelpunkt der Dioptern allemal 4 Fuß über der Erde stehe.

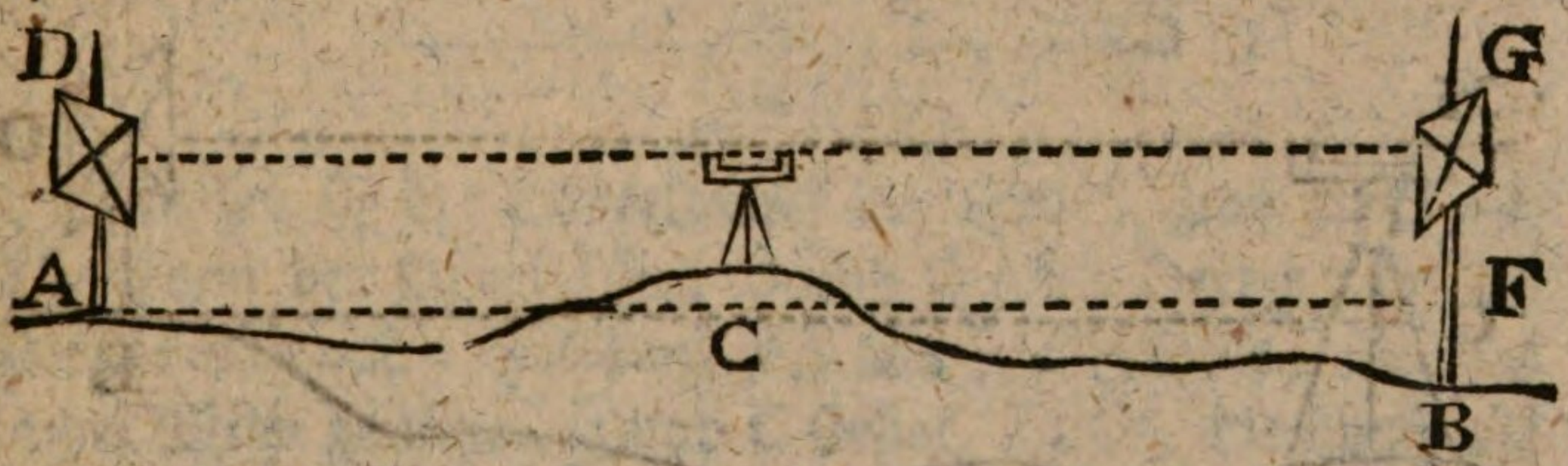
Nun zähle man wie vielmal das Instrument angebracht worden, und multiplizire dessen Höhe mit der Anzahl der Male. Man messe die kleine Höhe *fe* über der Spitze des Berges, und subtrahire sie vom Produkte, so hat man die Höhe des Berges, von A an gerechnet.

Denn es ist *fa* die senkrechte Höhe des Berges: verlängert man nun alle gefundene Horizontallinien, so treffen sie die Vertikal-Linie *fa*, in *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Und jeder Theil als *ab*, *bc*, *cd*, *de*, ist der Höhe des Instruments gleich. Also ist *ae*, die Höhe des Instruments, so vielmal genommen als es angebracht worden. Ziehet man nun von *ae* den kleinen Theil *ef* ab, so bleibet die Höhe *fa* des Berges.

§. 19.

Aufgabe.

Es sind zwey Oerter A und B auf dem Felde gegeben, die man aus einem dritten Orte C sehen kann. Man will wissen um wie viel der eine höher ist als der andre.



Auflösung. Stelle die Wasserwage auf ihrem Fuße in C. Zu mehrerer Festigkeit und Bequemlichkeit kann der Fuß drey Spitzen haben die sich zusammen legen und auseinander stellen lassen.

Richte das Instrument so, daß es die Horizontallinie anzeige.

Laß in A eine Stange AD mit einer Scheibe D errichten, und die Scheibe so stellen, daß D in der Horizontallinie liege.

Kehr die Wasserwage um, oder wenn sie doppelte Dioptern oder Teleskope hat, so laß sie stehen, begieb dich an das andere Ende derselben, und laß ebenfalls in B die Stange BG errichten und die Scheibe G in die Horizontallinie stellen.

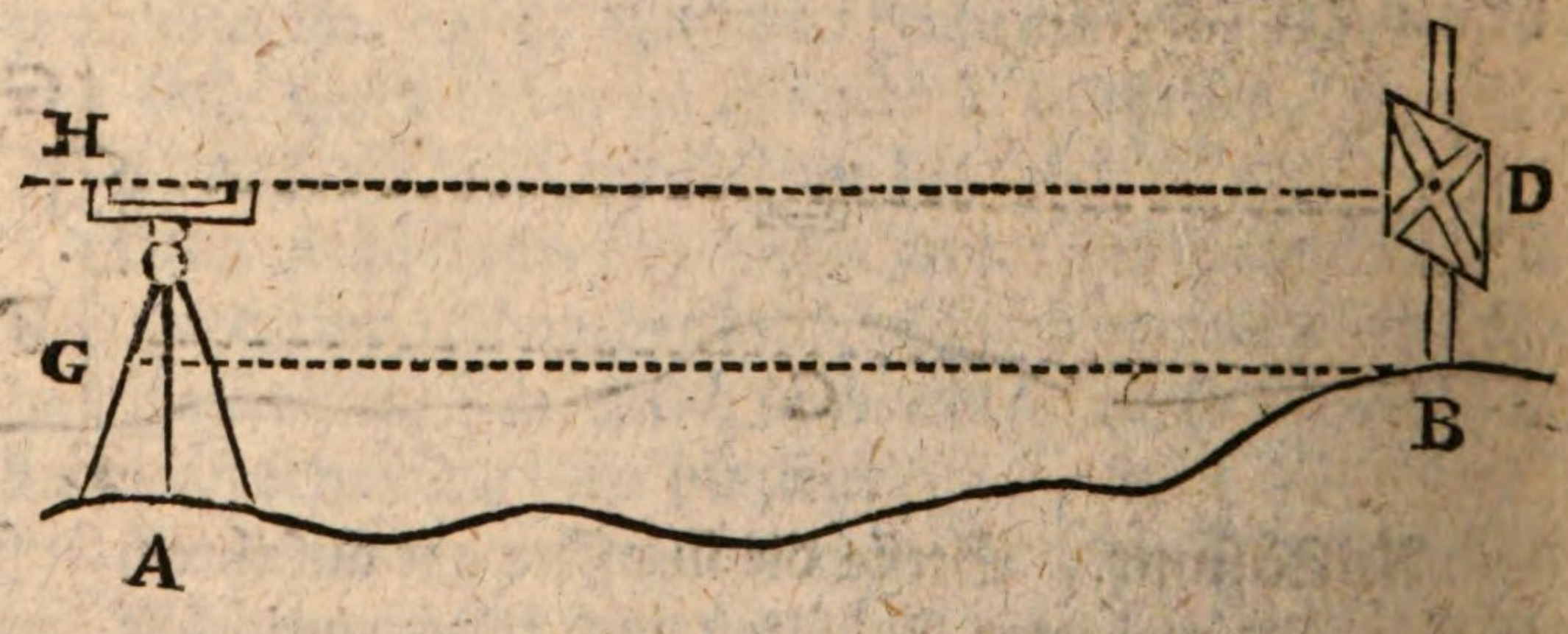
Miß die Höhen der Scheiben, nemlich DA und GB Subtrahire die kleinere Höhe DA (= GF) von der größeren GB, so bleibet die Höhe FB, welche anzeiget, um wie viel der Or B niedriger lieget, als der Ort A.

Gesetzt, man finde DA = $5\frac{1}{2}$ Fuß, GB = 9 Fuß, so ist FB = $9 - 5\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ Fuß, und B lieget um $3\frac{1}{2}$ Fuß niedriger als A.

Die höhere Scheibe zeiget allemal einen niedrigern Ort an.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehen, ziehe man in Gedanken die Horizontallinien DG, und AF, so sind sie parallel, und es ist DA = GF. Also lieget der Ort B um FB niedriger.

Eine andere Art. Stelle das Instrument an dem einen Orte A, und den Pfahl mit der Scheibe an dem



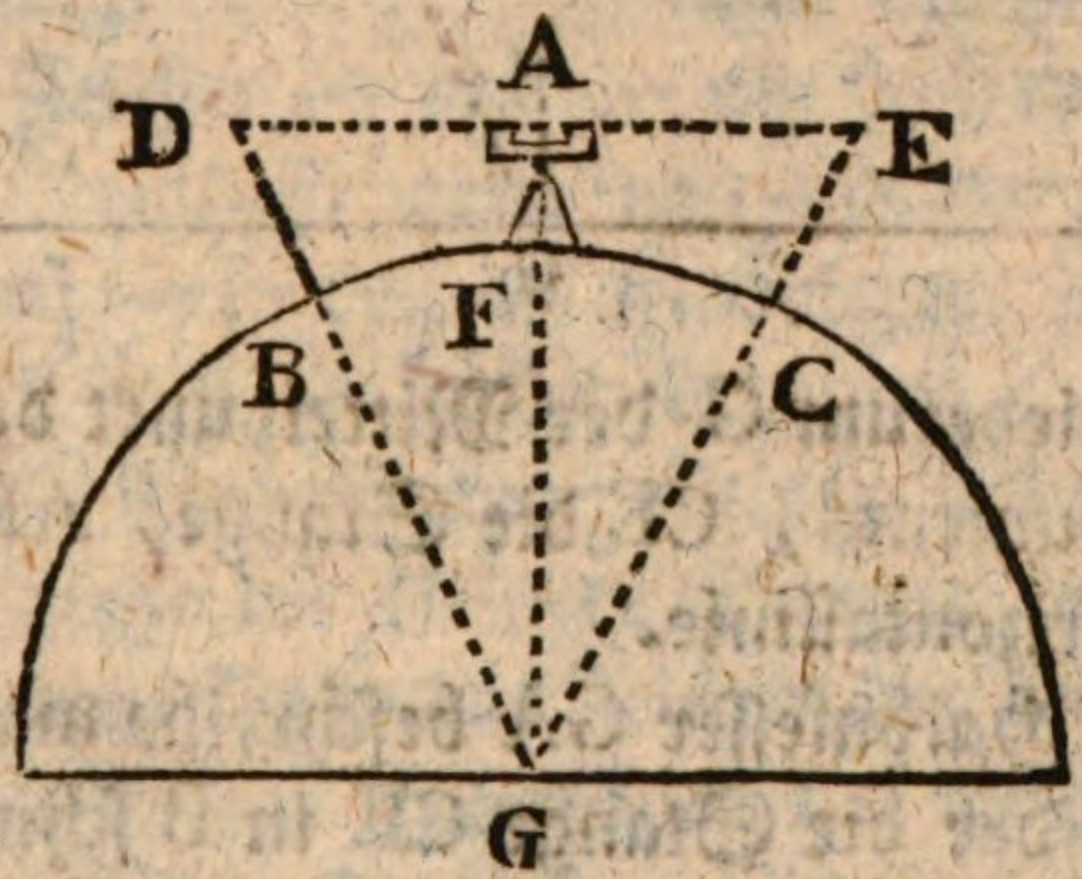
anderen Orte B. Merke auf dem Pfahle den Punkt D der in die Horizontallinie fällt. Miß die Höhe AH des

In-

Instruments und die Höhe DB des Pfahles. Ziehe die kleinere von der größeren ab, so bleibet der Unterschied der Erhöhungen beyder Oerter, und der niedrigste Ort ist derjenige, der die größte Höhe des Pfahles oder des Instruments gab. Gesetzt, es sey AH = 4 Fuß, BD (= HG) = $2\frac{1}{2}$ Fuß, so bleibet GA = $1\frac{1}{2}$ Fuß, und der Ort B ist um $1\frac{1}{2}$ Fuß höher als der Ort A. Denn man ziehe in Gedanken die Parallellinien HD und GB, so ist DB = HG, folglich bleibet GA als der Unterschied beyder Erhöhungen.

§. 20.

Es ist bey voriger Aufgabe vorausgesetzet worden, daß die Oberfläche der Erde gerade ist, welches auch bey mittelmäßigen Entfernungen angenommen werden kann. Und wären auch die Entfernungen sehr groß, so kann doch bey der ersten Auflösung kein Irrthum entstehen, sobald das Instrument in der Mitte zwischen beyden Oertern gestellet wird.

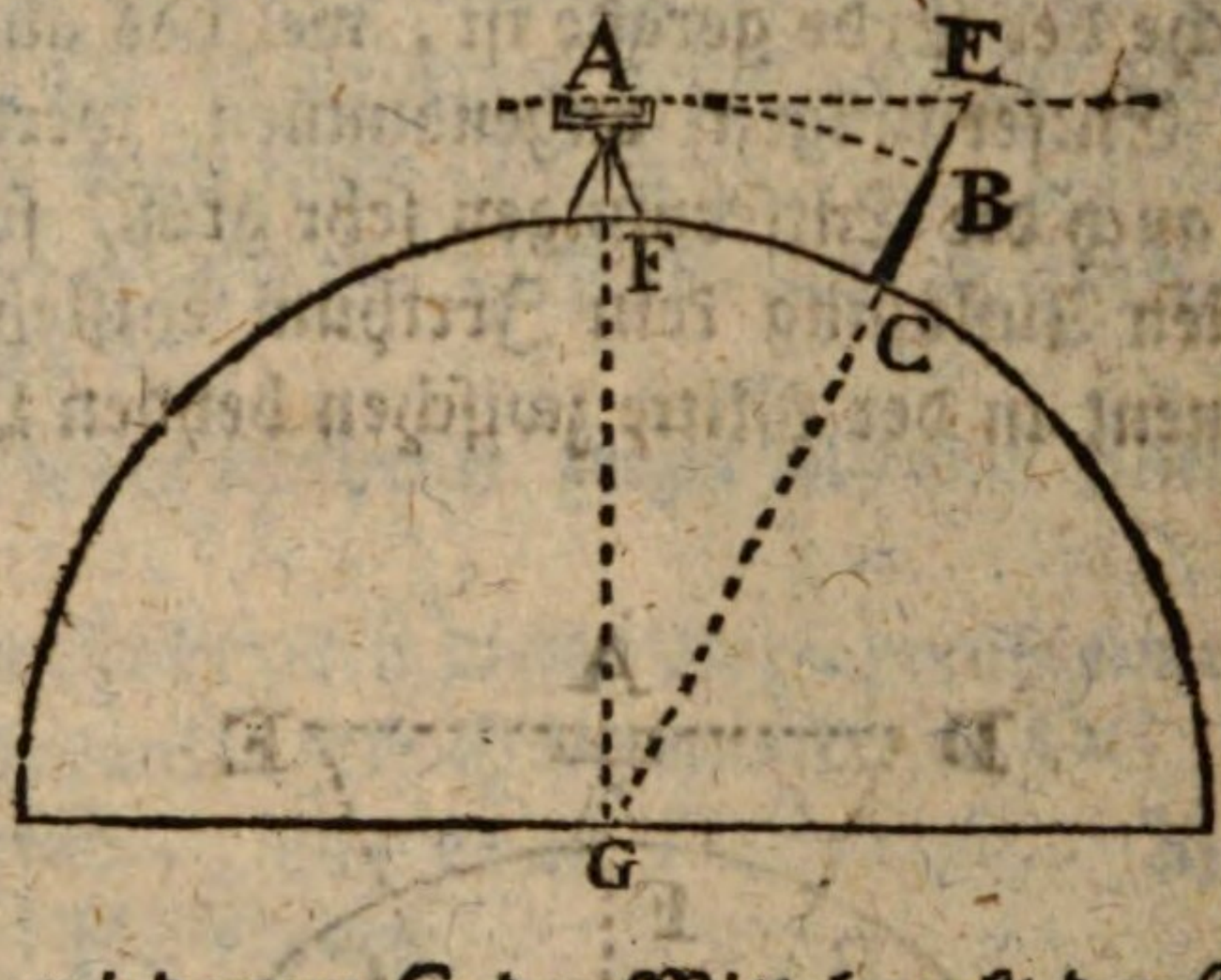


Es sey G der Mittelpunkt der Erde, und BFC ein Theil von der Oberfläche, B und C zwey Oerter, wo die Pfähle BD und CE stehen, FA das Instrument, welches in der Mitte zwischen B und C stehet, DAE, die durch die Wasserwage gefundene Horizontallinie: so ist leicht einzusehen, daß die Dreyecke EAG und DAG ähnlichgleich sind, folglich DG = EG, und da BG = CG, so ist DG — BG = EG — CG oder DB = EC.

Also müssen in diesem Falle die Höhen der Scheibe, nemlich BD und CE, nothwendig gleich seyn, sobald die Oerter B und C gleich weit vom Mittelpunkte der Erde liegen. Wenn die eine Höhe größer ist als die andere, z. E. CE $<$ BD, so zeiget der Unterschied an, um wie viel der eine Ort dem Mittelpunkte der Erde näher liegt, als der andere.

§. 21.

Hingegen in der zweyten Auflösung des §. 19 ist der Fall nicht der nemliche.



Es sey wiederum G der Mittelpunkt der Erde, F der Ort des Instruments, CE die Stange, AE die gefundene scheinbare Horizontallinie.

Mit dem Halbmesser GA beschreibe man in Gedanken einen Zirkel, der die Stange CE in B schneidet, so wird CE um BE länger seyn als FA, obgleich der Ort C nicht weiter als F vom Mittelpunkte der Erde entfernet ist.

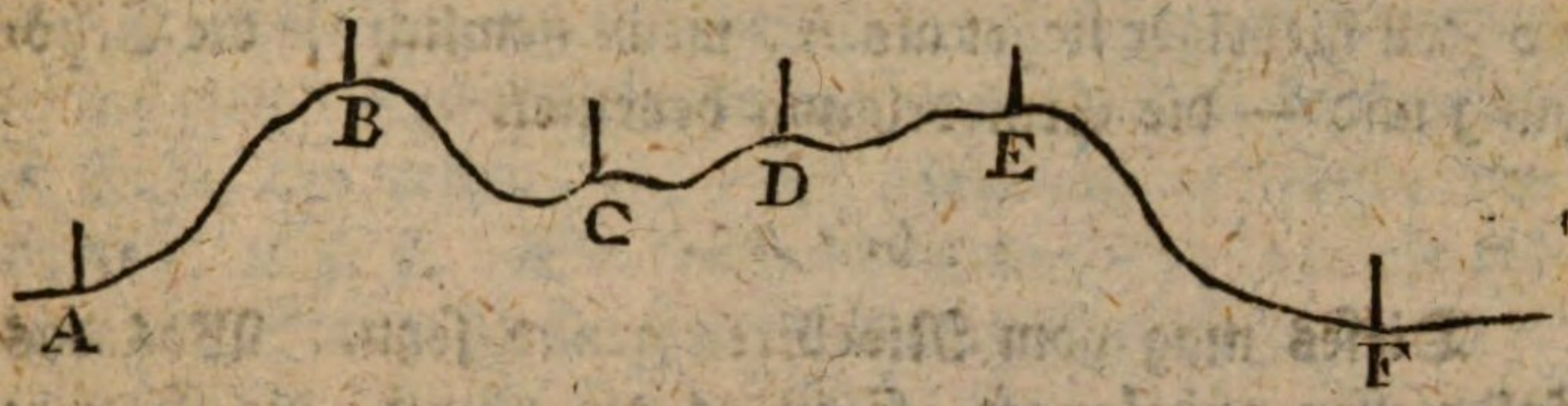
Es muß also, wenn man genau verfahren will, die Länge BE erst von der Höhe CE des Zieles E abgezogen werden, bevor man die Vergleichung beyder Oerter anstellet. Man findet nach einer genauen Berechnung, daß der Unterschied BE in Einer Entfernung von 300 französischen (sechsfüßigen) Toisen schon 1 Zoll, und auf 1000 solche Toisen beynahe einen Fuß ausmachet.

§. 22.

§. 22.

Aufgabe.

Den Unterschied der Höhe zweyer Oerter finden, wenn solche Oerter einander nicht sehen können, es sey nun wegen der zu großen Entfernung, oder wegen der zwischenliegenden Anhöhen.



Auflösung. Theile den Weg zwischen beyden Oertern A und F in verschiedene Theile, als AB, BC, CD, DE, EF Suche, indem du aus A nach F gehest, um wie viel jeder folgende Standpunkt höher oder niedriger ist als der vorige (§. 19). Zeichne die gefundene Zahlen auf, mit den Zeichen + und — um höher und niedriger anzudeuten. Nemlich, wenn man annimmt, daß + höher bedeutet, so ist — so viel als niedriger, bedeutet aber + niedriger, so muß — höher bedeuten.

Mache die Summe der positiven und auch die negativen Zahlen, ziehe die kleinere Summe von der größeren ab, und gieb dem Reste das Zeichen der größeren Summe. So bekömmst du den Unterschied der Höhe beyder Oerter A und F. Und das Zeichen giebt zu erkennen, ob F höher oder niedriger lieget als A.

Gesetzt, man finde

Von A bis B, + 1 Fuß
Von B bis C, — $1\frac{5}{12}$ Fuß.
Von C bis D, + $1\frac{4}{12}$ Fuß.
Von D bis E, + $\frac{3}{12}$ Fuß.
Von E bis F, — 2 Fuß.

$+ 1$	$- 1\frac{5}{12}$
$+ 1\frac{4}{12}$	$- 2$
$+ \frac{3}{12}$	$- 3\frac{5}{12}$
$+ 2\frac{7}{12}$	$+ 2\frac{7}{12}$
	$- \frac{10}{12}$

Diese $-\frac{10}{12}$ zeigen an, daß der Ort F um $\frac{10}{12}$ Fuß oder 10 Zoll niedriger lieget als A, wenn nemlich + die Erhöhung und — die Erniedrigung bedeutet.

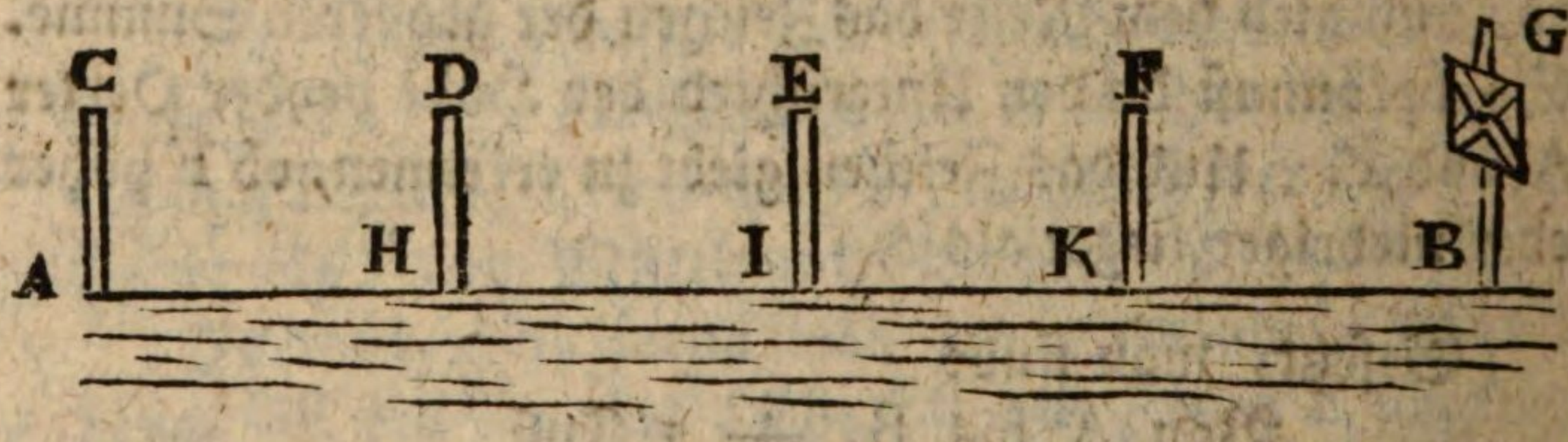
§. 23.

Dieses mag vom Nivelliren genug seyn. Was das Feldmessen anbelanget, so ist es die Kunst, die Entfernung der Oerter auf der Erdfläche zu bestimmen, und ihre Lage in einem Plane oder Riße vorzustellen. Hiervon wollen wir auch einen Begriff geben.

§. 24.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Oerter auf dem Felde messen, wenn man von dem einen zum anderen kommen kann, auch der eine Ort den anderen sehen kann.



Auflösung. Es seyen die beyden Oerter A und B. Stecke bey A einen Pfahl AC in die Erde, und ebenfalls den Pfahl BG in B. Wenn dieser letzte eine Zielscheibe hat, so ist er desto sichtbarer.

Stelle

Stelle das Auge in C, und indem du nach G hinsiehest, so laß in der Richtung der Gesichtslinie einige Pfähle zwischen C und G einschlagen, als in D, E und F.

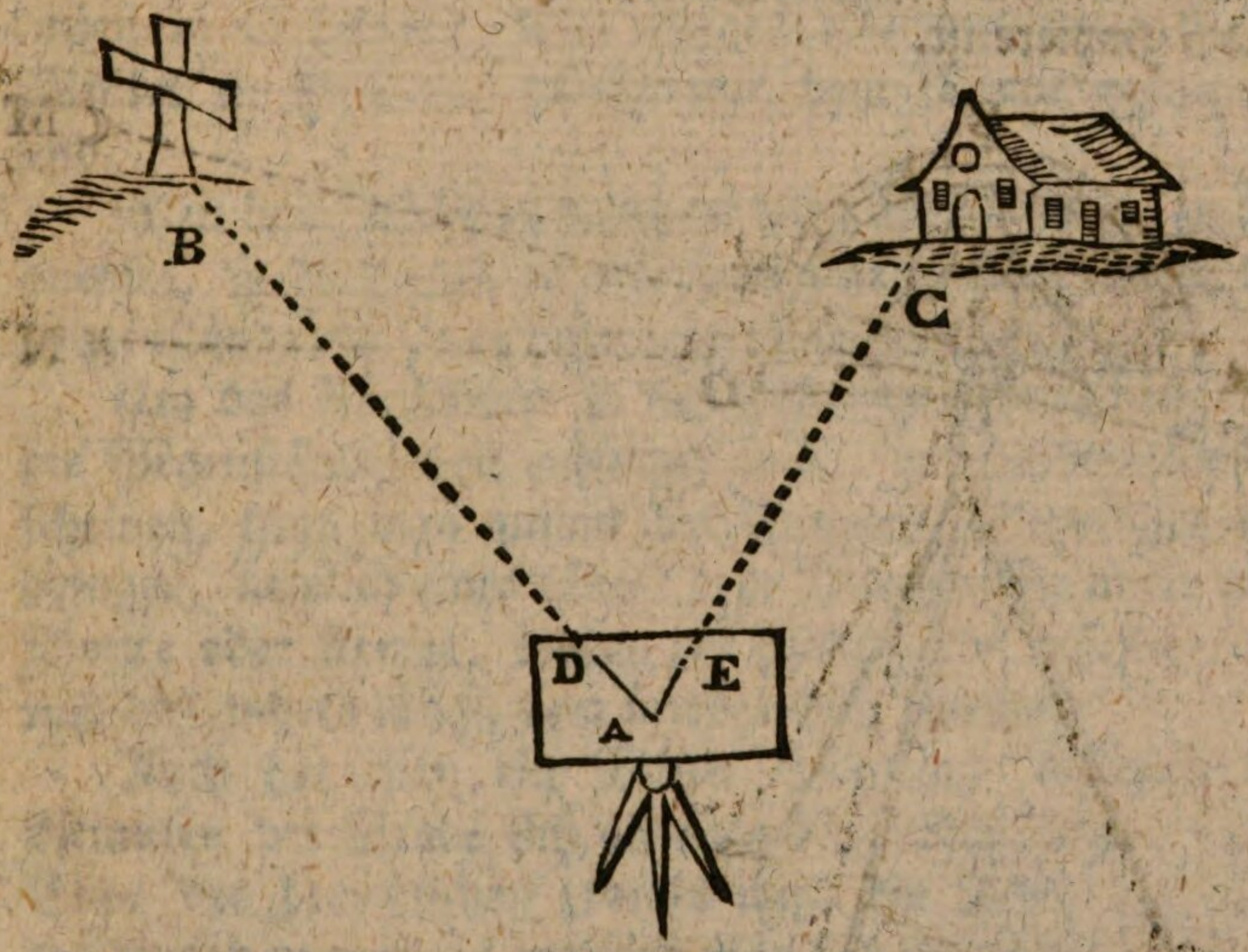
Miß mit einer Meßkette, die in Ruthen und Füße eingetheilet ist, die Entfernungen AH, HI, IK, und KB, und addire sie zusammen.

Oder gebrauche zwey Stangen von bestimmter Länge, z. E. jede eine Ruthe oder eine halbe Ruthe lang. Laß sie wechselsweise in der Richtung der Pfähle auf der Linie AB anlegen, nemlich die erste von A nach H zu, die zweyte am Ende der ersten, die erste wiederum am Ende der zweyten, u. s. f. So wird sich ausweisen, wie oft die Länge der Stange in der Linie AB enthalten ist.

§. 25.

Aufgabe.

Den Winkel bestimmen, welchen die Gesichtslinien bilden, welche aus einem gegebenen Punkte auf dem Felde nach zwey Gegenstände hinzielen.



Auflösung. Es sey BAC der Winkel, unter welchem die Gegenstände B und C aus dem Orte A gesehen werden.

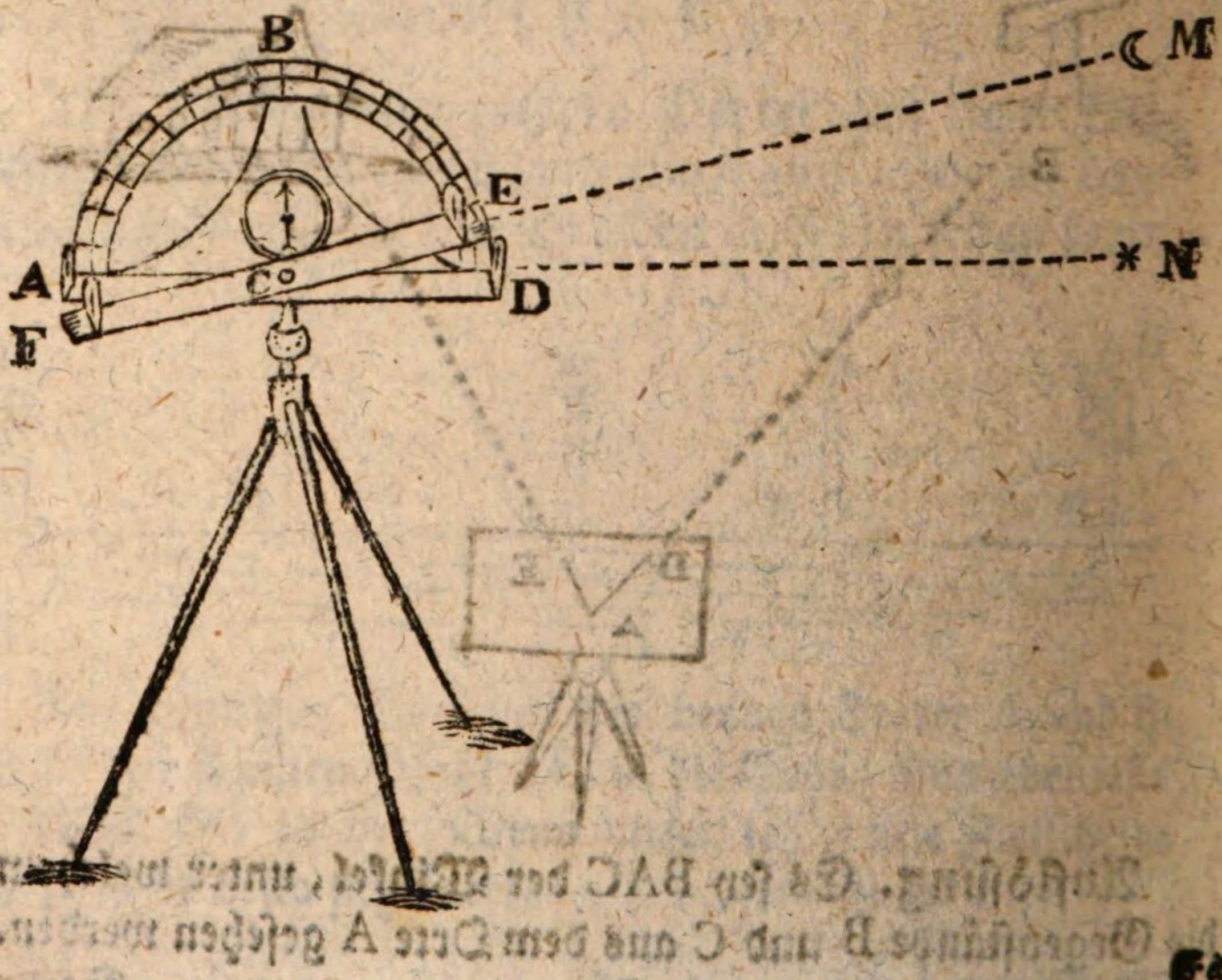
Stelle in A einen Meßtisch oder Mensel auf, das ist, ein ebenes Brett, was auf einem dreyspitzigen Fuße stehet, und vermittelst einer Nuß auf dem Fuße hin und her, schief oder gerade gerichtet werden kann.

Befestige auf dem Meßtische ein glattes Papier, und merke den Punkt A mit einer Nadel. Stelle den Tisch, vermittelst eines Bleyloths oder einer Wasserwage, horizontal.

Lege an den Punkt A ein Lineal mit Dioptern oder mit einem Perspektiv (§. 15). Ziele nach B und ziehe längst dem Lineale die Linie AD von unbestimmter Länge. Ziele ebenfalls nach C und zeichne auf dem Papiere die Linie AE, so ist DAE (= BAC) der verlangte Winkel.

Will man den Winkel in Graden haben, so kann man die Grade desselben vermittelst der Theilscheibe (VI. §. 42) finden.

Eine andere Art. Man verschaffe sich ein Astrolabium oder Graphometer. Dieses Instrument ist nichts anders auf dem Felde als was die Theilscheibe auf dem Papiere ist.



Es bestehet hauptsächlich aus einem Rande in Gestalt eines halben Zirkels ABD, der in 180 Grade, auch wohl in halbe Grade und Viertelgrade eingetheilet ist. An beyden Enden des Durchmessers, nemlich in A und in D sind Dioptern befestiget, mit welchen man den Durchmesser nach jeden Gegenstand, als nach N, in einer geraden Linie richten kann.

Der zirkelförmige Rand ist an einem Brette oder halben Kreuze befestiget, worauf man noch eine Magnetnadel siehet, die aber hier nicht in Betrachtung kömmt.

Um den Mittelpunkt C des halben Zirkels beweget sich ein Lineal FE mit Dioptern, womit man ebenfalls nach jeden Gegenstand, als nach M, zielen kann.

Das ganze Instrument stehet auf einem Fuße, worauf es sich nach allen möglichen Richtungen stellen läßt. In der Figur ist es vertikal vorgestellet.

Ist nun das Instrument aufgestellet, und man richtet den Durchmesser nach N und das Lineal nach M, so hat man den Winkel MCN oder ECD, den beyde Gesichtslinien in C bilden. Der Bogen ED bestimmet diesen Winkel in Graden, welche auf dem Rande gezeichnet sind.

Weil das Instrument sich zu allen möglichen Lagen bequemet, so darf man es nur horizontal stellen, wenn die Gegenstände auf einer horizontalen Ebne liegen.

Um das Astolabium in den Fällen zu gebrauchen, wo die Gegenstände weit entfernet sind, und undeutlich erscheinen, kann man anstatt der Dioptern Seheröhre anbringen, nemlich eines längst dem Durchmesser unter dem Brette oder Kreuze, woran der halbe Zirkel befestiget ist, und das andere längst dem beweglichen Lineale.

Auch hat man ein Mittel ersonnen, wodurch die Minuten der Grade sich genauer bestimmen lassen. Am Ende des beweglichen Lineals wird ein Rand mit Eintheilungen gemachet, welchen man den Nonius nennet.

Gesetzt, es sey der Rand des Astrolabiums in halbe Grade getheilet, und man will die Winkel bis auf 2 Minuten, das ist bis auf den 30sten Theil eines Grades, oder den 15ten Theil eines halben Grades ausmessen.

Man merke erstlich am Ende des beweglichen Lineals genau die Gesichtslinie, das ist diejenige Linie, welche durch den Mittelpunkt des Instruments gehet, und gerade unter den Punkten lieget, wo die Fäden der Dioptern einander kreuzen.

Bey dieser Linie schreibe man o. Auch kann an dieser Stelle eine kleine Spitze befestiget werden, welche die Grade auf der Theilscheibe zeiget.

Vom Punkte o trage man auf dem Rande des Lineals die Weite von 14 Abtheilungen der Theilscheibe, und diese Weite theile man in 15 gleiche Theile, so ist jeder Theil $= \frac{14}{15}$ eines halben Grades, das ist 28 Minuten, da hingegen die Theilscheibe von 30 zu 30 Minuten eingetheilet ist. Also ist der Unterschied 2 Minuten.

Diese Abtheilung des Randes am Lineale kann doppelt angebracht werden, nemlich an beyden Seiten des Punktes o. Ein so abgetheilter Rand wird, wie gesaget, ein Nonius genannt. Der Gebrauch desselben ist folgender.

Gesetzt der Punkt o des Lineales trift nicht genau auf eine Abtheilung der Theilscheibe, so merke man sich den nächst kleineren Winkel den das Lineal zeiget. Man lasse das Lineal in seiner Lage, gehe auf dem Nonius weiter, als wenn man einen größern Winkel suchte, und merke die Abtheilung des Nonius die mit irgend einer Abtheilung der Theilscheibe am nächsten übereintrift. Ist es die *n*te Abtheilung des Nonius, so müssen zum nächst kleineren Winkel *n* mal 2 Minuten zugerechnet werden (wenn nemlich der Nonius auf zwey Minuien eingerichtet ist).

Oder man nehme den nächst größeren Winkel, und gehe auf dem Nonius rückwärts, als wenn man einen kleineren Winkel suchte, bis man eine Abtheilung des Nonius gefunden hat die mit einer Abtheilung der Theilscheibe nächstens

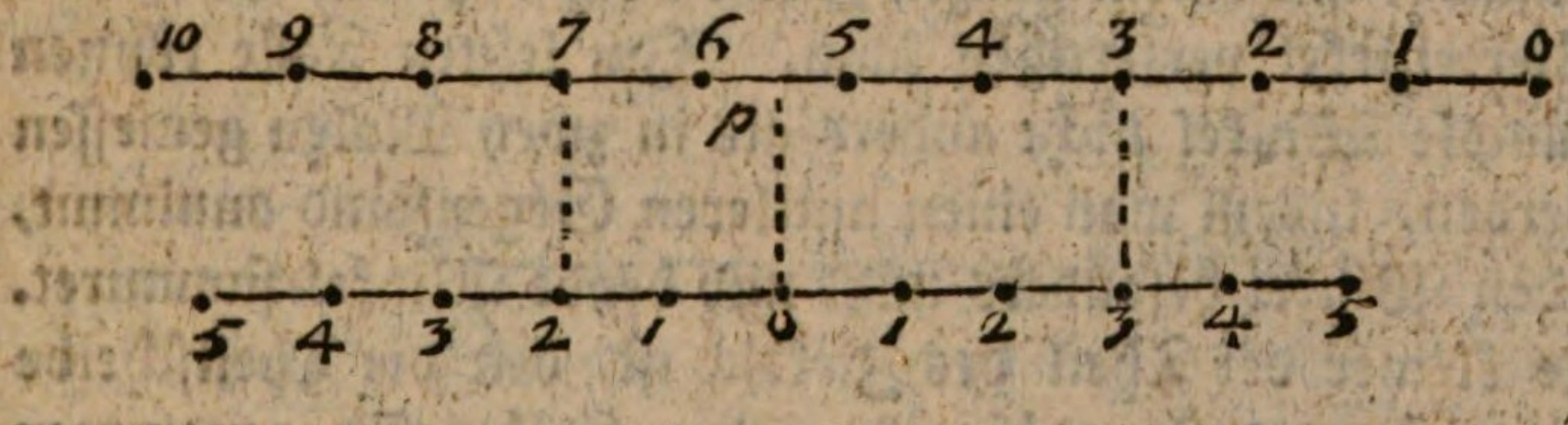
stens zusammen trift. So viel Abtheilungen des Nonius man zurück gezählet hat, so vielmal 2 Minuten subtrahire man von dem nächst größeren Winkel.

Gesetzt man findet, daß der gemessene Winkel zwischen 40 Grad und 40½ Grad fällt. Gesetzt man gehet vorwärts auf dem Nonius und findet, daß die 6te Abtheilung desselben (den Strich 0 nicht mit gerechnet) auf einen Strich der Theilscheibe, als auf 43 Grad, fällt, so müssen noch 6mal 2 Minuten, das ist 12 Minuten zum nächst kleineren Winkel, das ist zu 40 Grad addiret werden. Also bekömmt man 14^g 12′.

Oder anstatt vorwärts zu gehen, gehe man rückwärts. Gesetzt man finde, daß die 9te Abtheilung des Nonius auf einen Strich der Theilscheibe fällt, so müssen 9mal 2 Grade, das ist 18 Grade von dem nächst größeren Winkel abgezogen werden, und man hat also 40^g 30′ — 18′, das ist 40^g 12′.

Um dieses deutlicher zu machen, so wollen wir anstatt der Zirkelbogen gerade Linien annehmen.

Es sey die Linie 0 .... 10 in einige gleiche Theile eingetheilet, z. E. in 10 Theile. Eine andere Linie 5...5, sey so eingetheilet, daß 5 Theile derselben so viel machen als 4 Theile der ersten. Gesetzt nun die letzte Linie wird gegen die erste gehalten, und es stehet der Punkt 0 dem Punkte *p* gegenüber.



Es treffe sich ferner, daß linker Hand der zweyte Punkt der unteren Linie auf einen Punkt der obern falle, so ist der untere Theil 2 . . 1 um $\frac{1}{5}$ kleiner als der obere 7 . . . 6,

eben

eben so ist der untere Theil 1 . . 0 um $\frac{1}{5}$ kleiner als der obere 6 . . 5. Also ist 2 . . 0 um $\frac{2}{5}$ kleiner als 7 . . 5, oder 7 . . 5 ist um $\frac{2}{5}$ (wenn die oberen Theile Einheiten sind) größer als 2 . . 0. Da nun $7 . . p = 2 . . 0$, so muß $p . . 5$ die übrigen $\frac{2}{5}$ betragen. Folglich sind in der oberen Linie von o bis p, $5\frac{2}{5}$ Einheiten, oder gleiche Theile.

Oder es treffe sich rechter Hand das die dritte Abtheilung der Linie 5 . . 5, vom Punkte o gerechnet, auf eine Abtheilung der obern Linie 0 . . 10 falle, z. E. auf den Punkt 3 derselben. So ist oben 3 . . 4 um seinen fünften Theil größer als unten 3 . . 2, ferner ist oben 4 . . 5 um $\frac{1}{5}$ größer als unten 2 . . 1, endlich ist oben 5 . . 6 um $\frac{1}{5}$ größer als unten 1 . . 0. Also ist oben 3 . . . 6 um $\frac{3}{5}$ größer als unten rechter Hand 0 . . 3, da nun oben $3 . . p =$ unten $3 . . 0$, so ist $p . . 6 = \frac{3}{5}$, und es ist oben $0 . . p = (0 . . 6) - (6 . . p) = 6 - \frac{3}{5} = 5\frac{2}{5}$.

Anstatt der geraden Linien 0 . . 10, und 5 : : 5 nehme man Zirkelbogen an; anstatt daß aus 4 Theilen 5 gemacht worden, mache man 15 Theile aus 14; so läßt sich der nemliche Beweis anwenden. Sind nun die oberen Theile halbe Grade, oder Theile von 30 Minuten, so erhält man durch den Unterschied der obern und untern Abtheilungen Funfzehntheile von halben Graden oder Theile von 2 Minuten.

Wir merken zuletzt noch an, daß man anstatt des Astrolabiums mit einem halben Zirkel, auch ein ähnliches Instrument mit einem ganzen Zirkel auch wohl nur mit einem Viertelzirkel verfertigen kann. Im letzten Falle können stumpfe Winkel nicht anders als in zwey Malen gemessen werden, indem man einen mittleren Gegenstand annimmt, jeden Winkel besonders mißt und beyde Winkel summiret. Je kleiner der Theil des Zirkels ist, den die Theilscheibe ausmacht, desto größer kann der Halbmesser genommen werden, und desto genauer werden die Abtheilungen der Grade. Deswegen bedienen sich die Astronomen nicht nur des Quadranten oder Viertelzirkels, sondern auch des

Sechs-

Sextanten von 60 Graden, und des Oktanten von 45 Graden. Auf dem Felde ist der Halbzirkel am gebräuchlichsten und am bequemsten.

§. 26.

Aufgabe.

Es sind zwey Oerter A und B gegeben, deren Entfernung man wissen will. Man kann zwar nicht von dem einem gerades Weges zum andern kommen, aber aus einem dritten Orte C kann man sowohl nach A als nach *B* kommen, und beyde Oerter sehen.

Auflösung. Am Orte C woraus A und B sichtbar und zugänglich sind, stecke einen Pfahl ein. Miß BC (§. 24), und verlängere BC bis CD = BC. Diese Verlängerung geschiehet indem man mit der Meßkette von C

nach

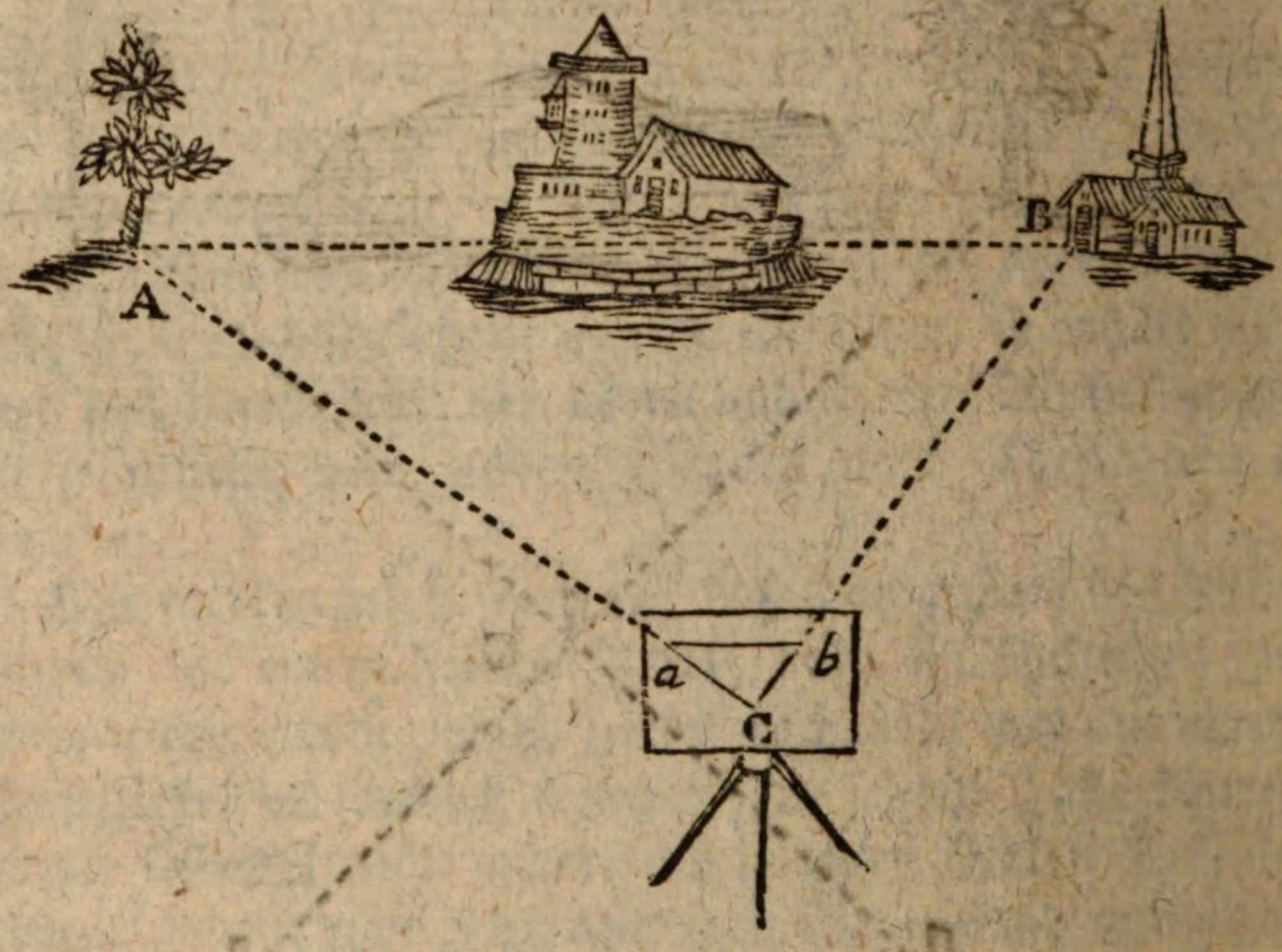
nach D zurücktritt, und allemal beobachtet, daß der Ort B hinter dem Pfahle C gesehen werde.

Eben so miß AC und verlängere AC bis CE = AC. Nun miß DE, so ist diese DE der Entfernung AB gleich.

Denn die Dreyecke ACB und ECD sind ähnlichgleich, wegen der Vertikalwinkel in C und wegen der Gleichheit der Seiten CE und AC, CD und CB. Also ist DE = AB.

Hätte man nicht Raum genug auf dem Felde, so könnte man nehmen CD = $\frac{1}{2}$ CB und CE = $\frac{1}{2}$ AC alsdann würde, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke, DE = $\frac{1}{2}$ AB. Auch könnte man $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ der Entfernungen nehmen.

Anders. Setze einen Meßtisch in C. Auf demselben beschreibe den Winkel ACB, vermittelst des Lineals mit Dioptern (§. 25).



Miß die Linien BC und CA auf dem Felde; und so viel Fuß oder Ruthen sie haben, so viel Fuß oder Ruthen nach einem verkleinerten oder verjüngten Maaßstabe gieb den Linien C*b*, C*a* auf der Mensel.

Ziehe *ab*, und suche, wie viel Fuß oder Ruthen dieselbe auf dem nemlichen Maaßstabe ausmacher, so hast du die Entfernung AB.

Denn

Denn in den Dreyecken ACB, *a*C*b* ist der Winkel C gemein, und die Seiten AC, BC, sind mit *a*C, *b*C proporzionirt.

Es verhalte sich eine wirkliche Ruthe zu einer verjüngten wie 100 zu 1, so verhält sich AC, *a*C :: BC, *b*C :: 100, 1. Folglich auch AB, *ab* :: 100, 1. Hat man also *ab* in verjüngten Ruthen, so hat man eben dadurch AB in natürlichen Ruthen.

Anders. Miß mit der Kette die Entfernungen AC und BC. Miß auch mit dem Astrolabium (§. 25) den Winkel ACB. Mache auf einem Papiere einen Winkel C so groß als den auf dem Felde gemessenen. Von beyden Schenkeln schneide ab C*a*, C*b*, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so groß seyn müssen, als CA und CB auf dem Felde gefunden worden. Ziehe *ab*, und miß sie auf dem verjüngten Maaßstabe, so hast du wie vorher die Entfernung AB. Der Beweis ist wiederum der nemliche.

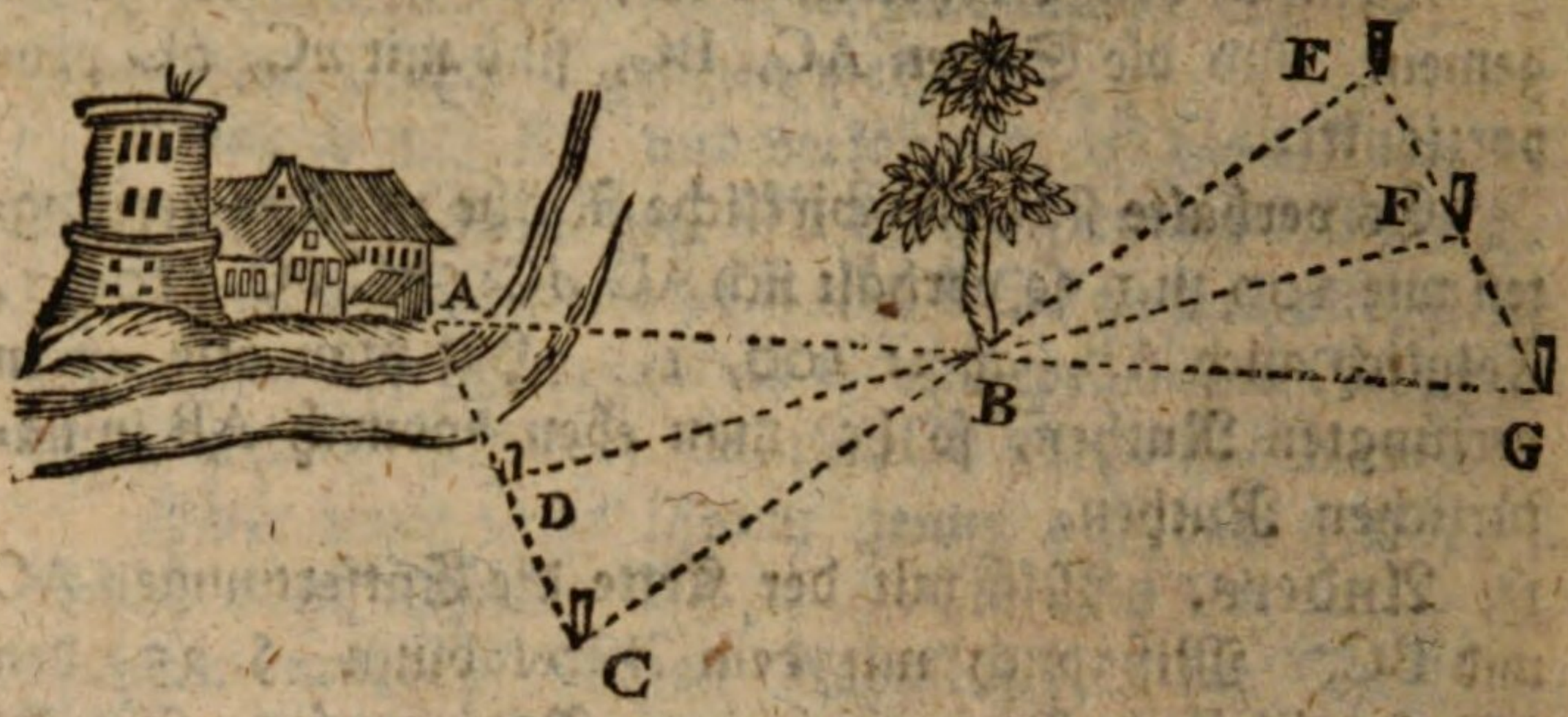
Anders. Miß mit der Meßkette die Seiten AC und BC, und mit dem Astrolabium den Winkel ACB. Da nun im Dreyecke ACB zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, so läßt sich, vermittelst trigonometrischer Rechnungen, die Seite AB bestimmen (XII. §. 14).

§. 27.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Oerter finden, wenn man aus einem dritten Orte zwar zu dem einen, aber nicht zu dem andern kommen kann.

(Siehe die folgende Figur.)



Auflösung. Es soll gemessen werden die Entfernung AB. Man erwähle nach Belieben den Ort C, von wo man ungehindert nach B sehen und gehen kann. Man stehe hinter C, und lasse in D einen Pfahl setzen, so daß die Linie CD nach A hinziele.

Man messe BC und BD. Man verlängere diese Linien bis BE = BC und BF = BD.

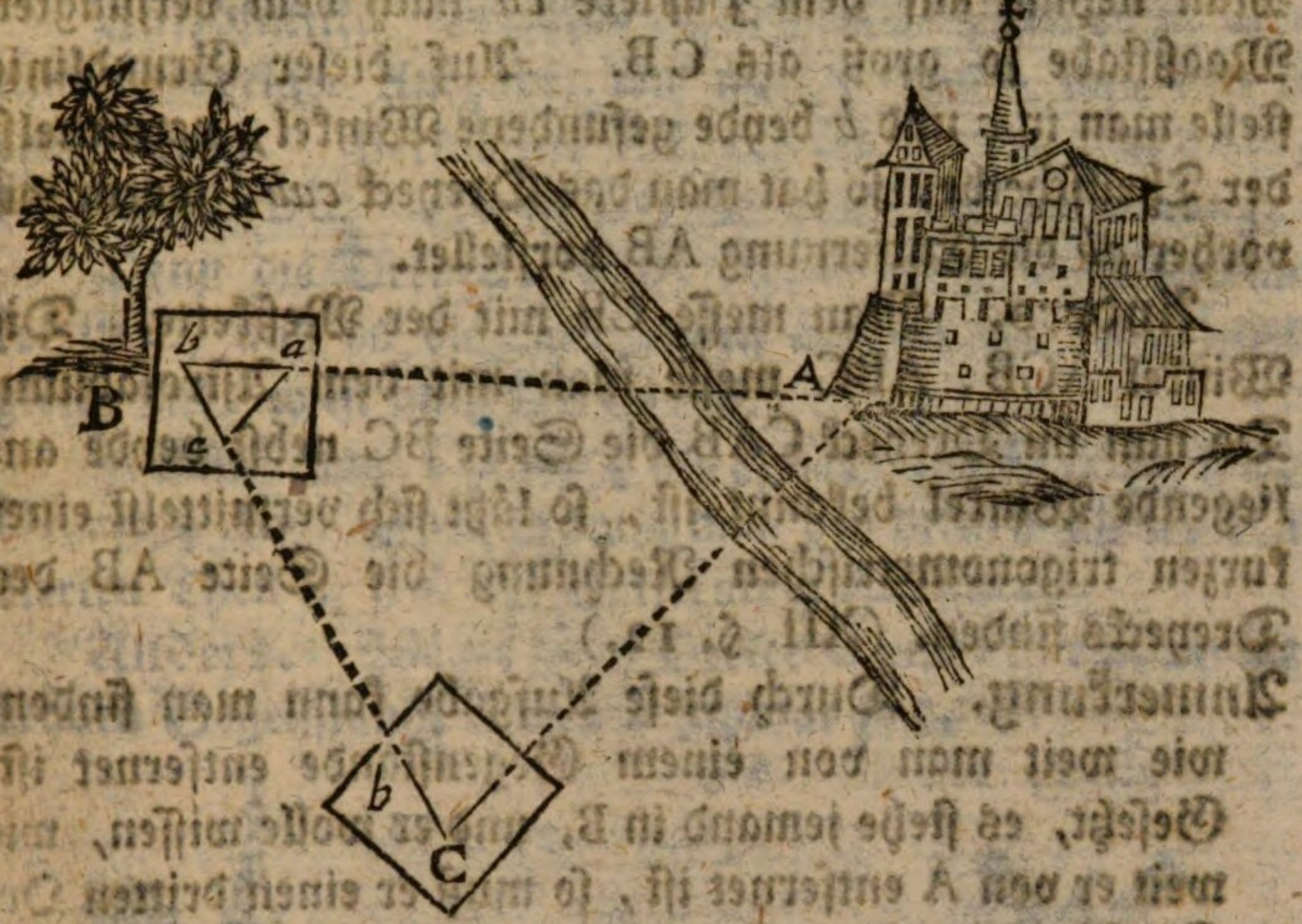
Man gehe in der Richtung EF von F nach G, bis man aus G den Gegenstand A hinter B siehet, so ist BG = BA, und man darf nur BG messen.

Denn die Dreyecke DBC, FBE sind ähnlichgleich wie leicht einzusehen ist. Also ist ∠BEG = ∠BCA.

In den Dreyecken BEG und BCA ist demnach ∠BEG = ∠BCA. Auch ist ∠EBG = ∠CBA (als Scheitelwinkel). Ferner ist BE = BC.

Folglich ist △BEG ≅ △BCA und BG = BA. Hätte man genommen BE = $\frac{1}{2}$BC, BF = $\frac{1}{2}$BD, so hätte man bekommen BG = $\frac{1}{2}$BA.

Anders. Stellet den Meßtisch in C, und zeichnet darauf einen Winkel, wovon ein Schenkel nach A zielet und der andere nach einen Punkt neben dem Gegenstande B.



Messet die Linie CB, oder eigentlich von C bis zum Punkte neben B, wo ihr hingezielet habet: nehmet diese Linie auf dem verjüngten Maaßstabe, und traget sie vom Scheitel C oder *c* des Winkels, auf dem Meßtische, nach *b*.

Bringet den Meßtisch nach B, und setzet ihn so, daß der Punkt *b* an dem Orte sey, wo ihr hingezielet habet, und daß die Linie *bc* gerade nach den Punkt C hinziele.

In *b* machet vermittelst des Lineals mit Dioptern den Winkel *cba*=C*b*A, so entstehet auf dem Meßtische ein Dreyeck *cab*, welches mit CAB ähnlich ist, weil ∠ *c* = ∠ C, ∠ *b* = ∠ B. Also ist *bc*, *ab* :: BC, AB. Da nun *bc* die Entfernung BC vorstellet, so wird *ab* nach demselbigen Maaßstabe die Entfernung AB vorstellen.

Nur merke man, daß man zur gefundenen Entfernung, welche eigentlich A*b* ist, noch die kleine Entfernung *b*B zusetzen muß, wenn man nemlich den Punkt *b*, wo der Meßtisch aufgestellet worden, so gewählet hat, daß er mit beyden Gegenständen B und A in einer geraden Linie lieget.

Anders. Man messe die Entfernung CB mit der Kette, und die Winkel BCA, CBA mit dem Astrolabium.

Man nehme auf dem Papiere *cb* nach dem verjüngten Maaßstabe so groß als CB. Auf dieser Grundlinie stelle man in *c* und *b* beyde gefundene Winkel, vermittelst der Theilscheibe, so hat man das Dreyeck *cab*, worin wie vorher *ab* die Entfernung AB vorstellet.

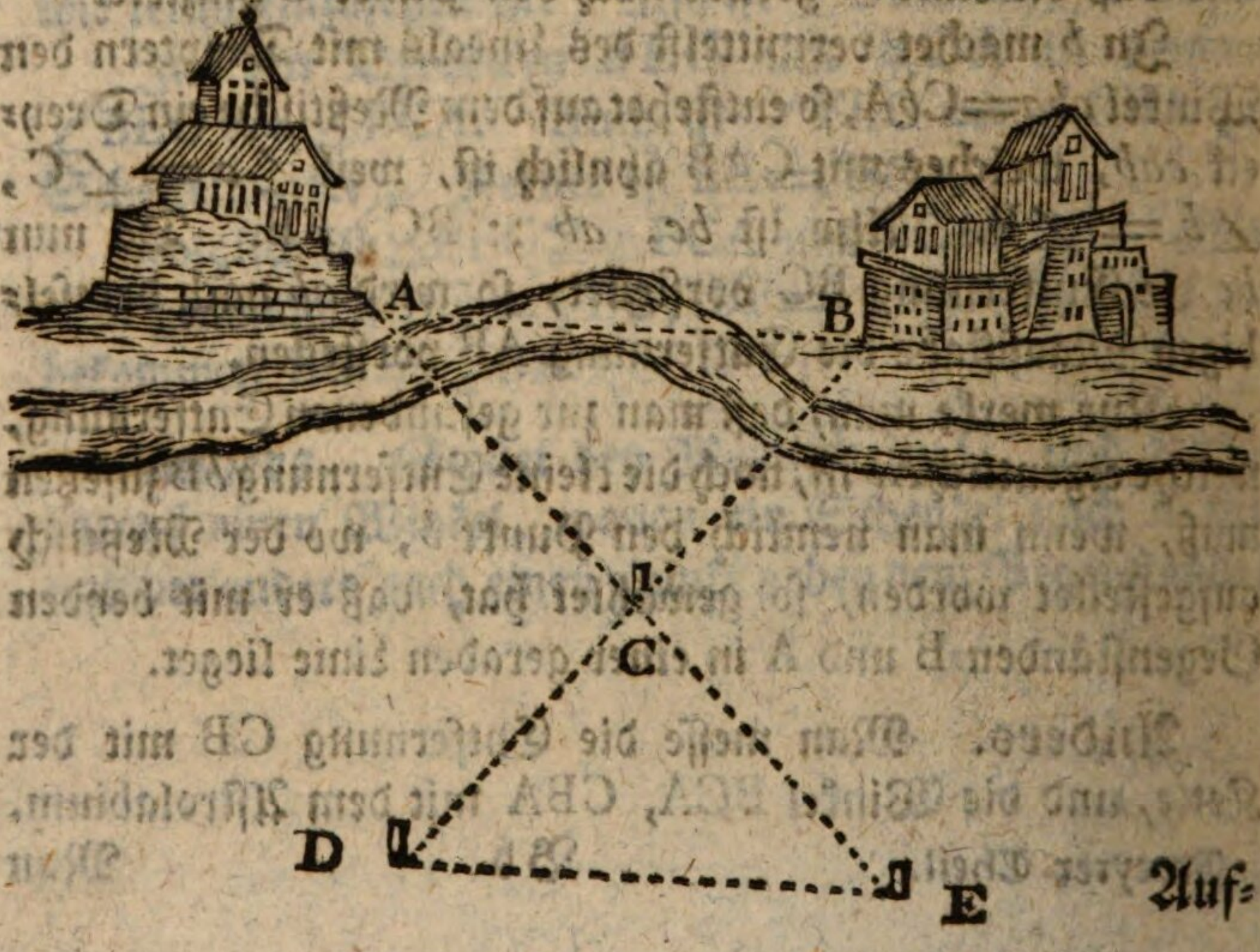
Anders. Man messe CB mit der Meßkette. Die Winkel ACB, ABC messe man mit dem Astrolabium. Da nun im Dreyeck CAB die Seite BC nebst beyde anliegende Winkel bekannt ist, so läßt sich vermittelst einer kurzen trigonometrischen Rechnung die Seite AB des Dreyecks finden. (XII. §. 12.)

Anmerkung. Durch diese Aufgabe kann man finden, wie weit man von einem Gegenstande entfernet ist. Gesetzt, es stehe jemand in B, und er wolle wissen, wie weit er von A entfernet ist, so muß er einen dritten Ort C wählen, und die Entfernung BA auf vorgeschriebene Weise ausmessen.

§. 28.

Aufgabe.

Die Entfernung zweyer Oerter messen, die von einem dritten Orte C beyde unzugänglich, aber doch sichtbar sind.



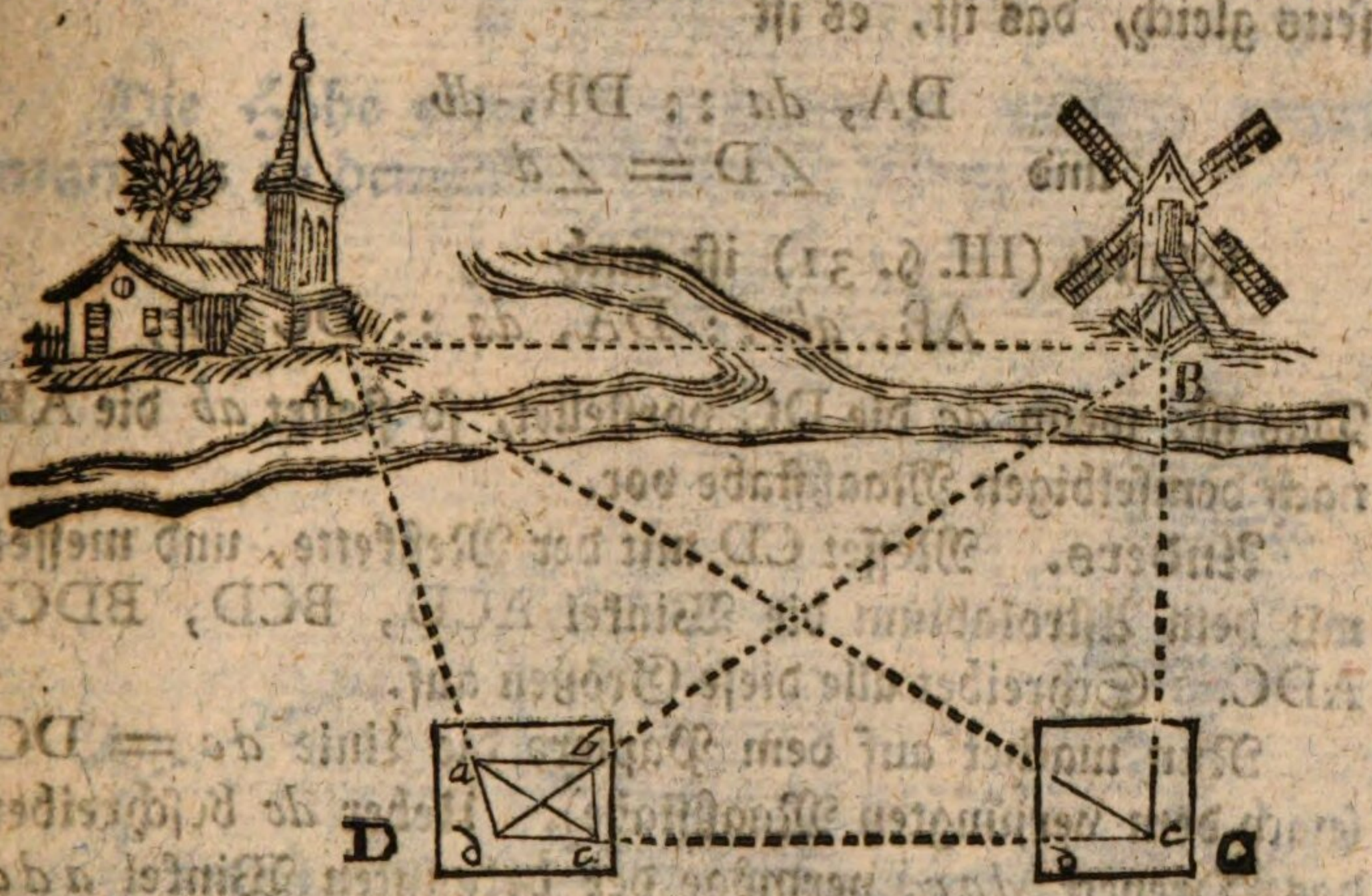
Auf-

Auflösung. Erwähle einen Punkt C, und suche vermittelst voriger Aufgabe, wie weit C von A und von B entfernet ist. Verlängere AC, bis CE = AC, und BC, bis CD = BC. So ist DE die verlangte Entfernung.

Denn die Dreyecke ACB, ECD haben Wechselwinkel in C, und da die anliegenden Seiten jede mit jeder gleich sind, so ist auch DE = AB.

Nimmt man CD = $\frac{1}{2}$ BC, CE = $\frac{1}{2}$ AC, so wird DE = $\frac{1}{2}$ AB. Eben so kann man den dritten Theil, den vierten Theil u. s. f. der Entfernung AB finden.

Anders. Wähle zwey Oerter C und D, von wo die beyden Gegenstände A und B sichtbar sind.



Miß die Entfernung CD.

Stelle den Meßtisch in C, und aus einem Punkte *c*, der gerade über dem gewählten Punkte C stehen muß, ziehe gerade Linien in den Richtungen CD, CA, CB.

Mache vermittelst des verjüngten Maaßstabes *cd* = CD (nemlich von gleichviel Ruthen oder Fuß).

Bringe den Meßtisch in D, und stelle ihn so, daß der Punkt *d* über D stehe, und daß *dc* in der Richtung DC liege.

Ziehe aus *d* gerade Linien in den Richtungen DB, DA, so erhältst du beyde Dreyecke *dbc*, *dac*, welche mit den Dreyecken DBC, DAC ähnlich sind.

Ziehe auf dem Meßtische *ab*, so giebt diese auf dem verjüngten Maaßstabe die Entfernung AB.

Denn, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke *dbc*, DBC, ist

DB, *db* :: DC, *dc*

Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke *dac*, DAC ist

DA, *da* :: DC, *dc*

Also sind in den Dreyecken ADB, *adb*, zwey Seiten proporzionirtet, und der eingeschlossene Winkel ist beyderseits gleich, das ist, es ist

DA, *da* :: DB, *db*

und $\angle D = \angle d$

folglich (III. §. 31) ist auch

AB, *ab* :: DA, *da* :: DC, *dc*,

Das ist, wenn *dc* die DC vorstellet, so stellet *ab* die AB nach demselbigen Maaßstabe vor.

Anders. Messet CD mit der Meßkette, und messet mit dem Astrolabium die Winkel ACD, BCD, BDC, ADC. Schreibet alle diese Größen auf.

Nun machet auf dem Papiere die Linie *dc* = DC (nach dem verjüngten Maaßstabe). Ueber *dc* beschreibet das Dreyeck *dac*, vermöge der bekannten Winkel *adc* (=ADC) und *acd* (=ACD). Beschreibet über der nemlichen Grundlinie *cd* das Dreyeck *dbc*, vermöge der bekannten Winkel *bdc* (=BDC) und *bcd* (=BCD).

Ziehet *ab*, so ist dieses die verlangte Entfernung nach dem verjüngten Maaßstabe.

Der Beweis ist wie vorher.

Anders. Messet, wie in voriger Manier, die vier Winkel und die Standlinie CD.

Da ihr im Dreyecke DBC die Grundlinie und beyde anliegende Winkel kennet, so berechnet die Seite DB.

Da

Da ihr im Dreyecke DAC ebenfalls die Grundlinie und beyde anliegende Winkel kennet, so berechnet die Seite AD.

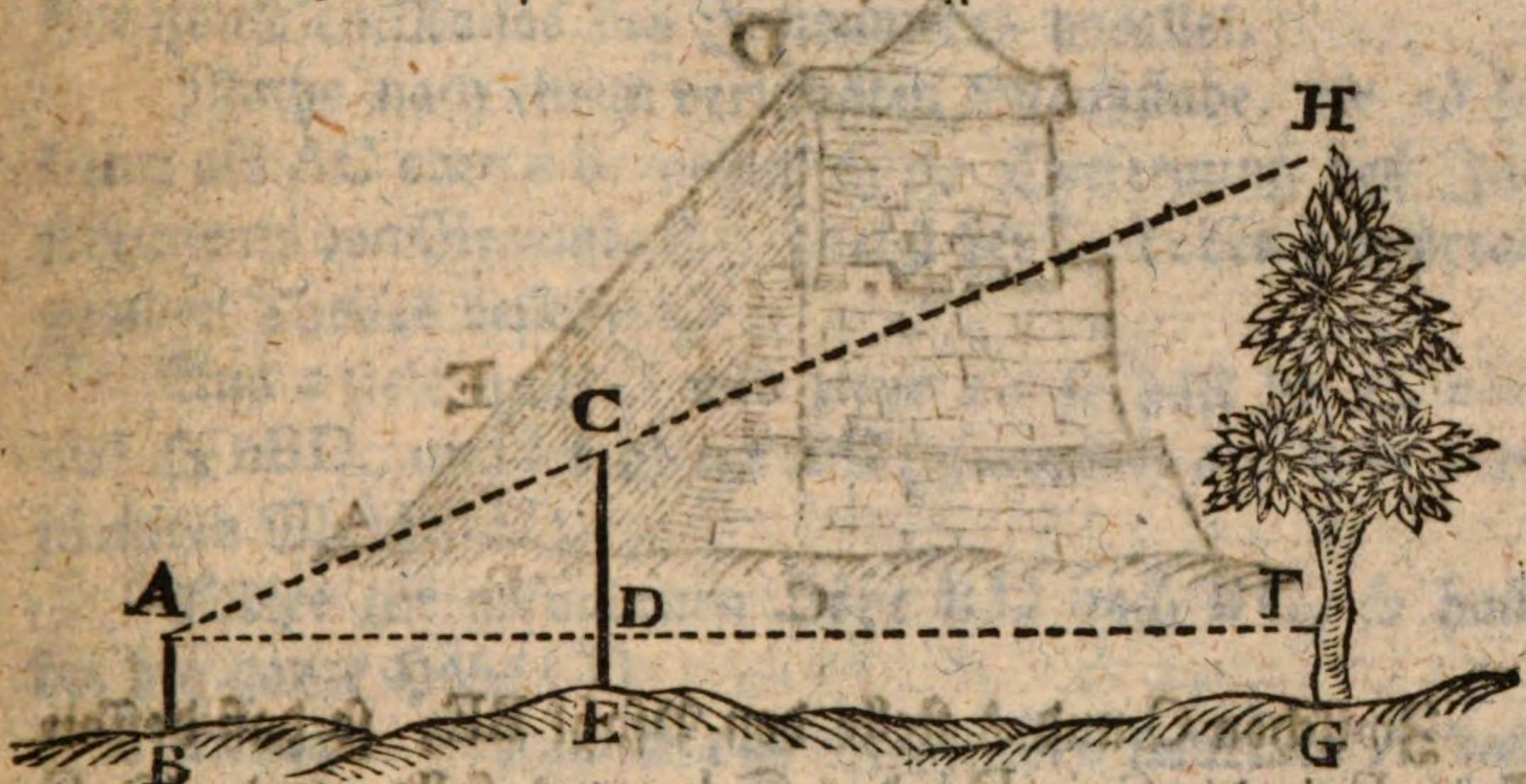
Vom Winkel ADC subtrahiret den Winkel BDC, so bleibet der Winkel ADB.

Da ihr also im Dreyecke ADB, den Winkel in D, nebst den Seiten AD und BD gefunden habet, so könnet ihr die Seite AB berechnen (XII. §. 14), und also findet ihr die verlangte Entfernung.

§. 29.

Aufgabe.

Die Höhe eines Gegenstandes messen, wenn man bis zu demselben kommen kann.



Auflösung. Es sey die Höhe GH auszumessen.

In einiger Entfernung stecke die vertikale Stange CE in die Erde. Tritt weiter zurük und schlage einen kleineren Pfahl BA ein, bis die Enden A und C mit H in einer geraden Linie gesehen werden.

Bezeichne an der Stange EC den Punkt D, so daß A und D in einer geraden horizontalen Linie liegen.

Miß die Entfernung BE (= AD), ferner BG (= AF).

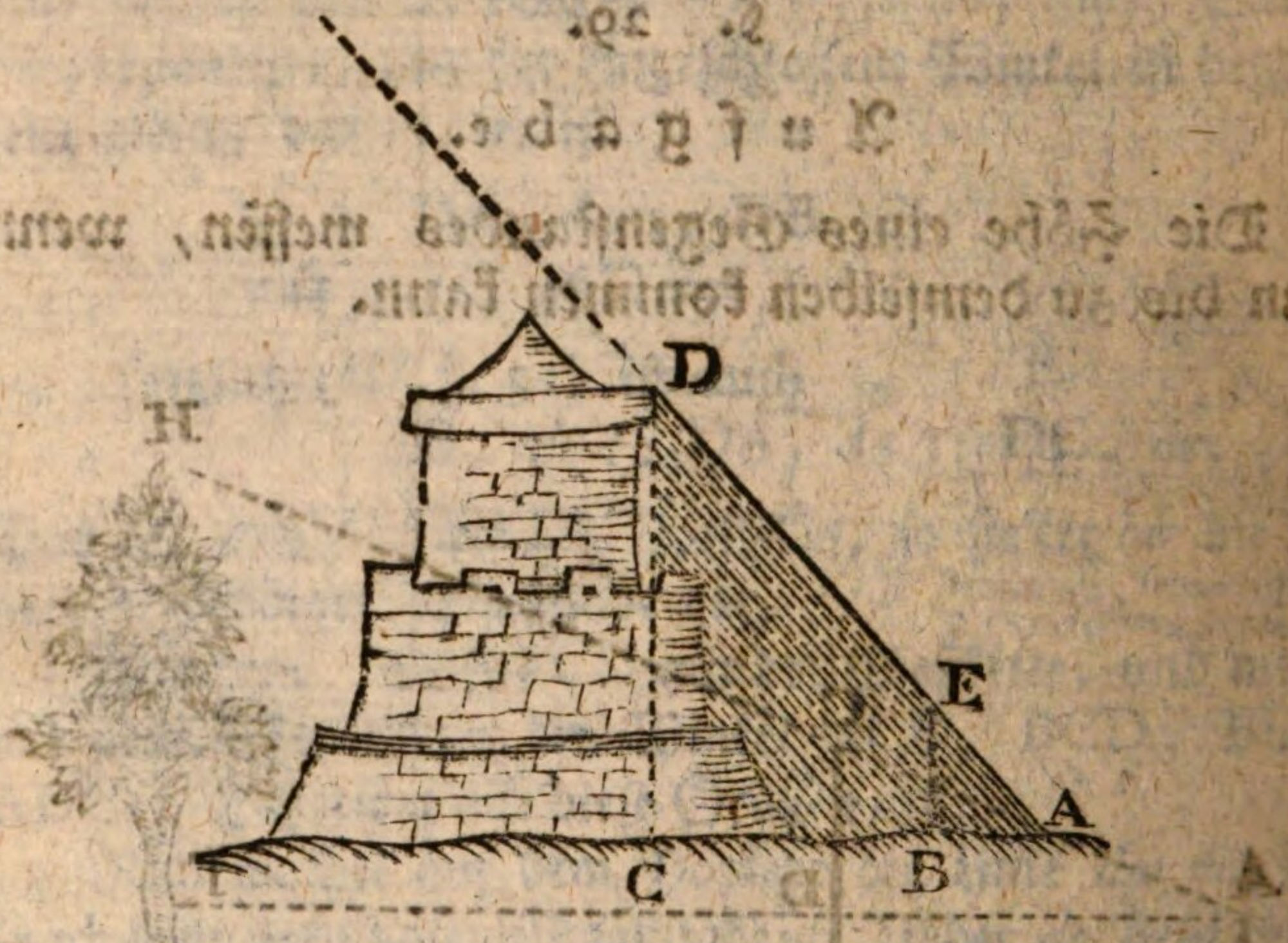
Miß auch DC. Sage, wegen Aehnlichkeit der Dreyecke ADC, AFH,

AD, DC :: AF, FH.

Nachdem FH gefunden worden, so addire dazu FG (=AB).

Die Summe ist die Höhe GH.

Anders. Es sey CD die auszumessende Höhe. Nutze die Zeit, wo die Sonne scheinet, so daß der Schatten CA auf die Ebne falle.



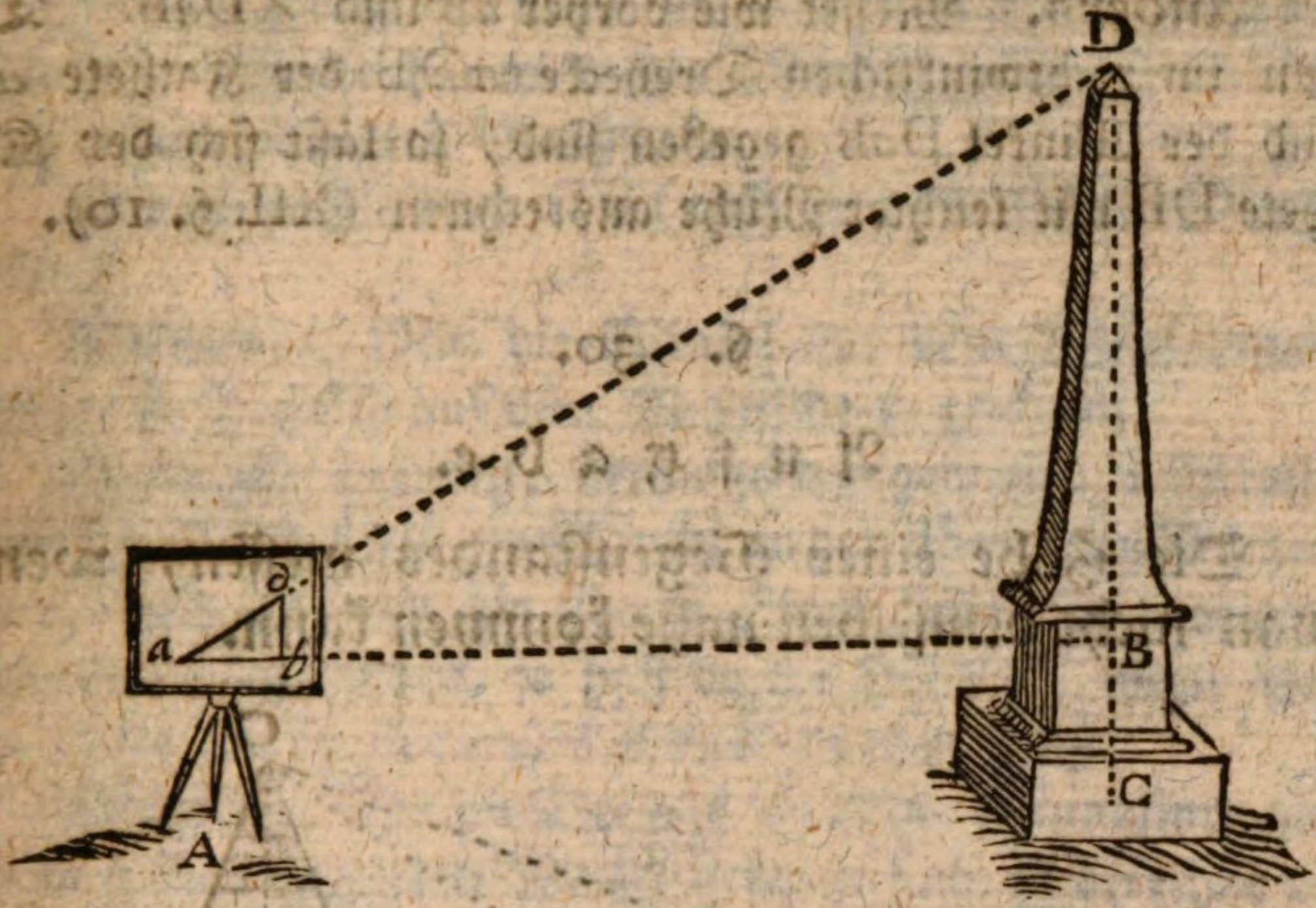
Zwischen C und A stelle den Pfahl BE, so daß dessen Ende E in die Linie DA des Schattens falle, und also E in der Gränze des Schattens und des Lichtes liege.

Miß AB, BE, AC, und sage (wegen Aehnlichkeit der Dreyecke)

AB, BE :: AC, CD.

Anders. Es sey CD auszumessen. Stelle den Meßtisch irgendwo in A, so daß dessen Fläche vertikal stehe.

Ziehet



Ziehe darauf die Linie *ab* horizontal, das ist, mit den horizontalen Rande des Instruments parallel.

Mache nach einem verjüngten Maaßstabe, die *ab* so lang als AC oder *a*B, nehmlich die Entfernung des Instruments von Gegenstande, (nebst der Dicke des hervorragenden Theiles desselben.)

Aus *a* ziele nach D und ziehe *ad* so hast du △ *abd* ∽ △ *a*BD, und *bd* ist = BD, (nemlich auf dem verjüngten Maaßstabe).

Addire zur gefundenen Höhe BD noch BC, so hast du die ganze Höhe CD.

Anders. Anstatt des Meßtisches stellet in A das Astrolabium vertikal auf, messet den Winkel D*a*B und die Linie *a*B, oder AC.

Machet auf dem Papiere *ab* der *a*B nach dem verjüngten Maaßstabe gleich.

Vermittelst des gemessenen Winkels D*a*B, und des rechten Winkels DB*a* (= *dba*) beschreibet das Dreyeck *adb*, so ist *bd* = BD nach dem verjüngten Maaßstabe, und zur gefundenen Höhe muß nur noch BC addiret werden.

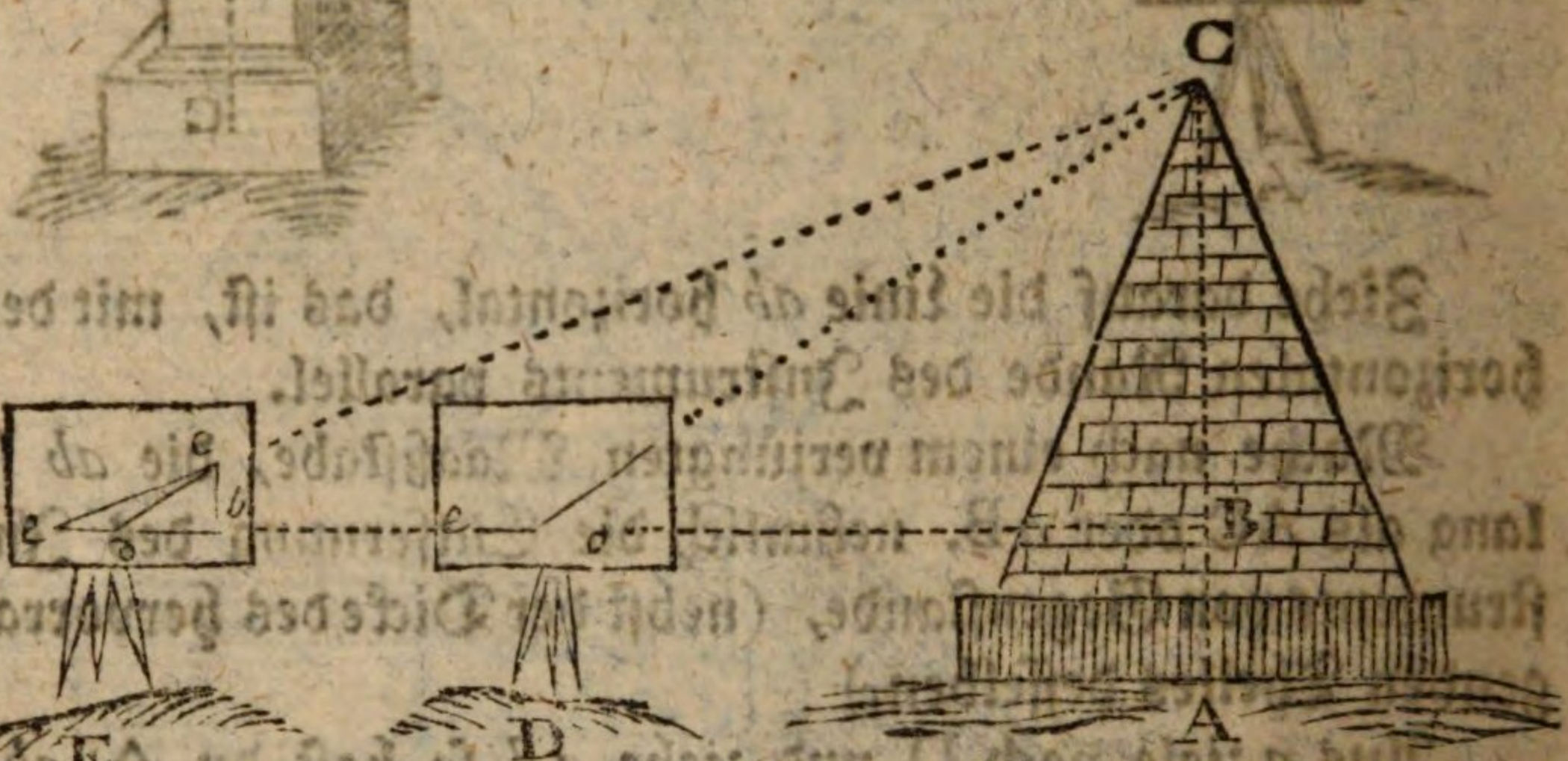
Wenn die Ebne AC recht horizontal lieget, so ist BC der Höhe des Instruments in A gleich.

Anders. Messet wie vorher aB und $\angle DaB$. Da nun im rechtwinklichen Dreyecke aDB der Kathete aB und der Winkel DaB gegeben sind, so läßt sich der Kathete DB mit leichter Mühe ausrechnen (XII. §. 10).

§. 30.

Aufgabe.

Die Höhe eines Gegenstandes messen, wenn man nicht demselben nahe kommen kann.



Auflösung. Wähle zwey Stellen D und E, die auf die Mitte A des Gegenstandes zielen.

Stelle den Meßtisch vertikal in D auf, ziehe die Horizontallinie $de = DE$ (nach dem verjüngten Maaßstabe). Aus d ziele nach C und ziehe eine gerade Linie auf dem Meßtische.

Stelle das Instrument in E, und aus dem Punkte e ziele nach C, ziehe ec. Verlängere ed nach b, und ziehe cb senkrecht auf eb, so stellet cb auf dem verjüngten Maaßstabe die CB vor, wozu noch $BA (= dD = eE)$ addiret werden muß.

Denn es ist auf dem Meßtische $\triangle dce \sim \triangle dCe$, wegen Gleichheit der Winkel an der Grundlinie. Also ist $dc = dC$ (nach dem verjüngten Maaßstabe).

In den Dreyecken CB*d* und *cbd* ist in *d* der nemliche Winkel. Beide haben rechte Winkel, und $dc = dC$ nach dem verjüngten Maaßstabe.

Also ist auch $cb = CB$ (nach dem nemlichen Maaßstabe.)

Anders. Miß die Winkel mit dem Astrolabium, anstatt sie so gleich auf dem Meßtische zu zeichnen.

Beschreibe hernach, vermöge der gemessenen Grundlinie und der gemessenen Winkel an derselben, das Dreyeck *dce*, und zeichnen die übrige Figur wie bey vorigem Verfahren geschehen, so hast du die Höhe *cb*, wozu noch die Höhe des Instruments addiret werden muß.

Anders. Da im Dreyeck *d*C*e* die Grundlinie und die beiden anliegenden Winkel bekannt sind, so berechne die Seite *d*C.

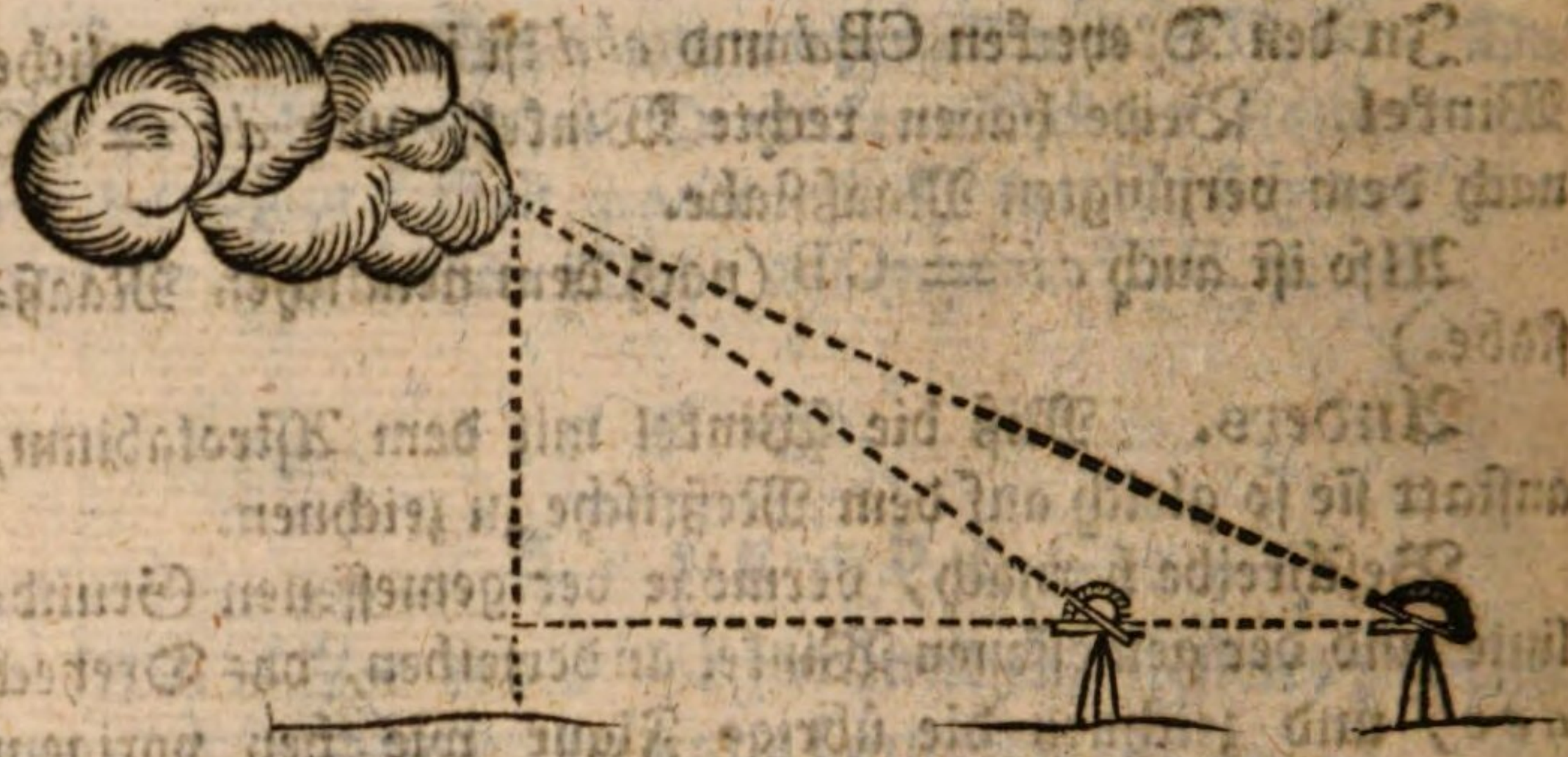
Subtrahire den Winkel *ed*C von 180 Graden, so bleibet der Winkel C*d*B.

Aus der Hypotenuse C*d* und den Winkel C*d*B berechne den Katheten B (XII. §. 9).

Zu CB addire die Höhe des Astrolabiums, so hast du die Höhe CA.

Anmerkung. Auf solche Art ließe sich die Höhe einer Lufterscheinung finden, welche über der Erde stille stünde, als z. E. einer Wolke. Ist aber der schwebende Gegenstand beweglich, so kann man nicht nach und nach das Instrument an einem andern Ort stellen, sondern es müssen zwey Beobachter an verschiedenen Orten zugleich die Winkel messen, woraus sich dann die nemlichen Dreyecke bestimmen lassen, die in voriger Figur und in folgender zu finden sind.

(Siehe die folgende Figur.)



§. 31.

Aufgabe.

Die Höhe eines Thurmes messen, der auf einem Berge stehet.

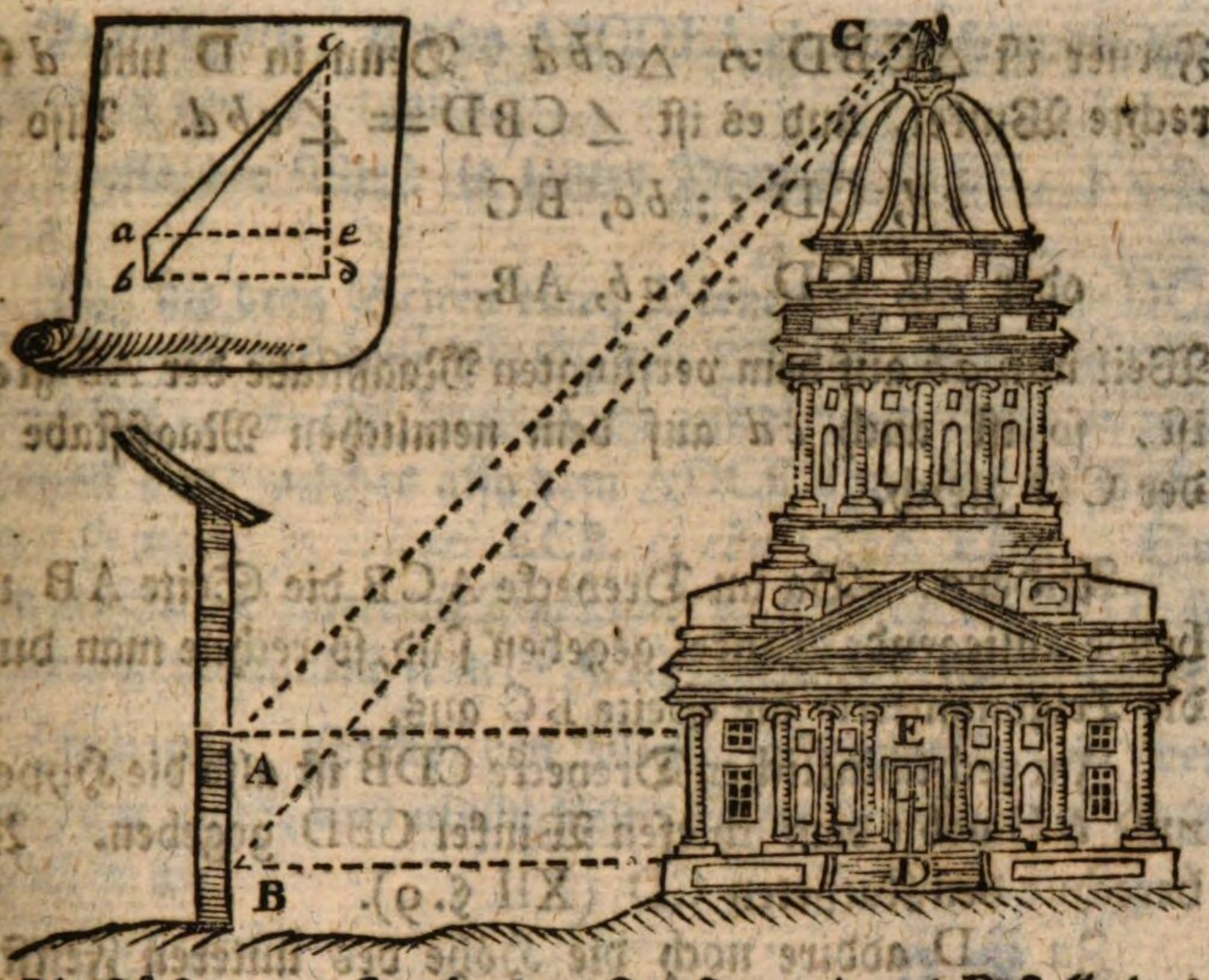
Auflösung. Nimm in einiger Entfernung des Berges zwey Standpunkte an, und miß nach voriger Manier die Höhe des Berges bis an die Spitze des Thurmes. Miß auch nach der nemlichen Manier die Höhe des Berges allein. Ziehe diese letzte Höhe von der ersten ab, so bleibt die Höhe des Thurmes.

Anmerkung. Eben so läßt sich die Höhe einer Statüe finden die auf einem Thurme stehet, und überhaupt die eigene Höhe eines Gegenstandes der auf einem andern stehet.

§. 32.

Aufgabe.

Aus zwey übereinanderstehenden Fenstern die Höhe eines Gegenstandes ausmessen.



Auflösung. In beyden Fenstern A und B stelle das Astrolabium, so daß der Durchmesser desselben horizontal und die Fläche desselben vertikal stehe. Miß also die Winkel CAE und CBD.

Miß auch die Vertikallinie AB von einem Fenster zum andern.

Ziehe auf einem Papiere die Linie *ab* nach dem verjüngten Maaßstabe so lang als AB. Ziehe die Linien *bd*, *ae*, von unbestimmter Länge, und perpendikular auf *ab*.

Mache $\angle cbd = \angle$ CBD, $\angle cae = \angle$ CAE, und merke den Punkt *c* wo die Linien *ac* und *bc* einander schneiden.

Von C fälle den Perpendikel *cd* auf *ae* und *bd*.

So stellet *cd* die Höhe CD vor, worzu noch die Höhe des unteren Fensters über der Erde gerechnet werden muß.

Beweis. Die Dreyecke ACB und *acb* sind ähnlich; denn es ist $\angle$ CAB = CAE + R = $\angle cae$ + R = $\angle cab$. Es ist auch $\angle$ CBA = R − $\angle$ CBD = R − $\angle cbd = \angle cba$. Also ist

bc, BC :: *ab*, AB

Fer-

Ferner ist △CBD ∽ △*cbd* Denn in D und *d* sind rechte Winkel, und es ist ∠CBD = ∠*cbd*. Also ist

cd, CD :: *bc*, BC

oder *cd*, CD :: *ab*, AB.

Weil nun *ab* auf dem verjüngten Maaßstabe der AB gleich ist, so ist auch *cd* auf dem nemlichen Maaßstabe *cd* der CD gleich.

Anders. Da im Dreyecke ACB die Seite AB und beyde anliegende Winkel gegeben sind, so rechne man durch die Trigonometrie die Seite BC aus.

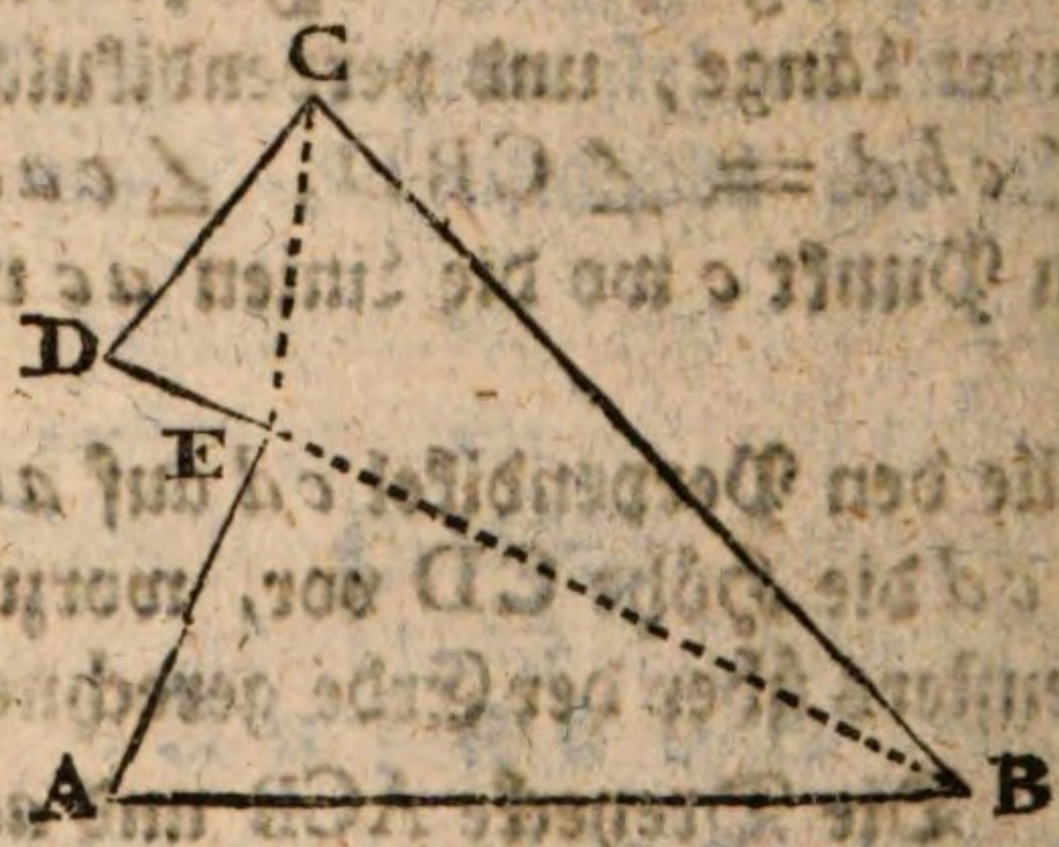
Im rechtwinklichen Dreyecke CDB ist also die Hypotenuse *BC* nebst dem schiefen Winkel CBD gegeben. Also berechne den Katheten CD (XII §. 9).

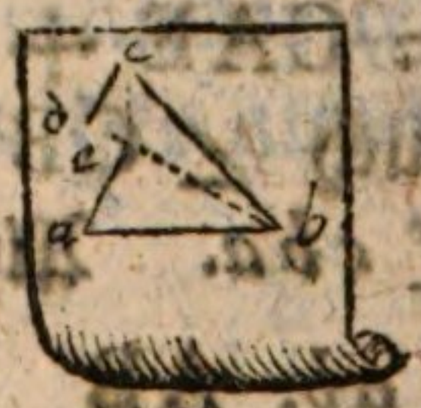
Zu CD addire noch die Höhe des unteren Fensters über der Erde.

§. 33.

Aufgabe.

Einen Grundriß von einem Felde machen, worin man ungehindert gehen und sehen kann.





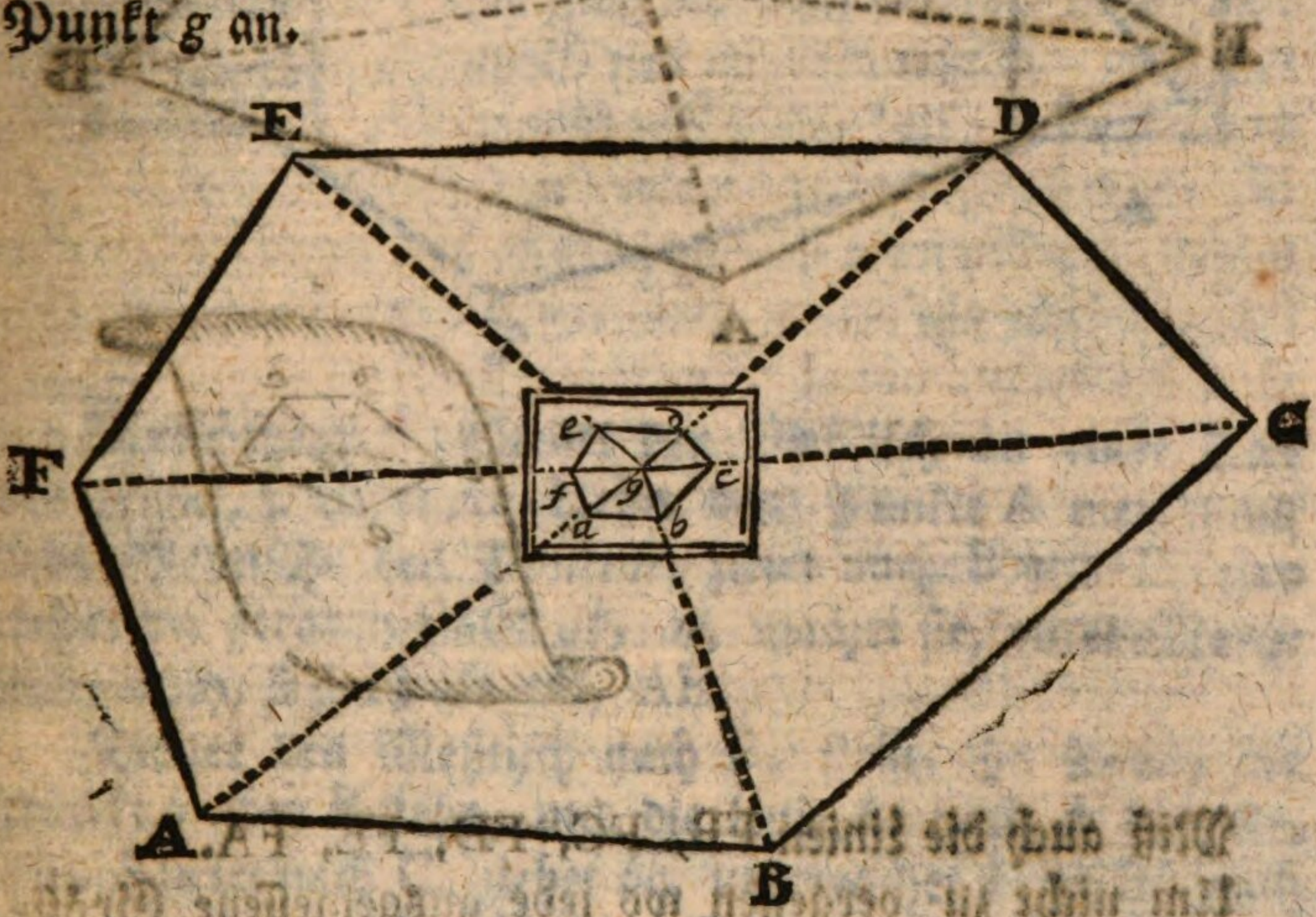
Auf-

Auflösung. Es sey ABCDEA eine Wiese wovon der Grundriß verlanget wird.

Theile die Wiese in lauter Dreyecke DCE, FCB, BEA.

Miß die drey Seiten eines Dreyeck z. B. DE, DC, EC. Nimm auf dem verjüngten Maaßstabe *dc* = DC, *de* = DE, *ce* = CE, und mache aus diesen drey Linien das Dreyeck *dce*, welches also dem △DCE ähnlich seyn wird. Eben so mache △ *ecb* ∽ ECB, △ *eba* ∽ △ EBA. So wird auf dem Papiere die Figur *abcdea* der Figur ABCDEA auf dem Felde ähnlich seyn (V. §. 14), welches verlangt wurde.

Anders. Stelle den Meßtisch ohngefähr in der Mitte der Figur, und nimm in der Mitte des Papiers einen Punkt *g* an.



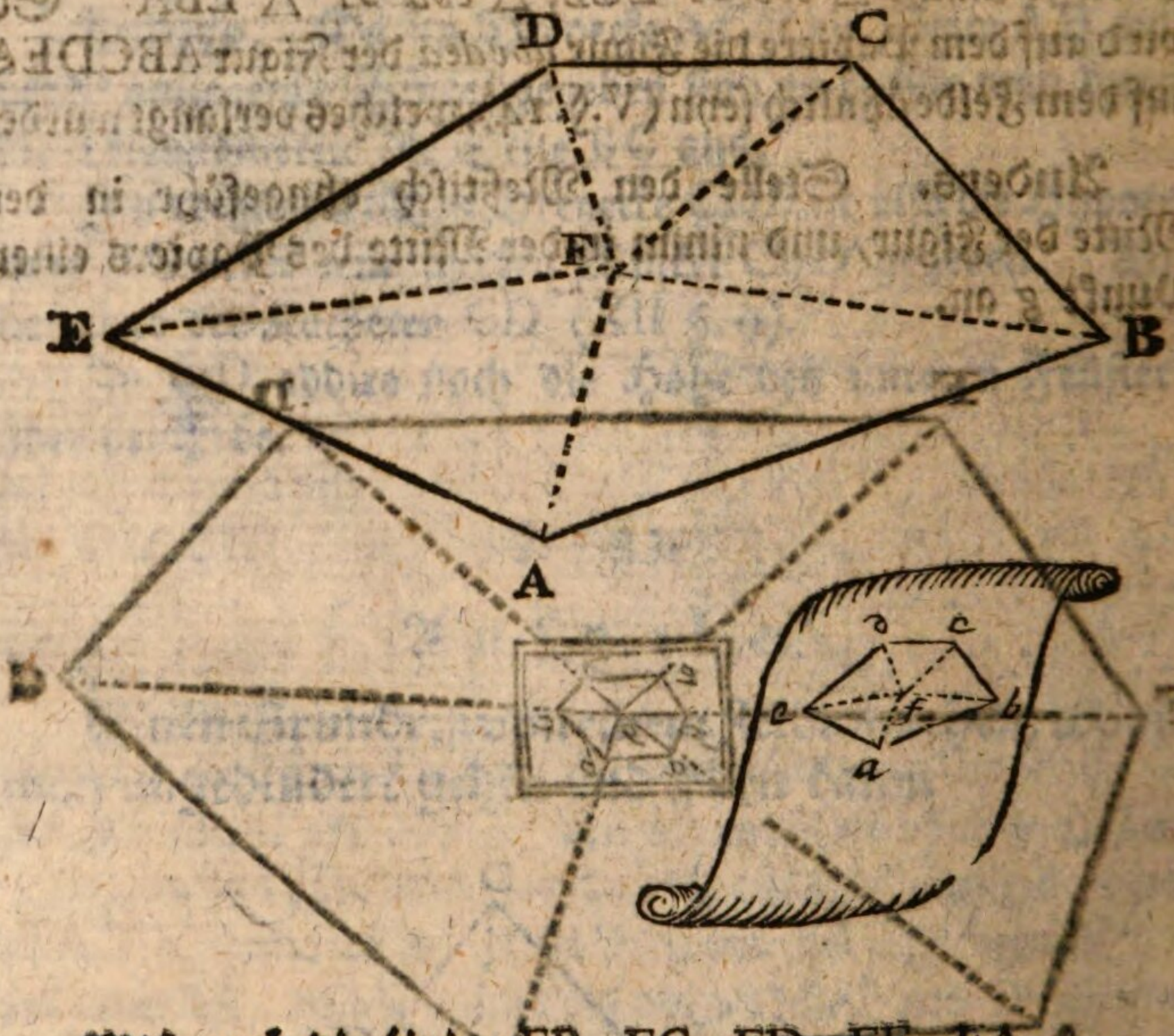
Aus *g* ziehe vermittelst des Visirlineals die geraden Linien *gd*, *ge*, *gf*, *ga*, *gb*, *gc*, welche nach die Winkel D, E, F, A, B, C, des Feldes hinzielen.

Miß auf dem Felde die Linien *g* D, *g* E, *g* F, *g* A, *g* B, *g* C, und mache nach dem verjüngten Maaßstabe *gd* = *g*D, *ge* = *g*E, *gf* = *g*F, *ga* = *g*A, *gb* = *g*B, *gc* = *g*C.

Ziehe

Ziehe die geraden Linien *de*, *ef*, *fa*, *ab*, *bc*, *cd*; so ist die Figur *abcdefa* auf dem Papiere der Figur ABCDEFA auf dem Felde ähnlich, weil sie aus lauter ähnlichen Dreyecken bestehen.

Anders. Miß aus dem willkürlichen Punkte F die Winkel BFC, CFD, DFE, EFA, AFB, mit dem Astrobabium.



Miß auch die Linien FB, FC, FD, FE, FA.

Um nicht zu vergessen wo jede ausgemessene Größe hingehöret, so mache anfänglich auf dem Papiere nur nach dem Augenmaaß einen groben Abriß der Figur, und schreibe darauf die gefundenen Winkel und Linien, jedes an seiner Stelle.

Nun mache *fb* = FB, nach dem verjüngten Maaßstabe, ∠ *cfb* = ∠ CFB, *fc* = FC, ∠ *dfc* = ∠ DFC, *df* = DE, u. s. f. Werden nun die Punkte *b* und *c*, *c* und *d*, u. s. f., zusammengezogen, so entstehet auf dem

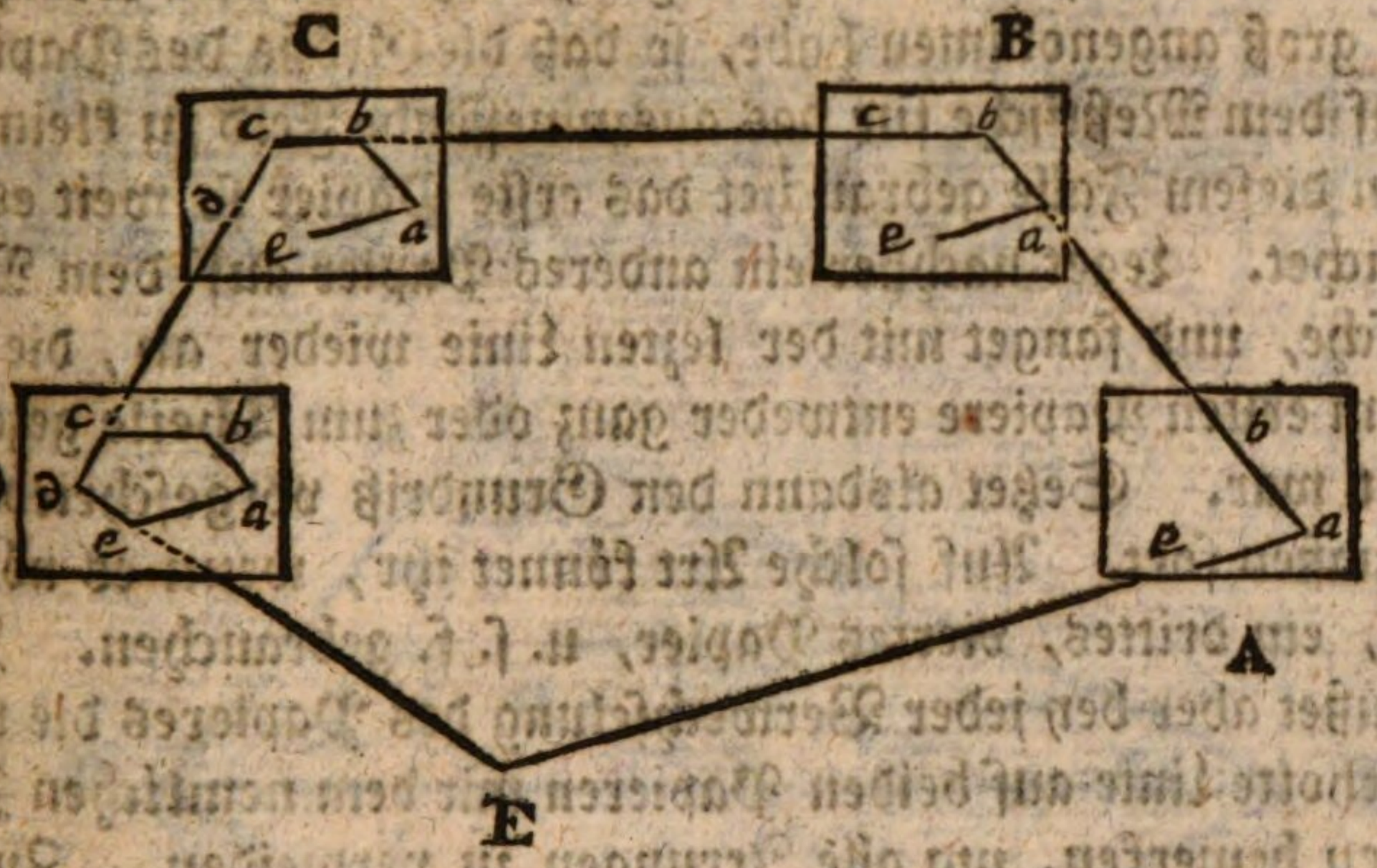
Papiere

Papiere eine Figur, die mit der auf dem Felde ähnlich ist, weil beide aus ähnlichen Dreyecken bestehen.

§. 34.

Aufgabe.

Ein Feld in einen Grundriß bringen, wenn man nicht in demselben hin und her gehen kann.



Auflösung. Stellet den Meßtisch an einer Ecke der Figur, z. E. in A. Ueber dem Punkte A merket auf dem Meßtische den Punkt *a*, zielet nach B und E, und ziehet die geraden Linien *ab*, *ae*, machet sie, nach dem Maaßstabe nach, so groß als AB, AE.

Traget den Meßtisch nach B, stellet ihn so daß der Punkt *b* über B stehe, und die Linie *ba* nach A hinziele. Aus *b* zielet nach C, ziehet *bc*, und machet *bc* = BC nach dem verjüngten Maaßstabe. Auf eine ähnliche Art verfahret bey C.

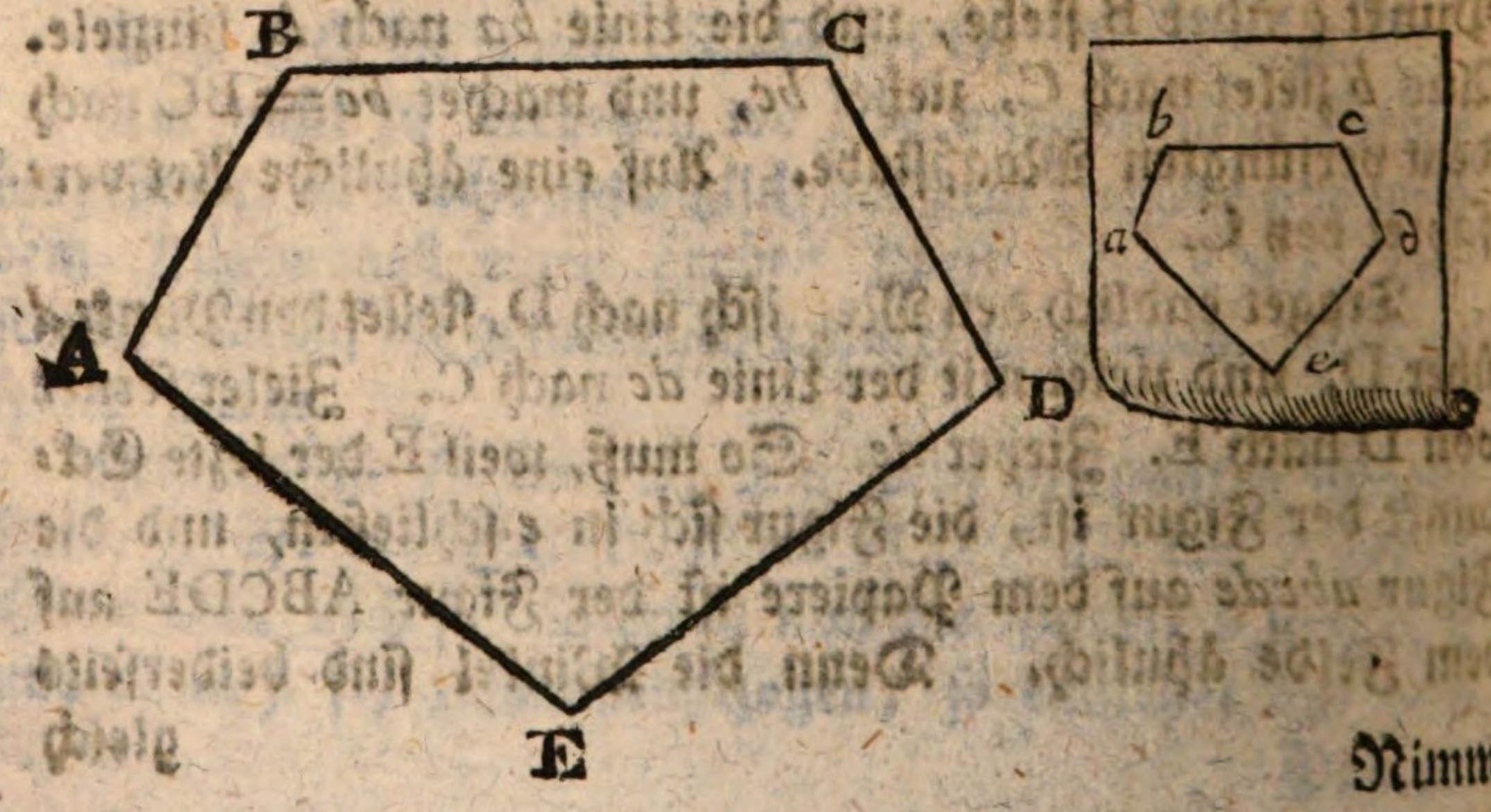
Traget endlich den Meßtisch nach D, stellet den Punkt *d* über D, und zielet mit der Linie *dc* nach C. Zielet ferner von D nach E. Ziehet *de*. So muß, weil E der lezte Eckpunkt der Figur ist, die Figur sich in *e* schließen, und die Figur *abcde* auf dem Papiere ist der Figur ABCDE auf dem Felde ähnlich. Denn die Winkel sind beiderseits

gleich, und alle Seiten sind nach demselben Maaßstabe proporzioniret.

Sollte sich die Figur nicht genau schließen, so kann man daraus erkennen, daß die Winkel nicht genau auf dem Felde abgenommen worden. Man muß sie demnach entweder etwas kleiner oder etwas größer machen, bis die Figur auf dem Meßtische genau zusammenschließet.

Es kann sich ferner zutragen, daß man den Maaßstab zu groß angenommen habe, so daß die Größe des Papieres auf dem Meßtische für das auszumessende Feld zu klein sey. In diesem Falle gebrauchet das erste Papier so weit es zureichet. Leget nachher ein anderes Papier auf dem Meßtische, und fanget mit der lezten Linie wieder an, die auf dem ersten Papiere entweder ganz oder zum Theile gezeichnet war. Setzet alsdann den Grundriß vorgeschriebener maaßen fort. Auf solche Art könnet ihr, wenn es nöthig ist, ein drittes, viertes Papier, u. s. f. gebrauchen. Ihr müßet aber bey jeder Verwechselung des Papieres die wiederholte Linie auf beiden Papieren mit dem nemlichen Zeichen bemerken, um alle Irrungen zu vermeiden. Zulezt werden auf einem großen Tische alle Papiere an einander gefüget, und so erhält man den ganzen Umriß.

Ein anderes Verfahren. Miß mit der Meßkette alle Seiten AB, BC, CD, DE, EA der Figur, und mit den Astrolabium alle Winkel A, B, C, D, E. Schreibe diese Größen auf, um sie nicht zu vergessen.



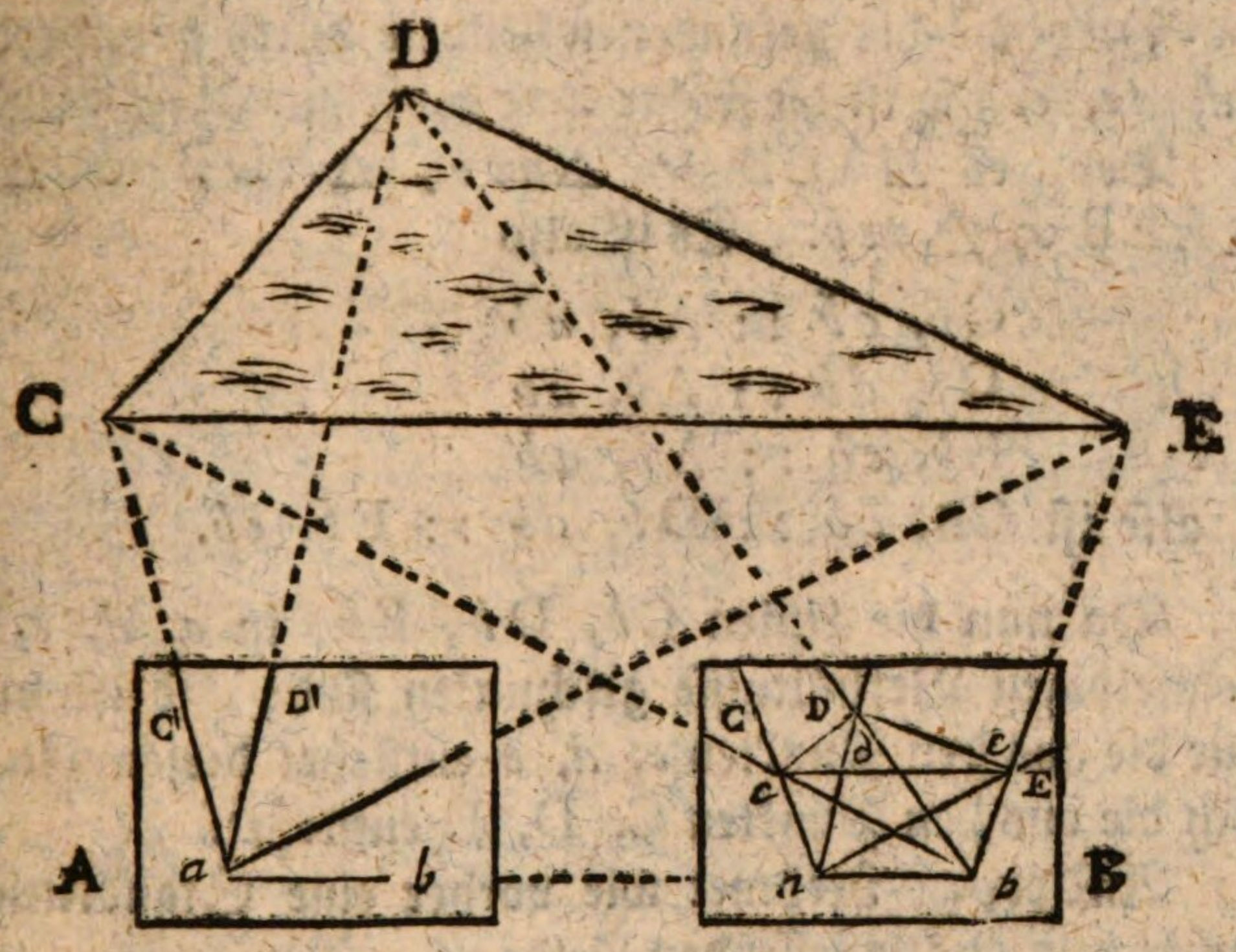
Nimm

Nimm noch einem belibigen Maaßstabe auf dem Papiere $ae = AE$, mache $\angle a = \angle A$, $ab = AB$, $\angle b = \angle B$, $bc = BC$, $\angle c = \angle C$, u. s. f. So bekömst du den Umriß des gemessenen Feldes.

Aufgabe.

§. 35.

Den Grundriß eines Feldes zeichnen, um welches man nicht herum gehen kann, worinn man auch nicht hin und her gehen kann.



Nimm außer dem Felde eine Grundlinie AB nach Belieben. Trage ihre Länge, nach einem verjüngten Maaßstabe, auf den Meßtisch in *ab*.

Stelle den Meßtisch in A, so daß der Punkt *a* über A zu stehen komme. Lege das Lineal mit Dioptern an *ab* und stelle den Meßtisch so, daß er horizontal stehe, und daß zugleich die *ab* nach B hinziele, welches am bequemsten erhalten wird, wenn man unterdessen in B einen Stab einstecket.

Nun ziehe aus *a* die Gesichtslinien nach C, D, E, das ist, nach die Ecken des Feldes, wo entweder merkwürdige Gegenstände stehen, oder Pfähle gepflanzet werden. Bezeiche die Enden dieser Linien am Rande des Meßtisches mit Buchstaben oder Wörtern, die da zu erkennen geben wo sie hinzielen. In der Figur sind sie mit C′, D′, E′ bezeichnet.

Trage den Meßtisch nach B, stelle den Punkt *b* über B, und die Linie *ab* über das Ende der AB. Ziele aus *b* nach C, D, E, ziehe gerade Linien die dahin zeigen, und merke wo jede dieser Linien die schon vorhandne schneidet die nach den nemlichen Gegenstand zielet, als in *c*, *d*, *e*.

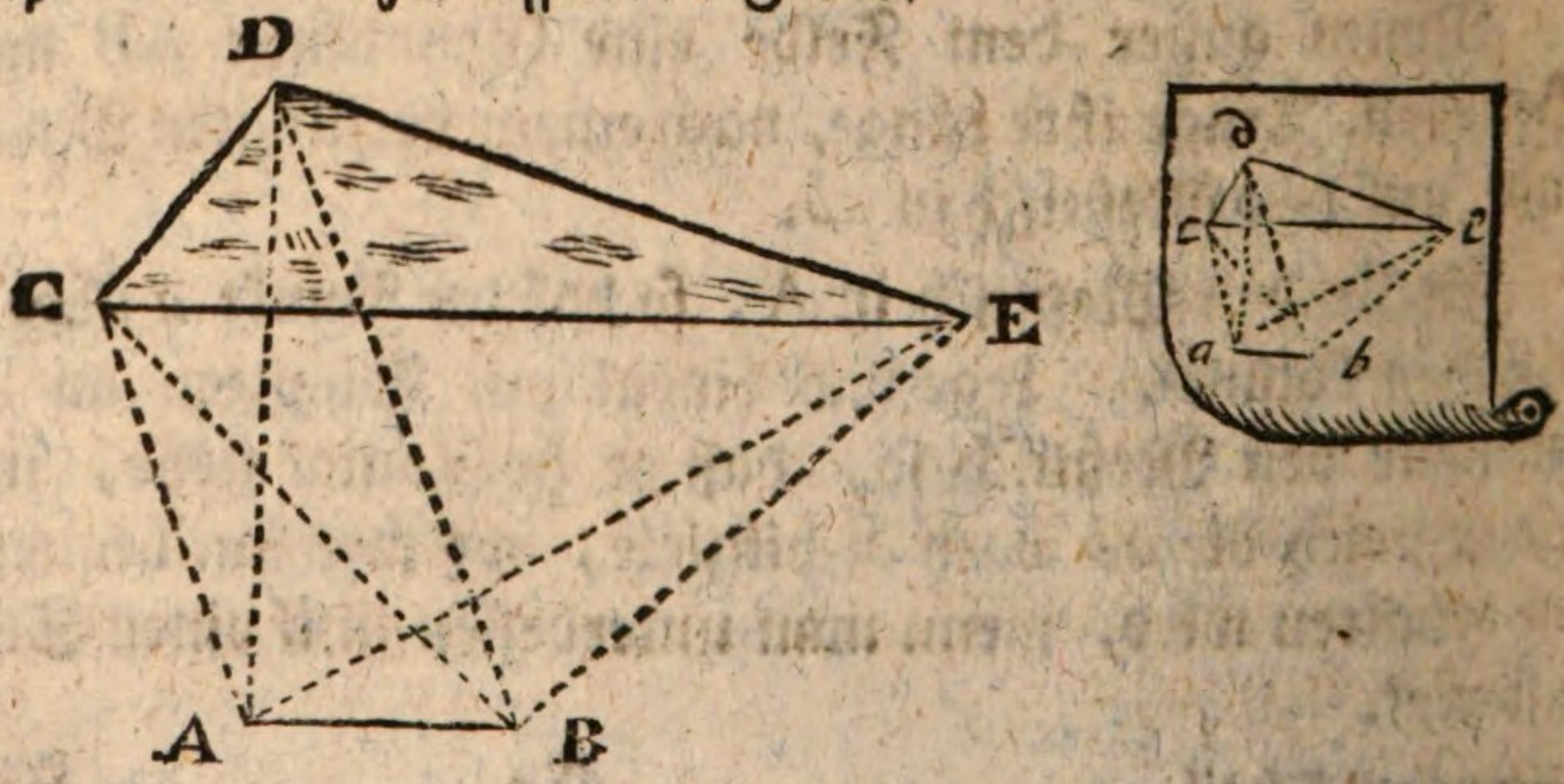
Verbinde die gefundenen Punkte durch gerade Linien *cd*, *de*, *ec*, so ist die Figur *cde* der Figur CDE ähnlich.

Denn es △ACB ∽ △*acb*, △ADB ∽ △*adb*, △AEB ∽ △*aeb*. Es ist also

C*b*, *cb* :: A*b*, *ab*
D*b*, *db* :: A*b*, *ab*
E*b*, *eb* :: A*b*, *ab*
also ist CB, *cb* :: D*b*, *db* :: E*b*, *eb*.

Da nun die Linien C*b*, D*b*, E*b*, in *c*, *d*, *e*, nach demselbigen Verhältnisse geschnitten sind; so ist die Figur die aus den Punkten *c*, *d*, *e* entstehet derjenigen ähnlich die aus den Punkten C, D, E entstehet.

Anders. Nehmet wie vorher eine Standlinie AB außer dem auszumessenden Felde.



Messet

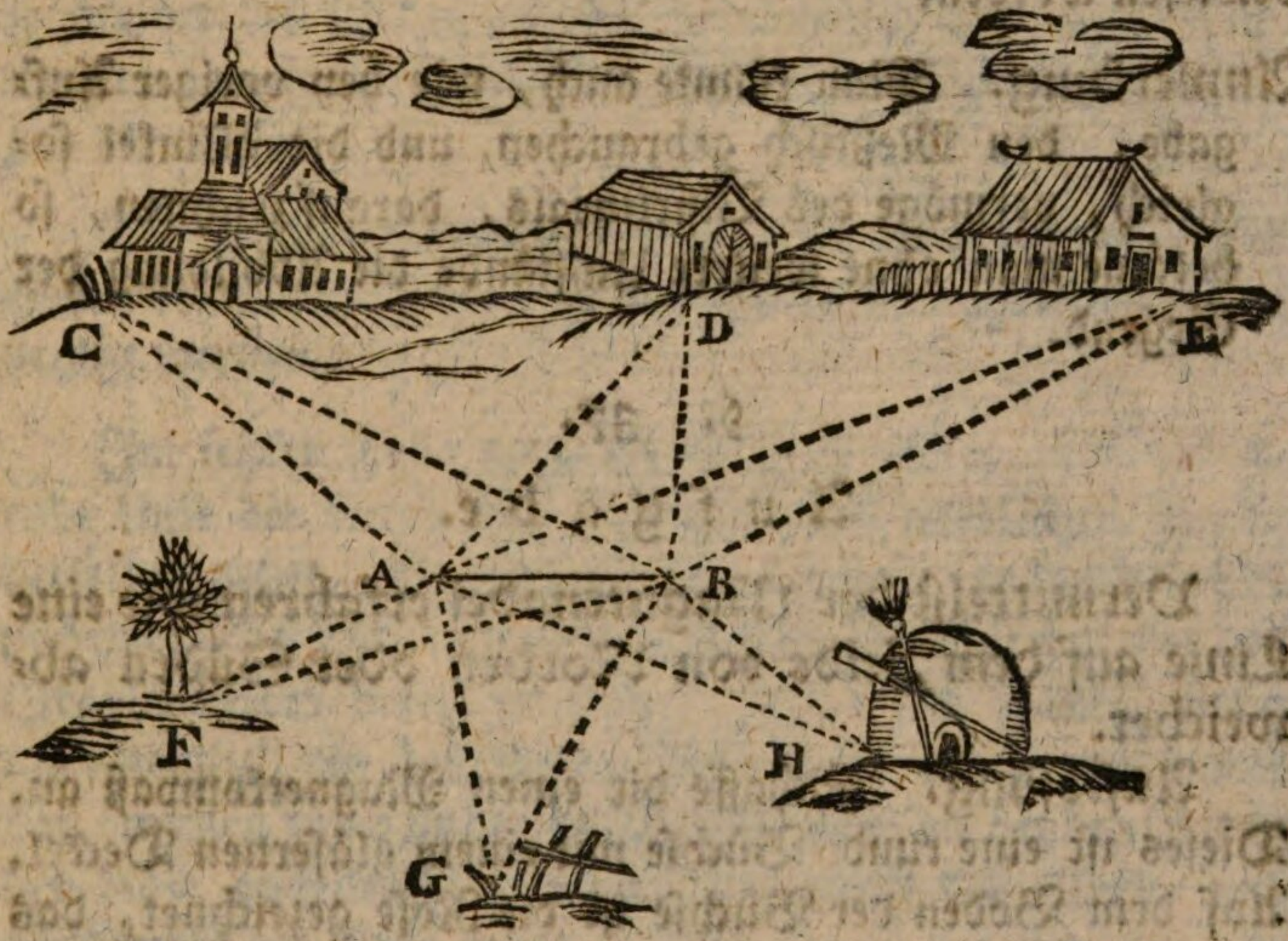
Messet die AB mit der Meßkette. In A messet mit dem Graphometer die Winkel CAB, DAB, EAB. Aus B messet die Winkel CBA, DBA, EBA. Schreibet die gefundenen Grade auf.

Auf dem Papiere ziehet $ab = AB$, nach dem verjüngten Maaßstabe. Auf der Grundlinie ab, machet, vermittelst der bekannten Winkel, $\triangle abc \backsim \triangle ABC$, $\triangle adb \backsim \triangle ADB$, $\triangle aeb \backsim \triangle AEB$. Ziehet cd, de, ec, so ist die Figur cde der CDE ähnlich, welches wie in der vorigen Auflösung bewiesen wird.

§. 36.

Aufgabe.

Ein Feld aufnehmen, so daß der Grundriß die vornehmsten Gegenstände vorstelle die darauf anzutreffen sind.



Auflö-

Auflösung. Wähle eine willkührliche Standlinie AB.

Aus A miß mit den Graphometer die Winkel CAB, DAB, EAB, und aus B die Winkel CBA, DBA, EBA.

Desgleichen auf der andern Seite miß erstlich die Winkel FAB, GAB, HAB, hernach die Winkel FBA, GBA, HBA.

Merke alle diese Winkel auf einer groben und nur ohngefähren Vorstellung der Gegend.

Mache hernach auf dem Papiere $ab = AB$ nach dem verjüngten Maaßstaabe. Auf dieser Grundlinie beschreibe vermöge der gemessenen Winkel die Dreyecke *acb*, *adb*, *aeb*, *afb*, *agb*, *ahb*. So treffen die Scheitel derselben auf die Punkte, wo die Abbildungen der betrachteten Gegenstände hingehören, wie schon bey voriger Aufgabe bewiesen worden.

Anmerkung. Man könnte auch, wie bey voriger Aufgabe, den Meßtisch gebrauchen, und die Winkel sogleich, vermöge des Visirlineals, darauf zeichnen, so bekäme man ohne weitere Umstände die Abbildung der Gegend.

§. 37.

Aufgabe.

Vermittelst der Magnetnadel erfahren wie eine Linie auf dem Felde von Norden oder Süden abweichet.

Auflösung. Schaffe dir einen Magnetkompaß an. Dieses ist eine runde Büchse mit einem gläsernen Deckel. Auf dem Boden der Büchse ist die Rose gezeichnet, das ist, ein Stern, dessen Spitzen den Umfang der Büchse in 32 gleiche Theile eintheilen.

Die vier vornehmsten Punkte die man auf der Rose bemerkt, sind: Nord, Süd, Ost, West, das ist, die Mitternachtgegend, die Mittagsgegend, die Morgengegend,

und

und die Abendgegend. Die übrigen sind Unterabtheilungen zwischen diesen vier Hauptgegenden.

Im Mittelpunkte des Bodens ist ein Stift befestigt, worauf eine Magnetnadel schwebet. Diese hat die bekannte Eigenschaft, daß sie sich mit einem Ende allemal nach die nördliche und mit dem andern nach die südliche Himmelsgegend hinwendet, die Büchse sammt der Rose mag übrigens gedrehet werden wie man will, wenn sie nur in einer horizontalen Lage ist.

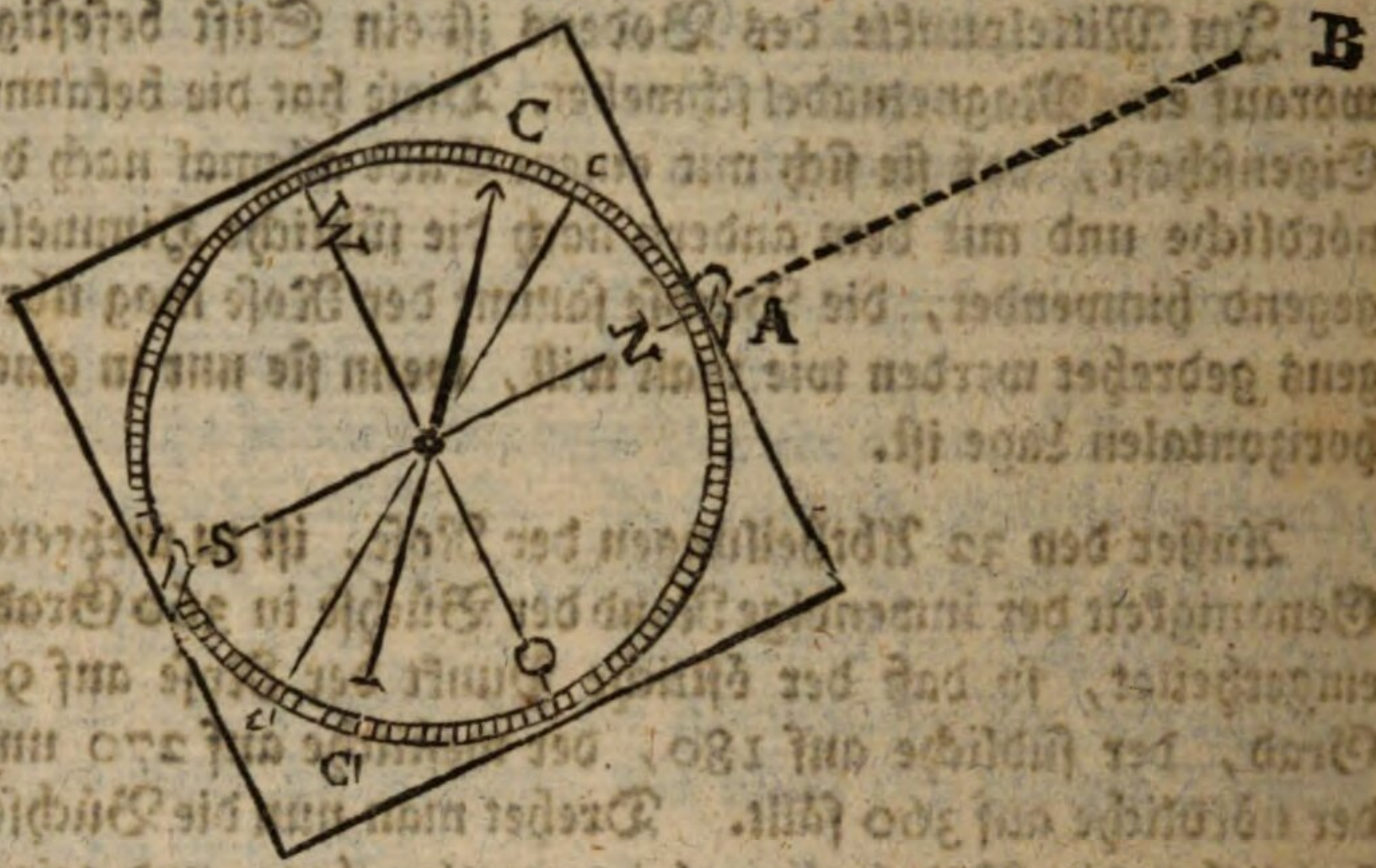
Außer den 32 Abtheilungen der Rose, ist zu mehrerer Genauigkeit der inwendige Rand der Büchse in 360 Grade eingetheilet, so daß der östliche Punkt der Rose auf 90 Grad, der südliche auf 180, der westliche auf 270 und der nördliche auf 360 fällt. Drehet man nun die Büchse, so bleibet die Nadel allemal in einerley Lage und zeiget nach und nach alle Grade des Zirkels, oder alle Abtheilungen der Rose.

Ein solcher Magnetkompaß kann nun entweder auf einem besondern Gestelle oder auf dem Graphometer angebracht werden.

Im letzten Falle muß die Rose so liegen, daß die gerade Linie die durch den südlichen und nördlichen Punkt derselben gehet, mit der Linie parallel sey, die durch beyde unbewegliche Dioptern gehet, welche am Durchmesser des Graphometers befestiget sind. Im ersten Falle, wenn man nemlich ein besonderes Gestelle für die Magnetnadel hat, müssen zwey unbewegliche Dioptern an beyden Enden der Linie angebracht werden, die durch den Nord- und Südpunkt der Rose gehet.

Um nun die Lage einer Linie AB auf dem Felde, in Betrachtung der Weltgegenden zu bestimmen, stelle man den Kompaß an einem Ende A derselben.

Man ziele mit den Dioptern nach das andere Ende B, und lasse den Kompaß in dieser Lage stehen.



Man merke um wiel Grade die nördliche Spitze C der Magnetnadel, vom nördlichen Punkte N der Rose abweichet. Hier z. E. mag der Bogen NC, $49\frac{1}{2}$ Grad ausmachen, und weil N in Betrachtung des Punktes C gegen O abweichet, so lieget die AB, der Magnetnadel nach, $49\frac{1}{2}$ Grad von Norden gegen Osten.

Der Kürze halben kann man schreiben $49\frac{1}{2}$ Grad Nord-Ost, oder $49\frac{1}{2}{}^{g}$ NO. Wenn die Linie AB gegen Westen abwiche, so müste man schreiben $49\frac{1}{2}{}^{g}$ NW. Läge der Punkt B mehr nach Süden, so könnte man zählen um wie viel Grade der Punkt S der Rose, von der südlichen Spitze der Nadel, entweder ostwärts oder westwärts abweichet, alsdann müste man schreiben $49\frac{1}{2}$ SW oder $49\frac{1}{2}{}^{g}$ SO.

Ich habe gesagt, man finde auf diese Art wie die Linie AB, der Magnetnadel nach, von Norden oder Süden abweiche. Diese Einschränkung war deswegen nöthig, weil die Magnetnadel selbst vom wahren Norden und Süden merklich abweichet. Ihre Abweichung ist an verschie-

denen

denen Orten und in verschiedenen Zeiten nicht einerley. Jetzt beträgt sie hier in Berlin ohngefähr $17\frac{1}{2}$ Grad westwärts, so daß der wahre Nordpunkt $17\frac{1}{2}$ Grade weiter gegen Osten lieget als die Nadel anzeiget. Also anstatt, daß die Magnetnadel die Linie C'C zeiget, ist die wahre Mittagslinie c'c so daß der Bogen Cc oder C'c' $17\frac{1}{2}$ Grad beträgt.

Wenn also die Abmeichung der Linie AB von der Mittagslinie vermittelst der Magnetnadel gefunden worden; so müssen bey Berlin $17\frac{1}{2}$ Grade subtrahiret werden, wenn die Abweichung der Linie AB nord-östlich oder süd-westlich ist. Hingegen müssen $17\frac{1}{2}$ Grad addiret werden, wenn die Abweichung nord-westlich oder süd-östlich ist.

Gesetzt also man findet

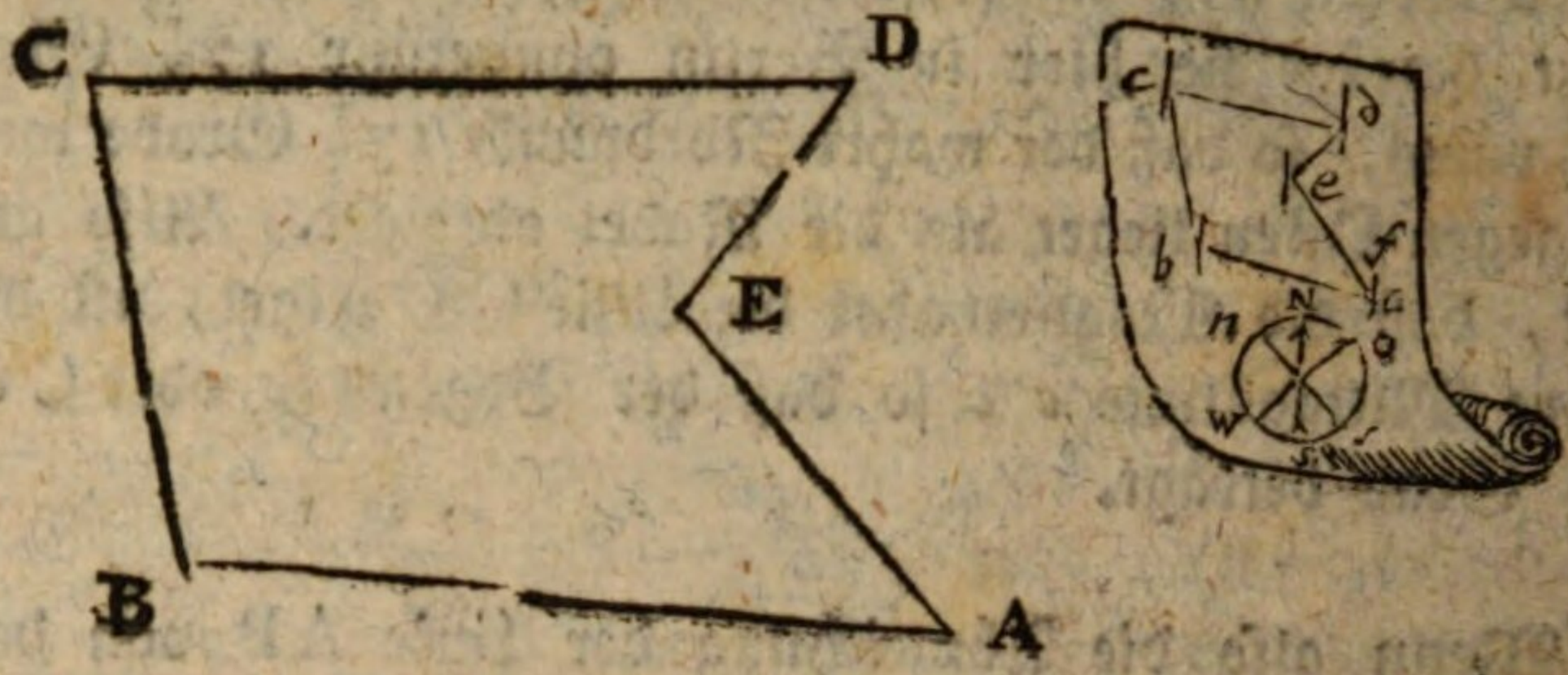
$49\frac{1}{2}$ Gr. N. O., so nehme man $49\frac{1}{2} - 17\frac{1}{2} = 32$ N. O.
$49\frac{1}{2}$ Gr. S. W. . . . $49\frac{1}{2} - 17\frac{1}{2} = 32\frac{1}{2}$ S. W.
$49\frac{1}{2}$ Gr. N. W. . . . $49\frac{1}{2} + 17\frac{1}{2} = 67$ N. W.
$49\frac{1}{2}$ Gr. S. O. . . . $49\frac{1}{2} + 17\frac{1}{2} = 67$ S. O.

§. 38.

Aufgabe.

Mit der Magnetnadel den Grundriß eines Feldes aufnehmen.

Siehe die folgende Figur.



Auflösung. Messet die Linien *AB*, BC, CD, DE, *EA*, aus welchen der Umfang der Figur bestehet.

Stellet die Magnetnadel in A und merket an, um wie viel Grade AE von derselben abweichet (§. 37.) z. E. 6 1/2 N. W.

Beobachtet ebenfalls in E um wie viel Grade die Linie ED abweichet, z. E. 38^{s} N. O.

Beobachtet die Abweichung der DC in D, z. E. 87^{s} S. W. Betrachtet die Abweichung der CB in C, z. E. 8^{s} S. O.

Die Linie B*A* müste sich zwar von selbst geben, da die Länge und Lage der übrigen bestimmt ist; zu mehrerer Sicherheit aber, und um die Richtigkeit der vorigen Beobachtungen zu erkennen, so betrachte noch aus B um wie viel die B*A* abweichet.

Bey allen diesen Beobachtungen brauchet ihr gar nicht die veränderliche Abweichung der Magnetnadel selbst in Betrachtung zuziehen, weil sie in einer kurzen Zeit mit sich selbst parallel bleibet, so daß die Veränderung kaum in einem Jahre merklich ist.

Will man nun die ausgemessene Gegend in einen Riß bringen, so ziehe man auf dem Papiere eine willkührliche Linie *fa*, welche die Richtung der Magnetnadel vorstellet. Wähle in der Linie *fa* einen willkührlichen Punkt *a* zum Anfange der Figur.

Mache mit der Theilscheibe einen Winkel *fae*, so groß als die nordwestliche Abweichung der Linie AE auf dem Felde, also nach obigen Voraussetzungen ∠ *fae* = 6 1^{g} N. W.

Mache *ae*, nach dem verjüngten Maaßstabe, so groß als AE auf dem Felde ist.

Durch *e* ziehe eine gerade Linie mit *fa* parallel, und lege daran einen Winkel von 38^{g} N. O. das ist zur rechten oberwärts.

Mache *ed* = ED nach dem verjüngten Maaßstabe. Durch *d* ziehe wiederum eine gerade Linie mit *fa* parallel, und lege daran einen Winkel von 87^{g} S. W. das ist, linker Hand unterwärts.

Mache *dc* = DC nach dem verjüngten Maaßstabe.

Auf ähnliche Art wird die Lage und Länge der Linie *cb*, welche mit CB auf dem Felde übereinkömmt, bestimmet.

Die Linie *ba* muß zuletzt von selbsten eintreffen. Wenn man aber ihre Lage und Länge wie bey der übrigen bestimmet, so wird man desto besser sehen, ob alles richtig aufgenommen worden.

Um nun die Weltgegenden auf dem Grundrisse gehörig zu bestimmen, ziehe man eine Linie NS mit *fa* parallel.

Man ziehe eine andere Linie *ns*, die mit der vorigen NS einen Winkel mache, welcher der Abweichung der Magnetnadel gleich sey. Weichet die Magnetnadel gegen Westen ab, so muß diese Linie mehr nach Osten liegen, und umgekehrt.

Diese Linie *ns* ist alsdenn die wahre Mittagslinie. Man nehme einen Punkt derselben, und beschreibe einen Zirkel. In demselben merke man den wahren Nord- und Südpunkt *n* und *s*. Man ziehe auf *ns* einen andern Durchmesser senkrecht, nemlich O. W, so giebt, wenn man nach Norden hinsieht, der Punkt O zur Rechten die östliche Gegend, und der Punkt W zur Linken die westliche Gegend.

Wenn man will, so kann man die ganze Rose in dem Zirkel verzeichnen, oder man macht nur die vier Hauptgegen-

den

den durch die Buchstaben *n*, *s*, O, W kennbar. Bey N pflegt man eine Linie zu zeichnen.

§. 39.

Aufgabe.

Der Grundriß eines krumlinichten Feldes verfertigen.

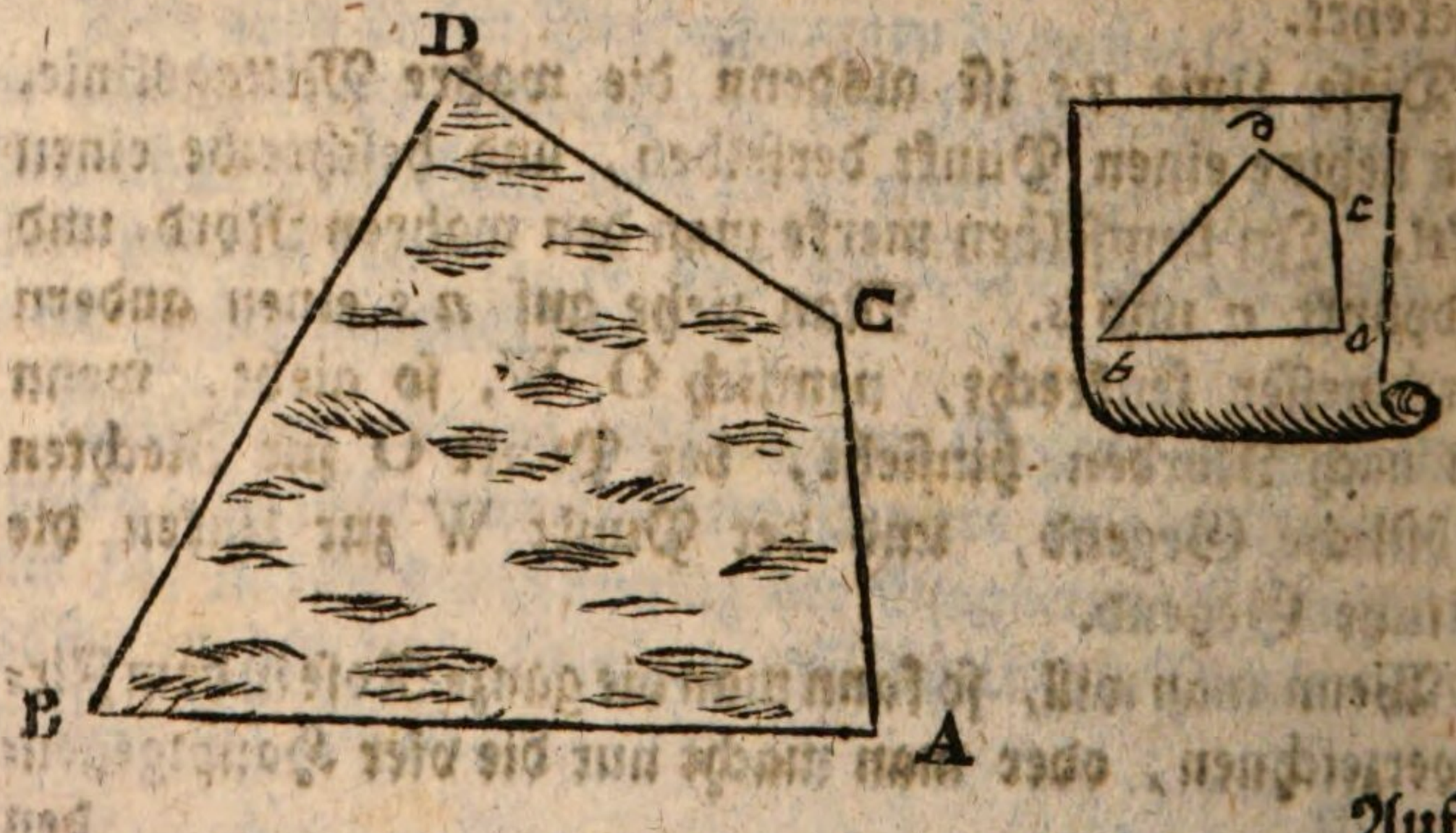
Auflösung. Man theile den Umfang des Feldes in kleine Theile ein, die sich wenig von der geraden Linie entfernen. Man nehme alsdann den Grundriß nach vorigen Aufgaben. Die kleinen Krümmungen bringe man bloß nach Augenmaaß an.

Auf solche Art läßt sich der krumme Lauf eines Flusses in einem Riß bringen, indem man das Ufer erstlich in beynahe gerade Theile eintheilet. In diesem Falle und in ähnlichen, wo es nicht auf kleine Irrthümer ankömmt, bedienet man sich gerne der Magnetnadel zur Aufnahme der Winkel; denn ob sie gleich, wegen des kleinen Umfanges ihres Zirkels, die Theile der Grade nicht ganz genau angiebt, so beträgt doch der Fehler selten über einen halben Grad.

§. 40.

Aufgabe.

Einen gegebenen Grundriß auf dem Felde abstechen.



Auflö-

Auflösung. Man ziehe auf dem Felde eine Linie *AB*, die nach der Meßkette so groß sey als die Linie *ab* auf dem Papiere nach dem verjüngten Maaßstabe.

In B mache man eine Winkel so groß als $\angle b$. Dieses kann leicht geschehen, wenn man aus B mit dem Durchmesser des Astrolabiums nach *A* hinziehet, und das Visirlineal auf die gehörige Anzahl von Graden stellet; denn so erhält man die Gesichtslinie *BD*, in welcher man einen Stab einstecken läßt.

Nun wird die BD so groß gemachet als *bd* sie vorstellet, ferner $\angle D = \angle d$.

So gehet man weiter, bis man herum ist, und dann wird die Figur ABDCA auf dem Felde, der Figur *abdca* auf dem Papiere ähnlich.

§. 41.

Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines Feldes ausrechnen.

Auflösung. Man bediene sich der Regeln, die bey der Ausrechnung der Figuren überhaupt gegeben worden. (Hauptst. V. §. 34)

Bey solchen Ausrechnungen müssen die Längen erstlich in einerley Einheiten ausgedrücket werden, und das Facit oder Resultat, welches allemal ein Produkt oder eine Summe von Produkten ist, bedeutet nicht mehr ein bloßes Längenmaaß, sondern ein Quadratmaaß.

Z. E. Es sey die Grundlinie eines Parallelegramms 5 Ruthen, 7 Fuß, 4 Zoll Rheinländisch Maaß. Die Breite oder Höhe sey 2 Ruthen, 5 Fuß. So muß man erstlich alles in Zollen ausdrücken. Alsdann bekömmt man folgende Rechnung.

5 Ruthen, 7 Fuß, 4 Zoll = 808 Zoll
2 Rnthen, 5 Fuß : : = 348 Zoll

6464
3232
2424

= 281184 Quadratzoll.

Da

Da nun 144 Quadratzoll zu einem Quadratfuße, und 144 Quadratfuß zu einer Quadratruthe gehören, so muß man zweymal durch 144 dividiren. So bekömmt man 281184 □ Zoll = 13 □ Ruthen, 80 □ Fuß, 96 □ Zoll, als den Flächeninhalt des Parallelogramms,

§. 42.

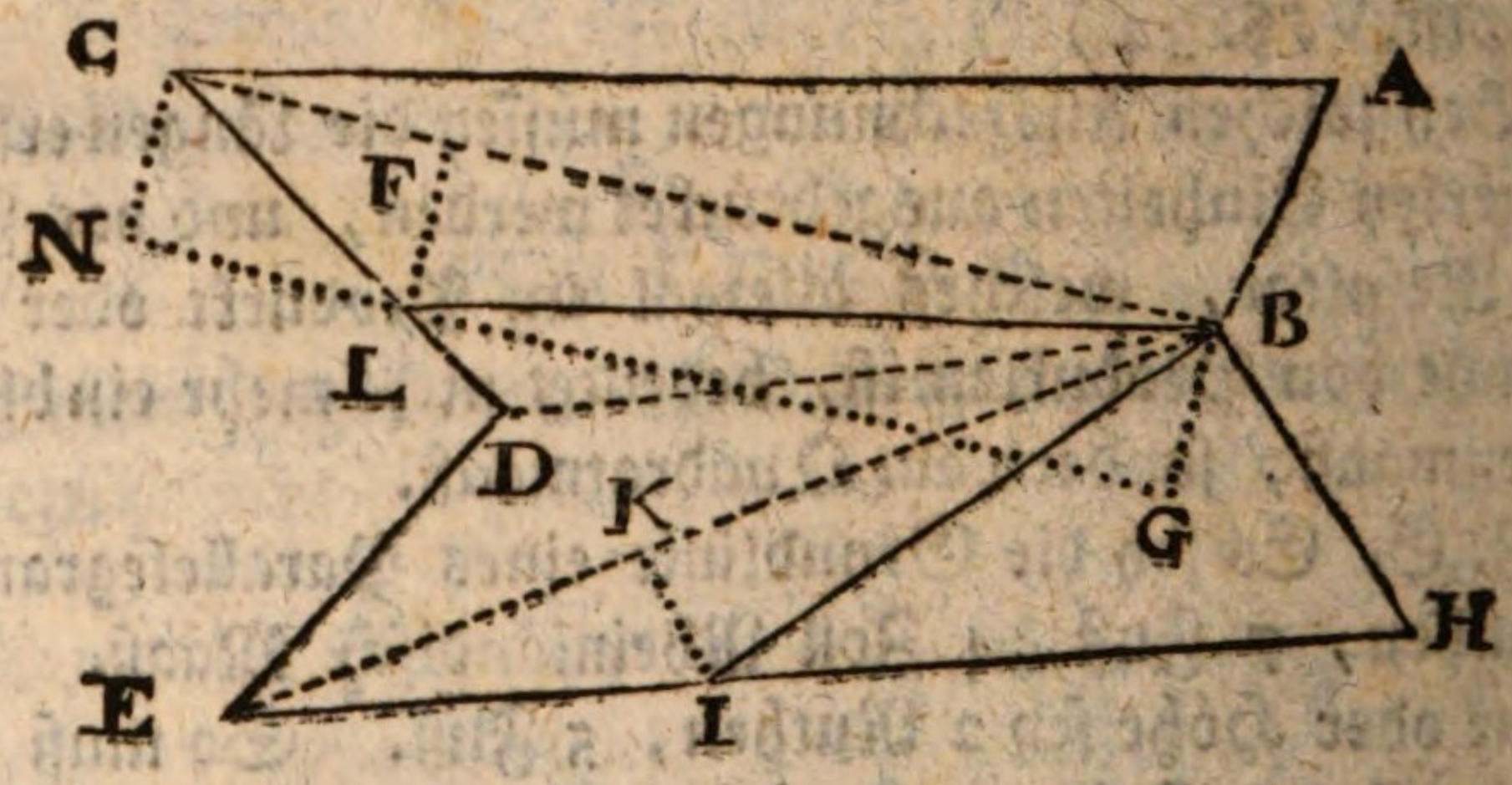
Aufgabe.

Ein Feld in einige gleiche Theile eintheilen.

Auflösung. Theilet das Feld in Dreyecke. Rechnet den Flächeninhalt jedes Dreyeckes aus. Machet die Summe aller Dreyecke, so habet ihr den Flächeninhalt des ganzen Feldes.

Dividiret den ganzen Inhalt durch die Anzahl der verlangten Theile, so kömmt die Größe jedes Theiles.

Setzet nun zu jedem Dreyeck etwas zu, oder nehmet davon etwas ab, daß jeder Theil dem gefundenen Quotienten gleich werde, wie es (V. §. 39.) geschehen ist.



Z. E. Das Feld *A*BHEDCA soll in drey gleiche Theile getheilet werden. Gesetzt man finde

△ ABC = 1124 □ Zoll
△ BCD = 1058 □ Zoll
△ BDE = 874 □ Zoll
△ BEH = 1876 □ Zoll

So ist ABHEDCA = 4932 □ Zoll
der dritte Theil ist = 1644 □ Zoll

Das

Das Dreyeck ACB hat nur 1124 □ Zoll, macht also nicht den dritten Theil aus, und es fehlen noch 520 □ Zoll, welche vom Dreyeck BCD abgenommen werden müssen.

Gesetzt es sey BC = 42 Zoll, so wird die Höhe LF des abgeschnittenen Stückes BCL gefunden, wenn man den doppelten Flächeninhalt durch die Grundlinien BC dividiret, (IV. §. 78) also ist $LF = \frac{1040}{42} = 24\frac{17}{21}$ Zoll.

Um nun auf dem Felde die Höhe LF des Dreyecks BCL gehörig zu bestimmen, stelle man in B das Astrolabium, so daß der Durchmesser nach C ziele. Das Visirlineal richte man auf 90 Grad, und lasse in der Gesichtslinie in der Entfernung von $24\frac{17}{21}$ Zoll einen Stab G einstecken. Eben so errichte man CN senkrecht auf BC, daß $CN = 24\frac{17}{21}$ Zoll. Von G nach N, dehne man eine Kette oder ein Strick aus, so wird GN die CD in I. schneiden, und es wird seyn $LF = GB = CN = 24\frac{17}{21}$ Zoll. Anstatt der Enden B und C der Grundlinie kann man auch jede andere zwey Punkte nach Belieben in derselben nehmen.

Das Dreyeck BCD war = 1058 □ Zoll, da nun abgeschnitten worden BLC = 520 □ Zoll, so bleibt △ BDL = 538 □ Zoll. Der vierte Theil der Figur ist aber 1644 □ Zoll, also fehlen 1106 □ Zoll. Das Dreyeck BDE hat nur 874 □ Zoll. Also fehlen noch 232 □ Zoll, welche vom Dreyeck BEH abgenommen werden müssen.

Gesetzt es sey BE = 55 Zoll, so muß seyn $IK = \frac{2 \times 232}{55} = \frac{464}{55} = 8\frac{24}{55}$ Zoll. Um dem Dreyecke BEI diese Höhe $IK = 8\frac{24}{55}$ Zoll zu geben, verfahre man wie vorher bey LF im Dreyecke BCL.

Das Dreyecke BEH hatte 1876 □ Zoll. Nun ist abgenommen worden △BIE = 232 □ Zoll. Also bleibet □BIH = 1644, als der letzte Theil der Figur.

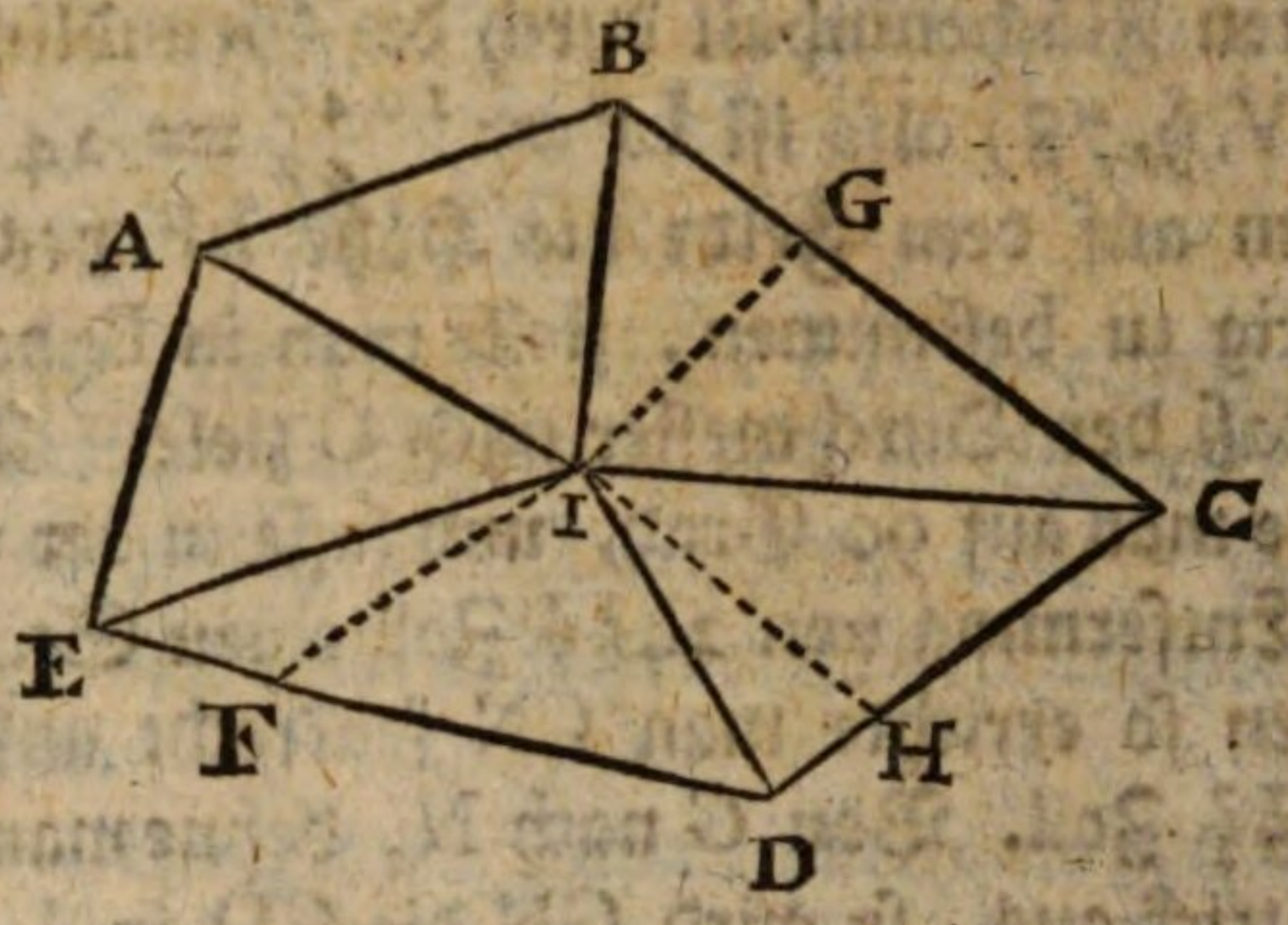
Die drey verlangten Theile sind demnach ACLBA, BLDEIB, und BIHB.

§. 43.

§. 43.

Aufgabe.

Ein Feld so eintheilen, daß alle Theilungslinien in einen Punkt zusammen laufen.



Auflösung. Gesetzt das Feld *A*BCDEA soll in vier Theile getheilet werden, so daß alle Theilungslinien in I zusammentreffen, wo ein Brunnen ist, der allen vier Theilnehmern nützen soll.

Aus I ziehe nach den Ecken der Figur die Linien I*A*, IB, IC, ID, IE. Rechne jedes Dreyeck aus, mache die Summe aller Dreyecke, dividire die Summe durch 4, als die Anzahl der gleichen Theile. Verfahre nun wie bey voriger Aufgabe.

Nemlich vom Dreyecke BCI nimm ab das Stück BGI und gieb es dem Dreyecke *A*BI zu, so daß ABGIA = $\frac{1}{4}$ der Figur.

Vom Dreyecke ICD nimm ab, das Stück ICH, und gieb es zum Dreyecke IGC, so daß IGCHI = $\frac{1}{4}$ der Figur.

Vom Dreyecke IDE nimm ab das Stück FDI, und gieb es zum Dreyecke IHD, so daß IHDFI = $\frac{1}{4}$ der Figur.

Zuletzt bleibet IFEAI = $\frac{1}{4}$ der Figur.

Ende des zweyten Theils.

Druckfehler im ersten Theile dieser Geometrie.

Seite 76, Zeile 12 und 13, stehet, von seinem Platze; anstatt, von seinem ersten Platze A.

— 8, Zeile 4 von unten, stehet, diese Einheit: es soll heißen, dieser Einheit.

Druckfehler im zweyten Theil dieser Geometrie.

Seite 192, in der lezten Zeile, stehet, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}\,y$ anstatt, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{T}\,y$.

— 212, Zeile 6, anstatt, $\mathfrak{S}(x \pm z)$ lese man, $\mathfrak{S}'(x \pm z)$.

— 237, Die Blattnummer oberwärts ist unrichtig, denn es stehet daselbst 137, anstatt 237.

— 281, Zeile 5 von unten, anstatt, zu den folgenden Hauptstücken, lies, zum folgenden Hauptstücke.

Druckfehler im ersten Theile meiner Algebra.

Ob ich gleich am Ende meines selbstlernenden Algebristen verschiedene Druckfehler angezeigt habe, so habe ich doch seitdem einige wenige entdekt, die ich hier, zum besten der Jünglinge welche gedachtes Buch gebrauchen, bemerken will. Im ersten Theile verbessere man folgendes:

Vorrede, Seite IX, hier stehet zweymal, Diophantes, anstatt, Diophantus.

Seite 115, Zeile 3 von unten, anstatt, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$

lies $\left(\frac{a}{b}\right)^{3} = \frac{a^3}{b^3}$

— 232, Zeile 6 und 7, anstatt, Differenz, lies, Razion.

— 251, Zeile 18, anstatt, Kapitel, lies: Kapital,

— 280, Zeile 14, stehet multiplizire 1: es soll heißen, multiplizirer.

— 300, Zeile 15, anstatt, —2, lies, —24.

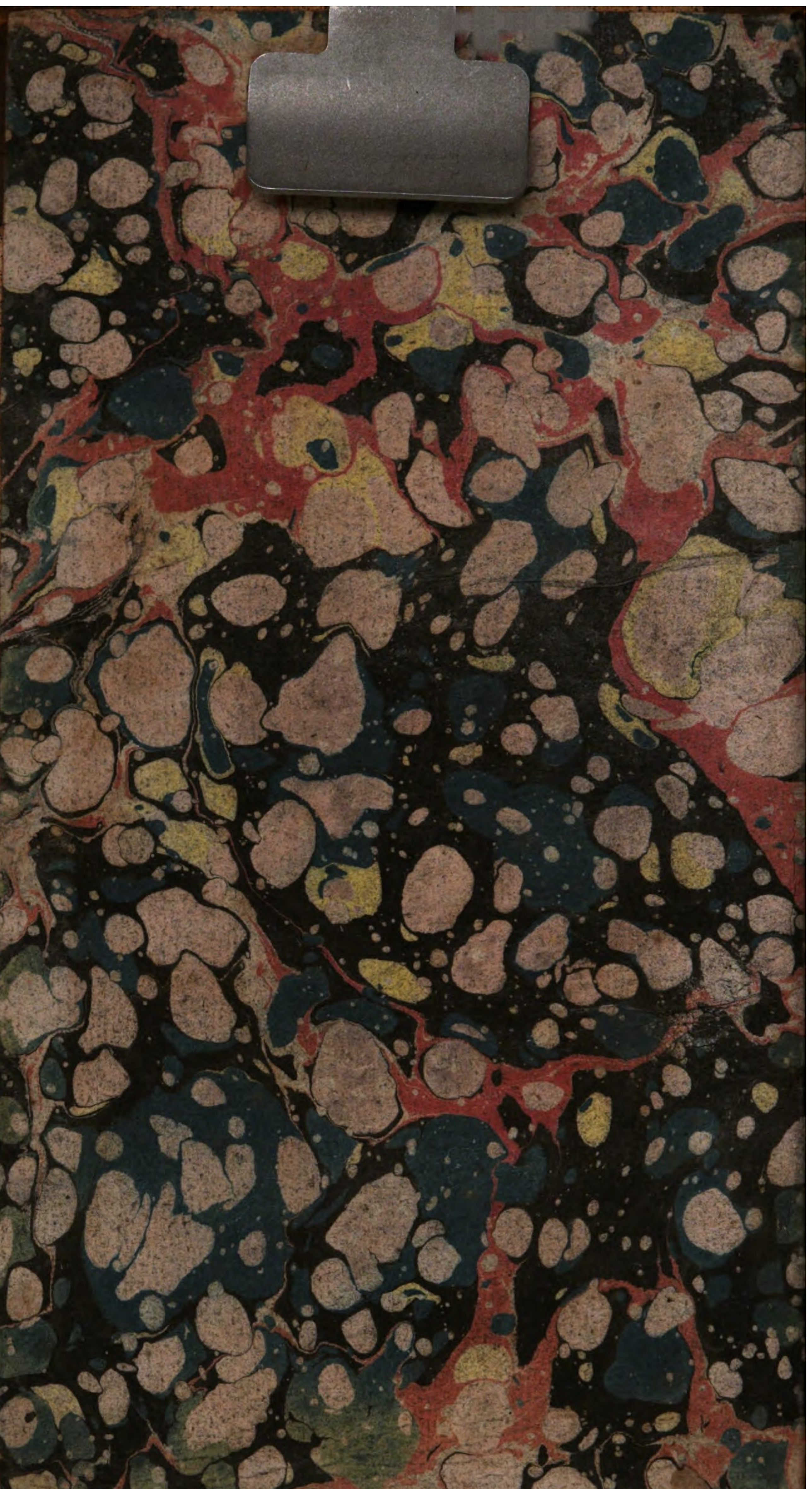
Druck-

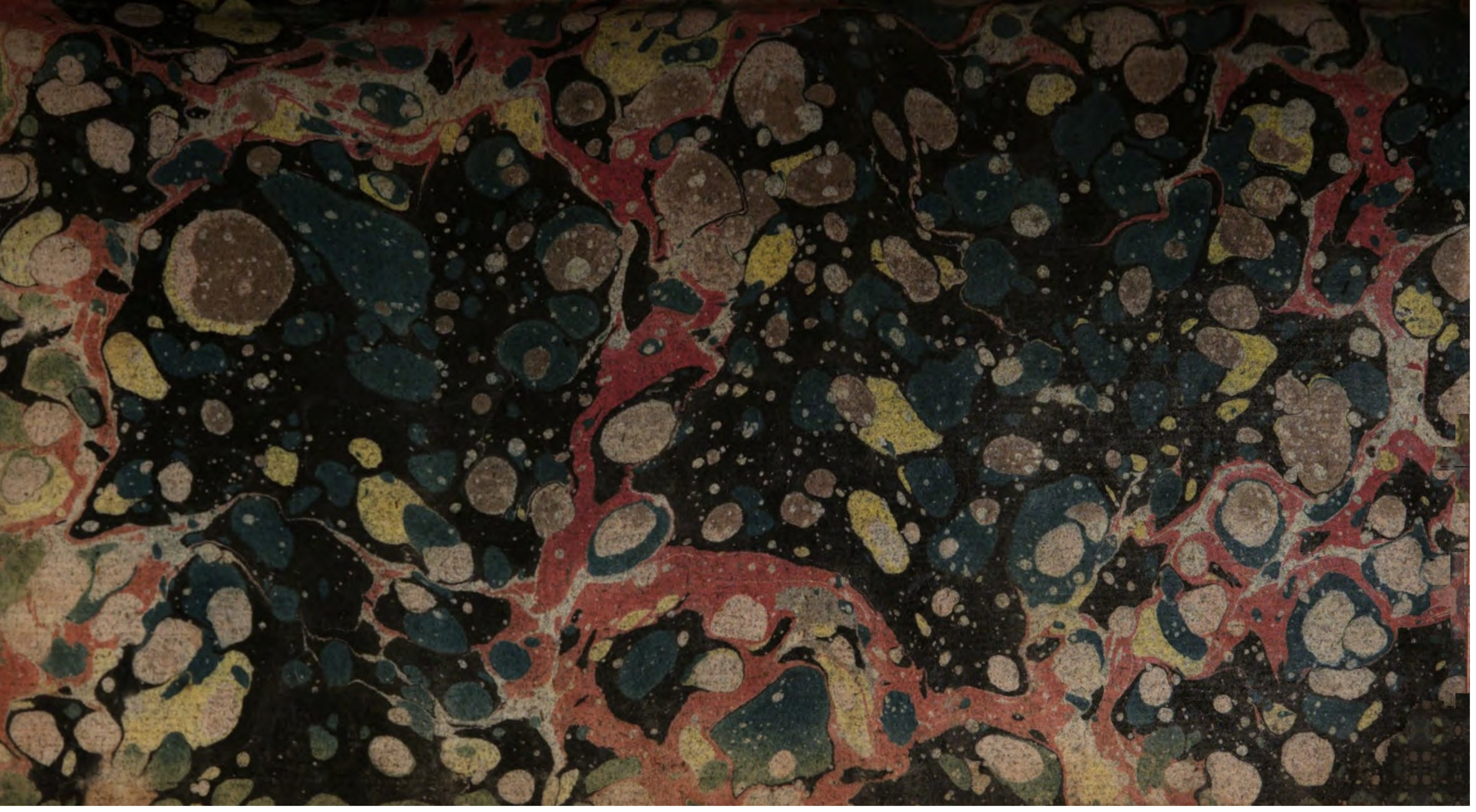
Druckfehler im zweyten Theile der Algebra.

Seite 268, Zeile 2, anstatt, $\frac{dx}{\sqrt{x(x^2-a^2)}}$, lies, $\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$

— 269, Zeile 4, $-\beta x + c$, lies, $-\beta' x + c$.

Daß meine Genauigkeit in Anzeigung der Druckfehler, sich sogar auf ein schon seit einem Jahre herausgegebenes Buch erstrecket, wird mir keiner verargen, der da weiß was ein Druckfehler in mathematischen Büchern oft zu bedeuten hat, und wie ein Anfänger, auch wohl ein geübter Mathematiker, dadurch in Verlegenheit gesetzet werden kann. Der berühmte Euler wurde einst, wegen einer Stelle in seinen Schriften, aus einer großen Entfernung, von einem Gelehrten um eine Erklärung gebeten; und siehe da, der ganze Knoten lag in einem kleinen Druckfehler, weil nemlich — anstatt + gesetzet war.





BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Burja, Abel, 1752-1816

Der selbstlernende Geometer, oder deutliche Anweisung zur Meßkunst worin sowohl die euklidische Geometrie, als auch die geradlinichte und sphä rische Trigonometrie, nebst einer Anleitung zum Rivelliren und Landmessen enthalten ist
Bd.: 2

Berlin und Libau (1787)

Math.p. 60 k-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137652-1
VD18 90238184